中国科学

1989 年 9 月 A 辑 第 9 期

某些与 Liouville 数有关的数的代数无关性*

M. Waldschmidt
(庞加勒研究所,法国巴黎)

朱尧辰
(中国科学院应用数学研究所,北京)

摘 要

本文发展了一种代数无关性方法,它起源于 Mordoukhay-Boltovskoy, 使我们可以借助于 Kummer 理论或超越性度量确定某些与 Liouville 数有关的数的代数无关性.

关键词: Liouville 数, Kummer 理论,超越性度量,代数无关性

在 1946 年 Mordoukhay-Boltovskoy[1,2] 试图证明下列结果: 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是代数数, $P\in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y]$ 非零. 若 η 是无理数, 满足方程 $P(\alpha_1^\eta, \cdots, \alpha_s^\eta, \eta)=0$, 则存在正数 λ 和 μ, 使对所有有理数 $p/q(q>0)$, 不等式 $|\eta-p/q|>\exp(-\lambda q^\mu \log q)$ 成立.

本文发展了这个主题,并利用 Kummer 理论证明它对某些 Liouville 数是真实的, 亦即当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数, 则数 $\eta, \alpha_1^\eta, \cdots, \alpha_m^\eta$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关. 此外, 我们还确切地给出他的命题中 μ 的明显的允许值(即下文定理 3.1).

这个证明思想如下: 若 $P\in \boldsymbol{Z}[x, y_1, \cdots, y_m]$ 非零,且 $P(\eta, \alpha_1^\eta, \cdots, \alpha_m^\eta)=0$, 而 p/q 是逼近 η 的有理数, 则 $P(p/q, \alpha_1^{p/q}, \cdots, \alpha_m^{p/q})$ 是代数数,当 p/q 非常靠近 η 时其绝对值非常小. 我们应用 Kummer 理论证明这个数非零,从而由 Liouville 不等式导致矛盾.

同样的思想可产生许多数的代数无关性的例子, 但需应用指数函数或椭圆函数的值的超越性度量,用以代替 Kummer 理论的代数推理. 本文给出 4 种类型的结果,其代表是下文的定理 4.1,5.1,5.2,6.1. 这种类型的推理首先是 Mordoukhay-Boltovskoy 在 1927 年给出,紧接着由 Mahler 加以发展, 以后 Gelfond 等人也使用过这种方法. 有关的文献可在文献[3]中找到.

在下文中,我们用 $c_{k0}, c_{k1}\cdots(1\leqslant k\leqslant 6)$ 表示与 n 无关的正常数, 用$\|a\|$表示实数 a 与最接近它的整数间的距离,并用 $\tau(q)$ 表示任一个正函数,且当 $q\to\infty$ 时单调趋于无穷. 与通常一样,若 α 是非零代数数,而 $\log\alpha$ 是它的对数的一个给定值, 则对任何 $z\in \boldsymbol{C}$, 用 α^z 表示 $\exp(z\log\alpha)$.

本文 1988 年 4 月 11 日收到,1989 年 2 月 25 日收到修改稿.

* 第一作者由法国国家科研中心 (CNRS) 与中国科学院交换协议支持,第二作者由联邦德国洪堡基金会及法国 IHES 资助.

一、基本结果

公共假设 设 s 和 t 是两个有理整数，$0 \leqslant s \leqslant t$. 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_t$ 是单复变半纯函数，$\eta_1, \cdots, \eta_t$ 是一些复数，且 η_ν 不是 $\varphi_\nu(1 \leqslant \nu \leqslant t)$ 的极点. 还设 ϕ 是一个正有理整数的正函数，单调趋于无穷. 设不等式 $\max\limits_{1 \leqslant \nu \leqslant t} \|\eta_\nu q\| < \exp(-\phi(q))$ 有无穷多个正整数解 q，记为 $0 < q_1 < q_2 < \cdots < q_n < \cdots$. 还记 $\|\eta_\nu q_n\| = |\eta_\nu q_n - p_{\nu n}|$，其中 $p_{\nu n} \in \boldsymbol{Z}(1 \leqslant \nu \leqslant t, n \geqslant 1)$.

定理 1.1. 假设对任何多项式 $R \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_t]$，且 $R(\eta_1, \cdots, \eta_s, y_1, \cdots, y_t)$ 在 $\boldsymbol{Z}[\eta_1, \cdots, \eta_s][y_1, \cdots, y_t]$ 中不为零，存在一个依赖于 $R, \eta_1, \cdots, \eta_t, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ 的整数 n_0，使当所有 $n \geqslant n_0$，

$$|R(p_{1n}/q_n, \cdots, p_{sn}/q_n, \varphi_1(p_{1n}/q_n), \cdots, \varphi_t(p_{tn}/q_n))| \geqslant \exp(-\phi(q_n)), \tag{1}$$

那么 t 个数 $\varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)$ 在 $\boldsymbol{Q}(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 上代数无关.

