中国科学: 数学　2020 年　第 50 卷　第 6 期: 829～846
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

自由交换 Nijenhuis 代数上的左余单位 Hopf 代数结构

郑上华[1]，郭锂[1,2*]

1. 江西师范大学数学与信息科学学院, 南昌 330022;
2. Department of Mathematics and Computer Science, Rutgers University, Newark, NJ 07102, USA
E-mail: zheng2712801@163.com, liguo@rutgers.edu

收稿日期: 2017-09-27; 接受日期: 2019-02-15; 网络出版日期: 2019-05-15; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11601199 和 11771190)、江西省教育厅科技研究 (批准号: GJJ160336) 和国家留学基金 (批准号: 201708360057) 资助项目

摘要　本文基于自由交换 Rota-Baxter 代数上的 Hopf 代数结构, 探讨自由交换 Nijenhuis 代数上的 Hopf 代数相关结构; 借助于上闭链 (cocycle) 条件证明左余单位双代数 (即不满足右余单位性) 上的自由交换 Nijenhuis 代数具有左余单位双代数结构. 本文获得更具一般性的结论, 连通分次左余单位双代数是左余单位右对极 Hopf 代数, 即其对极只是右侧的. 由此证明连通左余单位双代数上的自由交换 Nijenhuis 代数是连通且分次的, 从而, 它是左余单位右对极 Hopf 代数.

关键词　Nijenhuis 代数　双代数　左余单位双代数　连通双代数　左余单位右对极 Hopf 代数

MSC (2010) 主题分类　16W99, 16W30, 08B20

1 引言

Nijenhuis 算子在 Lie 代数 Nijenhuis 扭曲概念及 20 世纪 50 年代 Nijenhuis [1] 的伪复流形研究中首次出现. Nijenhuis 算子的一个重要意义是 Nijenhuis 算子能够生成一个 Lie 代数的平凡无穷小形变. 此外, 在文献 [2] 中, Lie 代数上的 Nijenhuis 算子在非线性演化方程研究中发挥重要作用, 且出现于 Poisson-Nijenhuis 流形、经典 Yang-Baxter 方程和 Poisson 结构等方向 (参见文献 [3–6]). 最近, 学者们在 n-Lie 代数、可积系统、Hom-Lie 代数和可积层次结构及辛场论领域对 Nijenhuis 算子进行了研究 (参见文献 [7–10]).

令 P 是结合代数 R 上的一个线性算子. 若 P 满足 Nijenhuis 方程

$$P(x)P(y) = P(P(x)y) + P(xP(y)) - P^2(xy), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

英文引用格式: Zheng S H, Guo L. Left counital Hopf algebra structures on free commutative Nijenhuis algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 829–846, doi: 10.1360/SCM-2017-0662

　

则称 P 是 R 上的 Nijenhuis 算子. 为了研究量子双 Hamilton 系统, Cariñena[11] 等引进了结合代数上的 Nijenhuis 算子. 在文献 [12] 中, 通过与 Poisson-Nijenhuis 几何的类比构造出 Nijenhuis 算子, 它可看成是相对 Rota-Baxter 算子. 文献 [13–15] 研究了其