证. 设 $\varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)$ 在 $\boldsymbol{Q}(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 上代数相关. 于是存在一个含 t 个变量、系数在 $\boldsymbol{Z}[\eta_1, \cdots, \eta_s]$ 中的非零多项式 R_1 适合 $R_1(\varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)) = 0$. 记

$$R_1(y_1, \cdots, y_t) = \sum_{(i)} f_{(i)}(\eta_1, \cdots, \eta_s) y_1^{i_1} \cdots y_t^{i_t},$$

此处 $f_{(i)} \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s]$ 不在点 $(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 上全部同时为零. 我们还记

$$R(x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_t) = \sum_{(i)} f_{(i)}(x_1, \cdots, x_s) y_1^{i_1} \cdots y_t^{i_t},$$

那么 $R \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_t]$ 适合

$$R(\eta_1, \cdots, \eta_s, y_1, \cdots, y_t) = R_1(y_1, \cdots, y_t) \neq 0,$$
$$R(\eta_1, \cdots, \eta_s, \varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)) = 0.$$

因 $\|\eta_\nu q_n\| < \exp(-\phi(q_n))$，故当 n 充分大，$p_{\nu n}/q_n$ 不是 $\varphi_\nu(z)$ 的极点 $(1 \leqslant \nu \leqslant t)$. 且由 $p_{\nu n}$ 的定义知 $|p_{\nu n}/q_n| < |\eta_\nu| + 1/q_n$，故对充分大的 n，

$$|R(p_{1n}/q_n, \cdots, p_{sn}/q_n, \varphi_1(p_{1n}/q_n), \cdots, \varphi_t(p_{tn}/q_n))| \leqslant c_{10} q_n^{-1} \exp(-\phi(q_n)).$$

但由(1)式，当 $q_n \geqslant c_{10}$ 时上式不能成立. 定理得证.

注 1.1. 在定理 1.1 的假设下，如果 s 个数 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关，那么 $s+t$ 个数 $\eta_1, \cdots, \eta_s, \varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

推论 1.1. 在上述公共假设下，若对任何非零多项式 $R \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y_1, \cdots, y_t]$ 存在一个依赖于 $R, \eta_1, \cdots, \eta_t, \varphi_1, \cdots, \varphi_t$ 的整数 n_0，使(1)式对任何 $n \geqslant n_0$ 成立，则 $s+t$ 个数 $\eta_1, \cdots, \eta_s, \varphi_1(\eta_1), \cdots, \varphi_t(\eta_t)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

证. 只须在定理 1.1 中用 0 代替数 s，用 $s+t$ 代替数 t，并取 $s+t$ 个函数 $z, \cdots, z, \varphi_1(z), \cdots, \varphi_t(z)$ (其中函数 z 重复 s 次)，及 $s+t$ 个复数 $\eta_1, \cdots, \eta_s, \eta_1, \cdots, \eta_t$.

下列推论是本文主要工具:

推论 1.2. 在上述公共假设下，还设当 $1 \leqslant \nu \leqslant s$ 及 $1 \leqslant \mu \leqslant t$ 时，数 η_ν 不是函数 φ_μ 的极点.

(A) 如果对任何 $s(t+1)$ 变量多项式 $R \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y_{11}, \cdots, y_{1s}, \cdots, y_{t1}, \cdots, y_{ts}]$，存在整数 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时

$$|R(p_{1n}/q_n, \cdots, p_{sn}/q_n, \varphi_1(p_{1n}/q_n), \cdots, \varphi_1(p_{sn}/q_n), \cdots, \varphi_t(p_{1n}/q_n), \cdots, \varphi_t(p_{sn}/q_n))| \geqslant \exp(-\psi(q_n)), \tag{2}$$

那么 $s(t+1)$ 个数 $\eta_\nu, \varphi_\mu(\eta_\nu)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

(B) 如果对任何 $s(t+1)$ 变量多项式 $R \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_s, y_{11}, \cdots, y_{1s}, \cdots, y_{t1}, \cdots, y_{ts}]$, 且 $R(\eta_1, \cdots, \eta_s, y_{11}, \cdots, y_{1s}, \cdots, y_{t1}, \cdots, y_{ts})$ 在环 $\boldsymbol{Z}[\eta_1, \cdots, \eta_s][y_{11}, \cdots, y_{1s}, \cdots, y_{t1}, \cdots, y_{ts}]$ 中不为零,存在整数 n_0,使(2)式对所有 $n \geqslant n_0$ 成立,那么 st 个数 $\varphi_\mu(\eta_\nu)(1 \leqslant \nu \leqslant s, 1 \leqslant \mu \leqslant t)$ 在 $\boldsymbol{Q}(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 上代数无关. 因而若还设 s 个数 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关,则 $s(t+1)$ 个数 $\eta_\nu, \varphi_\mu(\eta_\nu)(1 \leqslant \nu \leqslant s, 1 \leqslant \mu \leqslant t)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

证. 考察 st 个函数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_1, \cdots, \varphi_t, \cdots, \varphi_t$, 其中每个 $\varphi_\mu(1 \leqslant \mu \leqslant t)$ 重复 s 次,以及 st 个复数 $\eta_1, \cdots, \eta_s, \cdots, \eta_1, \cdots, \eta_s$, 其中 s 一数组 $(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 重复 t 次. 于是由定理 1.1 得 (B),由推论 1.1 得 (A).

二、概念及预备性结果

1°. 若 α 是代数数,我们用 $h(\alpha)$ 表示 α 的绝对对数高(见文献[4], 第 IV 章,§1). 习知当 α 属于数域 $\boldsymbol{K}$,则

$$h(\alpha) = \frac{1}{[\boldsymbol{K}: \boldsymbol{Q}]} \sum_v d_v \log \max(1, |\alpha|_v),$$

其中 v 遍历 $\boldsymbol{K}$ 的规范化绝对值集合, d_v 是在 v 的局部次数. 于是乘法公式是 $\prod_v |\alpha|_v^{d_v} = 1$ $(\alpha \in \boldsymbol{K}, \alpha \neq 0)$.

我们用 $L(P)$ 表示复系数多项式 P 的长,即其系数绝对值之和,用 $H(P)$ 表示其高,即其系数绝对值中最大者. 我们有下列 Liouville 不等式:

引理 2.1. 设 $P \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_m]$, 关于 x_ν 的次数至多是 $N_\nu(1 \leqslant \nu \leqslant m)$. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是代数数, $\boldsymbol{Q}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上次数是 D. 那么或者 $P(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为零,或者

$$\log |P(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)| \geqslant -D \log L(P) - D \sum_{\nu=1}^{m} N_\nu h(\alpha_\nu).$$

2°. Kummer 理论(见文献[4],第 V 章,§4)中的一个结果.

引理 2.2. 设代数数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 乘性无关,则存在常数 $c_{20} > 0$ 仅与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 有关,具有下述性质: 若 $p_1, \cdots, p_n, q$ 是有理整数,且 p_ν 与 q 互素 $(1 \leqslant \nu \leqslant m)$, 又设 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是代数数,适合 $\beta_\nu^q = \alpha_\nu^{p_\nu}(1 \leqslant \nu \leqslant m)$. 则有

$$[\boldsymbol{Q}(\beta_1, \cdots, \beta_m):\boldsymbol{Q}] \geqslant c_{20} q^m.$$

证. 设 ζ_q 是本原单位根. 易见若复数 α, β, γ 适合 $\alpha^p = \beta^q$ 及 $\alpha = \gamma^q$, 其中 p, q 互素,则 $\boldsymbol{Q}(\zeta_q, \alpha, \beta) = \boldsymbol{Q}(\zeta_q, \gamma)$, 我们用 $\boldsymbol{Q}(\zeta_q, \alpha^{1/q})$ 记这个域. 由 Kummer 理论(见文献[4], p.113)知当 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 乘性无关时,

$$[\boldsymbol{Q}(\zeta_q, \alpha_1^{1/q}, \cdots, \alpha_m^{1/q}):\boldsymbol{Q}] \geqslant c_{21} q^m \varphi(q),$$

其中 c_{21} 与 q 无关, φ 是 Euler 函数, $[\boldsymbol{Q}(\zeta_q):\boldsymbol{Q}] = \varphi(q)$. 但 $\boldsymbol{Q}(\zeta_q, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_m) = \boldsymbol{Q}(\zeta_q, \alpha_1^{1/q}, \cdots, \alpha_m^{1/q})$, 故得引理.

3°. 超越性度量与逼近度量之关系(见文献[3], p.449).

引理 2.3. 设 $P\in \boldsymbol{Z}[x]$ 是次数 $\leqslant N$,高 $\leqslant H$ 的非常数多项式, $\omega\in \boldsymbol{C}$ 是任意复数,则存在一个代数数 ξ (其次数为 D)以及一个正整数 k, 适合

$$kD\leqslant N,\ h(\xi)\leqslant \frac{1}{kD}(\log H+\log N),$$

$$|\omega-\zeta|^k\leqslant 4^{N^2}(2NH)^N|P(\omega)|.$$

引理 2.4. 设 c_{22} 和 c_{23} 是两个正数. 则存在正数 c_{24} 有下列性质: 若 q 是正整数, $\boldsymbol{Q}\in \boldsymbol{Z}[x]$ 是次数 $\leqslant N$,高 $\leqslant H$ 的多项式,而且

$$c_{22}\log q\leqslant \log H+\log N\leqslant c_{23}\log q,$$

则有

$$|Q(e^{1/q})|\geqslant q^{-c_{24}N^2}.$$

证. 在此用 $c_{25},\cdots,c_{27}$ 表示与 q 无关的正数. 可设 $c_{22}\leqslant 1$. 还可认为 $c_{25}\leqslant q$; 因若 $q<c_{25}$, 则这种多项式 Q 个数有限,因而 $|Q(e^{1/q})|\geqslant c_{26}$.

由引理 2.3 可求得一个代数数 α 及正整数 k,使 α 的次数 $d\leqslant N/k$, 且 $h(\alpha)\leqslant \frac{c_{23}}{d}\log q$ 及

$$|e^{1/q}-\alpha|^k\leqslant 4^{N^2}(2NH)^N|Q(e^{1/q})|.$$

选取 c_{24} 使 $4^{N^2}(6NH)^N<q^{c_{24}N^2}$. 因此可认为 $|e^{1/q}-\alpha|<\frac{1}{3}$,于是(见文献[3],引理 2.4)存在 α 的对数的一个分支 $\log\alpha$ 适合 $\left|\frac{1}{q}-\log\alpha\right|\leqslant 2|e^{1/q}-\alpha|$. 在文献[3]的定理A中取

$D=d\leqslant N$, $V=c_{23}\frac{\log q}{q}$, $h(\beta)=\log q$, $E=q^{c_{22}}$,可得

$$\left|\frac{1}{q}-\log\alpha\right|\geqslant q^{-c_{27}N^2},$$

由此易得本引理.

4°. 令 $\phi(q)$ 是 q 的正函数,当 $q\to\infty$ 时 $\phi(q)/\log q\to\infty$. 我们称实数 η 是一个 ϕ-Liouville 数, 如果存在无穷多个正整数 q 适合 $0<\|\eta q\|<\exp(-\phi(q))$. 由引理 2.1 知这样的数在 $\boldsymbol{Q}$ 上超越.

设 s 是正整数. s-实数组$(\eta_1,\cdots,\eta_s)$称为一个 ϕ-Liouville 数组, 如果存在无穷多个正整数 q 适合 $0<\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant s}\|\eta_\nu q\|<\exp(-\phi(q))$. 于是每个 η_ν 或为有理数,或是一个 ϕ-Liouville 数(并且至少有一个非有理数). 此外,若还设 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关(或代数无关), 则称 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 是一个 ϕ-QLI Liouville 数组(或一个 ϕ-QAI Liouville 数组).

注. 如果 φ 是任一个 q 的正函数且当 $q\to\infty$ 时趋于无穷, 而 η 是一个实数,那么下列两个条件是等价的:

(i) 对每个常数 $C>0$ 存在一个正整数 q 适合

$$0<\|\eta q\|<\exp(-C\phi(q)).$$

(ii) 存在一个函数 τ, 当 $q\to\infty$ 时趋于无穷, 且若 $\phi=\varphi\tau$, 则 η 是一个 ϕ-Liouville 数.

三、应用 Kummer 理论得到的推论

定理 3.1. 设 m 是正整数，η 是一个 ϕ-Liouville 数，$\phi(q)=q^m(\log q)\tau(q)$. 设代数数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 乘性无关. 对 $1\leqslant j\leqslant m$，用 $\log\alpha_j$ 表示 α_j 的对数的任一分支. 那么 $m+1$ 个数 $\eta,\alpha_1^\eta,\cdots,\alpha_m^\eta$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

证. 在推论 1.4(A) 中取 $s=1$，$t=m$，$\varphi_\nu(z)=\alpha_\nu^z(1\leqslant\nu\leqslant m)$. 令

$$R(x,y_1,\cdots,y_m)=\sum_{(i)}f_{(i)}(x)y_1^{i_1}\cdots y_m^{i_m}$$

是 $\boldsymbol{Z}[x,y_1,\cdots,y_m]$ 中非零多项式，关于 y_ν 的次数为 d_ν，在上式求和号中 (i) 表示 $(i_1,\cdots,i_m)$ 且 $0\leqslant i_\nu\leqslant d_\nu(1\leqslant\nu\leqslant m)$. 设 R 关于 x 的次数是 d. 因 η 是 ϕ-Liouville 数，故存在正整序列 $0<q_1<\cdots<q_n<\cdots$ 适合 $\|\eta q_n\|<\exp(-\phi(q_n))(n\geqslant1)$. 取 $p_n\in\boldsymbol{Z}$ 适合 $\|\eta q_n\|=|\eta q_n-p_n|$. 定义 $\boldsymbol{Z}[y_1,\cdots y_m]$ 中的多项式序列

$$Q_n(y_1,\cdots,y_m)=q_n^dR(p_n/q_n,y_1,\cdots,y_m),$$

因 η 是超越数，对大的 n，$f_{(i)}(p_n/q_n)\neq0$，于是 $f_{(i)}\neq0$.

如果当 $1\leqslant\nu\leqslant m$，$d_\nu=0$，则 $Q_n(\alpha_1^{p_n/q_n},\cdots,\alpha_m^{p_n/q_n})=q_n^df_{(0)}(p_n/q_n)$ 是非零整数，因而

$$|R(p_n/q_n,\alpha_1^{p_n/q_n},\cdots,\alpha_m^{p_n/q_n})|\geqslant q_n^{-d}.$$

现设 $\max\limits_{1\leqslant\nu\leqslant m}d_\nu>0$. 因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 乘性无关，由引理 2.2 知 $Q_n(\alpha_1^{p_n/q_n},\cdots,\alpha_m^{p_n/q_n})\neq0$. 由引理 2.1，对大的 n，

$$L(Q_n)\leqslant\sum_{(i)}|f_{(i)}(p_n/q_n)|q_n^d\leqslant c_{30}q_n^d,$$

$$\sum_{\nu=1}^m d_\nu h(\alpha_\nu^{p_n/q_n})\leqslant c_{30},$$

$$[\boldsymbol{Q}(\alpha_1^{p_n/q_n},\cdots,\alpha_m^{p_n/q_n}):\boldsymbol{Q}]\leqslant c_{30}q_n^m.$$

因此得到

$$|R(p_n/q_n,\alpha_1^{p_n/q_n},\cdots,\alpha_m^{p_n/q_n})|\geqslant\exp(-c_{31}q_n^m\log q_n).$$

在两种情形中推论 1.2 的假设均成立，所以定理得证.

推论 3.1. 如果 η 是一个实数，对任何整数 $k>1$ 不等式 $0<|\eta-p/q|<q^{-q^k}$ 有无穷多个解 $p/q\in\boldsymbol{Q}$，那么数 $\eta,2^\eta,3^\eta,\cdots,l^\eta,\cdots$($l$是素数)在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

四、应用 $|\alpha^\beta-\gamma|$ 的下界得到的推论

定理 4.1. 设 m 是正整数，η 是 ϕ-Liouville 数，$\phi(q)=q^{4m+4}\tau(q)$. 设代数数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 乘性无关，α 和 β 是非零代数数. 对于 $1\leqslant j\leqslant m$，$\log\alpha_j$ 表示 α_j 的对数的任一分支，还设 $\log\alpha$ (及 $\log\beta$) 是 α (及 β)的非零对数. 那么 $m+2$ 个数 $\eta,\alpha_1^\eta,\cdots,\alpha_m^\eta,\alpha^{\beta^\eta}$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

证. 由于定理 3.1，只用证 α^{β^η} 在域 $\boldsymbol{Q}(\eta,\alpha_1^\eta,\cdots,\alpha_m^\eta)$ 上代数无关. 我们来验证推论 1.2(A) 中条件 (2)，其中 $s=1$，$t=m+1$，$\varphi_\nu(z)=\alpha_\nu^z(1\leqslant\nu\leqslant m)$，$\varphi_{m+1}(z)=\alpha^{\beta^z}$.

任取非零多项式 $R\in\boldsymbol{Z}[x,y_1,\cdots,y_{m+1}]$. 令 $0<q_1<\cdots<q_n<\cdots$ 是不等式

$\|\eta q\| < \exp(-\phi(q))$ 的解的无穷序列；令 $p_n \in \boldsymbol{Z}$ 适合 $\|\eta q_n\| = |\eta q_n - p_n|$. 必要时用 $-\eta$ 代 η（因而用 β^{-1} 代 β，$-\log\beta$ 代 $\log\beta$），可设对大的 n 有 $p_n > 0$. 记

$$R(x, y_1, \cdots, y_{m+1}) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x, y_1, \cdots, y_m) y_{m+1}^i,$$

其中 d 是 R 关于 y_{m+1} 的次数. 于是 f_d 是 $\boldsymbol{Z}[x, y_1, \cdots, y_m]$ 中的非零多项式.

令 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，$\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{Q}(\alpha_1^{1/q_n}, \cdots, \alpha_m^{1/q_n})$. 并设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{D_n}$ 是 $\boldsymbol{K}_n$ 到 $\boldsymbol{C}$ 中的 $\boldsymbol{K}$-同构. 定义 $\boldsymbol{K}[y]$ 中的多项式如下:

$$\prod_{\delta=1}^{D_n} \left(\sum_{i=0}^{d} q_n^{d_0} \sigma_\delta f_i(p_n/q_n, \alpha_1^{p_n/q_n}, \cdots, \alpha_m^{p_n/q_n}) y^i \right),$$

其中 d_0 是 R 关于 x 的次数. 显然这个多项式的系数属于环 $\boldsymbol{Z}[\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$. 将这多项式记作 $Q_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, y)$，其中 $Q_n \in \boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_m, y]$，它关于每个变量的次数至多是 $c_{40} q_n^m$，高至多是 $q_n^{c_{40} q_n^m}$.

设正整数 A 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的一个公分母，$\tau_1, \cdots, \tau_\Delta$ 是 $\boldsymbol{K}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 中的嵌入，那么

$$P_n(y) = A^{c_{41} q_n^m \Delta} \cdot \prod_{\delta=1}^{\Delta} \tau_\delta Q_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, y)$$

是 $\boldsymbol{Z}[y]$ 中的非零多项式，其次数 $\leqslant c_{42} q_n^m$，高 $\leqslant q_n^{c_{42} q_n^m}$. 现在来证明当 n 充分大，

$$|P_n(\alpha^{\beta^{p_n/q_n}})| \geqslant \exp(-c_{43} q_n^{4m+4}).$$

首先由 Gelfond-Schneider 定理，上式左边不为零（因 β^{p_n/q_n} 是代数无理数，$\log\alpha \neq 0$）. 把引理 2.3 应用于多项式 P_n 及 $\omega = \alpha^{\beta^{p_n/q_n}}$，可找到一个代数数 ξ_n 及整数 $k_n \geqslant 1$，适合 $[\boldsymbol{Q}(\xi_n): \boldsymbol{Q}] \leqslant c_{44} q_n^m / k_n$，$h(\xi_n) \leqslant c_{44} q_n^m (\log q_n)/k_n$ 及

$$|\alpha^{\beta^{p_n/q_n}} - \xi_n|^{k_n} \leqslant \exp(c_{45} q_n^{4m} \log q_n) \cdot |P_n(\alpha^{\beta^{p_n/q_n}})|.$$

此式与文献[3]的定理 B 所给出的 $|\beta^{p_n/q_n} \log\alpha - \log\xi_n|$ 的下界相结合（此处 $\log\xi_n$ 表示 ξ_n 的对数与 $\beta^{p_n/q_n}\log\alpha$ 最接近的那个分支），即得欲证的不等式.

现在还要注意

$$\left| \sum_{i=0}^{d} q_n^{d_0} f_i(p_n/q_n, \alpha_1^{(k_1) p_n/q_n}, \cdots, \alpha_m^{(k_m) p_n/q_n}) \alpha^{i\beta^{p_n/q_n}} \right| \leqslant c_{46} q_n^{d_0},$$

即可得到不等式

$$|R(p_n/q_n, \alpha_1^{p_n/q_n}, \cdots, \alpha_m^{p_n/q_n}, \alpha^{\beta^{p_n/q_n}})| > \exp(-c_{47} q_n^{4m+4}).$$

定理至此得证.

五、应用 $|e^{1/q} - \alpha|$ 的下界得到的推论

定理 5.1. 设 $(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 是 ϕ-QLI Liouville 数组，其中

$$\phi(q) = \begin{cases} (\log q)^2 (\log\log q)^{-1} \tau(q), & \text{当 } s = 1, \\ q^2 (\log q) \tau(q), & \text{当 } s > 1, \end{cases}$$

则数 $e^{\eta_1}, \cdots, e^{\eta_s}$ 在域 $\boldsymbol{Q}(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 上代数无关.

推论 5.1. 在定理 5.1 的假设下，如果 $(\eta_1, \cdots, \eta_s)$ 是 ϕ-QAI Liouville 数组，则 $2s$ 个数 $\eta_1, \cdots, \eta_s, e^{\eta_1}, \cdots, e^{\eta_s}$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

定理 5.1 之证． $s=1$ 的情形易由文献[3]的定理 6.1 得到． 现设 $s\geqslant 2$． 在推论 1.2 中取 $t=1$ 及 $\varphi(z)=e^z$． 设

$$R(x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s)=\sum_{(i)}f_{(i)}(x_1,\cdots,x_s)y_1^{i_1}\cdots y_s^{i_s}$$

是 $\boldsymbol{Z}[x_1,\cdots,x_s,y_1,\cdots,y_s]$ 中的多项式，且 $f_{(i)}(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 中至少有一个非零． 令 d_ν 是 R 关于 y_ν 的次数 $(1\leqslant\nu\leqslant s)$，$d$ 是 R 关于 $x_1,\cdots,x_s$ 的次数之和． 定义 q_n，$p_{\nu n}$ $(n\geqslant 1,1\leqslant\nu\leqslant s)$ 如前，于是 $|\eta_\nu q_n-p_{\nu n}|<\exp(-\phi(q_n))$． 不失一般性，可认为 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是正的；取 n 足够大，使 $p_{\nu n}$ 也是正的． 定义多项式 $Q_n\in\boldsymbol{Z}[y]$ 如下：

$$Q_n(y)=q_n^d\sum_{(i)}f_{(i)}(p_{1n}/q_n,\cdots,p_{sn}/q_n)y^{p_{1n}i_1+\cdots+p_{sn}i_s}.$$

我们断言，当 n 充分大且 $(i)\neq(i')(0\leqslant i_\nu,i'_\nu\leqslant d_\nu,1\leqslant\nu\leqslant s)$ 时，$p_{1n}i_1+\cdots+p_{sn}i_s\neq p_{1n}i'_1+\cdots+p_{sn}i'_s$． 设不然，则因 d_ν 与 n 无关，从而有两个不同的 s-数组 (i) 和 (i')，使对无穷多个 n 有 $p_{1n}i_1+\cdots+p_{sn}i_s=p_{1n}i'_1+\cdots+p_{sn}i'_s$，从而 $(i_1-i'_1)\eta_1+\cdots+(i_s-i'_s)\eta_s=0$． 这与 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 的线性无关性矛盾．

由于 $R(\eta_1,\cdots,\eta_s,y_1,\cdots,y_s)$ 在环 $\boldsymbol{Z}[\eta_1,\cdots,\eta_s][y_1,\cdots,y_s]$ 中非零，因此 $Q_n(y)$ 是 $\boldsymbol{Z}[y]$ 中非零元． 注意 $\deg Q_n\leqslant c_{50}q_n$，$\log L(Q_n)\leqslant c_{50}\log q_n$，由引理 2.4 可得

$$|Q_n(e^{1/q_n})|>\exp(-c_{51}q_n^2\log q_n),$$

因此当 n 充分大，

$$|R(p_{1n}/q_n,\cdots,p_{sn}/q_n,e^{p_{1n}/q_n},\cdots,e^{p_{sn}/q_n})|>\exp(-c_{52}q_n^2\log q_n),$$

于是由推论 1.2 得到本定理．

定理 5.2． 设 m 和 s 是正整数，$(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 是一个 ϕ-QLI Liouville 数组，其中

$$\phi(q)=\begin{cases}q^{3m}(\log q)\tau(q), & \text{当 } s=1,\\ q^{3m+2}(\log q)\tau(q), & \text{当 } s\geqslant 2.\end{cases}$$

又设代数数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 乘性无关． 则 $s(m+1)$ 个数 $\alpha_\mu^{\eta_\nu}$，$e^{\eta_\nu}(1\leqslant\mu\leqslant m,1\leqslant\nu\leqslant s)$ 在域 $\boldsymbol{Q}(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 上代数无关．

推论 5.2． 在定理 5.2 的假定下，如果 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 是一个 ϕ-QAI Liouville 数组，则 $s(m+2)$ 个数 η_ν，$\alpha_\mu^{\eta_\nu}$，$e^{\eta_\nu}(1\leqslant\mu\leqslant m,1\leqslant\nu\leqslant s)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关．

定理 5.2 之证． 在推论 1.2 中取 $t=m+1$，$\varphi_\mu(z)=\alpha_\mu^z(1\leqslant\mu\leqslant m)$，$\varphi_{m+1}(z)=e^z$． 采取定理 4.1 的证法． 设若推论 1.2 的条件不被满足，则对每个大的 n，可构造一个非零多项式 $P_n(y)$，其次数 $\leqslant c_{53}q_n^m$（当 $s=1$），或 $\leqslant c_{53}q_n^{m+1}$（当 $s\geqslant 2$），其高 $\leqslant q_n^{c_{54}q_n^m}$，并且当 $\theta_n=e^{p_n/q_n}$（若 $s=1$），或 e^{1/q_n}（若 $s\geqslant 2$）时，有不等式

$$|P_n(\theta_n)|\leqslant\exp(-c_{55}\phi(q_n)),$$

但由引理 2.3，这与文献[3]的定理 A 矛盾． 证毕．

注 5.1． 我们还可证明数 $\exp(\eta_\nu\beta_\mu)(1\leqslant\nu\leqslant s,1\leqslant\mu\leqslant m)$ 在 $\boldsymbol{Q}(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 上的代数无关性，其中 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是 $\boldsymbol{Q}$-线性无关的代数数，$(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 是某个 QLI Liouville 数组． 更一般，可得到数

$\alpha_\rho^{\eta_\nu}$，$\exp(\eta_\nu\beta_\mu)$，$\exp\gamma_\theta(1\leqslant\nu\leqslant s,1\leqslant\rho\leqslant t,1\leqslant\mu\leqslant m,1\leqslant\theta\leqslant u)$ 的 $\boldsymbol{Q}(\eta_1,\cdots,\eta_s)$-代数无关性，其中 $(\eta_1,\cdots,\eta_s)$ 是某个 QLI Liouville 数组，$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是乘性无关的代数

数，$\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是 $\boldsymbol{Q}$-线性无关的代数数，$\gamma_1, \cdots, \gamma_u$ 也是 $\boldsymbol{Q}$-线性无关的代数数.

前面的结果还可扩充到另外一些 Liouville 型的数上去，例如，可用次数有界的代数数很好逼近的复数(参考，例如，文献[3]的定理 6.2).

六、椭圆情形的一个例子

在前面的研究中，可以用具有代数不变量的 Weierstrass 椭圆函数 $\wp$ 来代替指数函数. 作为例子，现在给出定理 4.1 的椭圆类似.

定理 6.1. 设 m 是正整数，η 是 ϕ-Liouville 数，其中 $\phi(q) = q^{7m+6}\tau(q)$. 又设 $\wp$ 是 Weierstrass 椭圆函数，它满足微分方程

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

其中 g_2, g_3 是代数数. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是乘性无关的代数数，β 是非零代数数，$\log\beta$ 是其非零对数，u 是非零复数. 对 $1 \leqslant j \leqslant m$，用 $\log\alpha_j$ 表示 α_j 的对数的任一分支，并设或 u 是 $\wp$ 的极点，或 $\wp(u)$ 是代数数. 那么 $\beta^\eta u$ 不是 $\wp$ 的极点，并且 $m+2$ 个数 $\eta, \alpha_1^\eta, \cdots, \alpha_m^\eta$, $\wp(\beta^\eta u)$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关.

证. 先证 $\beta^\eta u$ 不是 $\wp$ 的极点. 设不然，令 $\omega = \beta^\eta u$ 是 $\wp$ 的一个周期. 由文献[5]的定理 1.1，其中取 $d_1 = 0, d_2 = 2, V_1 = V_2 = c_{60}, \log B = c_{60}\log D, D = c_{60}q$, $\log E = c_{61}\log D$，我们得到

$$|\beta^{p/q}u - \omega| > \exp(-c_{62}q^6(\log q)^{-1}),$$

但由 $\phi(q)$ 的选取，我们得到矛盾结果，因而 $\beta^\eta u$ 不能是 $\wp$ 的极点.

依定理 3.1，$\eta, \alpha_1^\eta, \cdots, \alpha_m^\eta$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关. 在推论 1.4 中取 $s=1$，$t = m+1$，$\varphi_\mu(z) = \alpha_\mu^z (1 \leqslant \mu \leqslant m)$，$\varphi_{m+1}(z) = \wp(\beta^z u)$. 用定理 4.1 的证法可得到非零多项式 $Q \in \boldsymbol{Z}[x]$，其次数至多是 $c_{63}q^m$，高不超过 $\exp(c_{63}q^m \log q)$. 现证

$$|Q(\wp(\beta^{p/q}u))| \geqslant \exp(-c_{64}q^{7m+6}).$$

为此应用引理 2.3，可得正整数 k 及代数数 γ，其次数 $D \leqslant c_{65}q^m/k$，并适合

$$|\gamma - \wp(\beta^{p/q}u)|^k \leqslant |Q(\wp(\beta^{p/q}u))| \cdot \exp(c_{66}q^{2m}\log q).$$

我们设 $v \in \boldsymbol{C}$ 是适合 $\wp(v) = \gamma$ 的一个复数，再次应用文献[5]的定理 1.1，其中取 $d_1 = 0$，$d_2 = 2$，$V_1 = c_{67}$，$\log B = c_{67}\log q$，$V_2 = c_{67}q^m(\log q)/k$，$\log E = c_{68}\log q$，可得

$$|\beta^{p/q}u - v|^k > \exp(-c_{69}q^{7m+6}).$$

由上面两个不等式即可导出所要的结果. 于是定理得证.

参 考 文 献

[1] Mordoukhay-Boltovskoy, D., *C. R. (Doklady) Akad. Nauk S. S. S. R. (N. S.)*, 52(1946), 483—486.
[2] Popken, J., *Math. Reviews*, 8(1948), #317g.
[3] Waldschmidt, M., *J. Austral. Math. Soc., Ser.*, 25(1978), 445—478.
[4] Lang, S., *Elliptic Curves Diophantine Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1978.
[5] Phillippon, P. & Waldschmidt, M., *Proc. Conf. Québbec*, July 1987, 1—8.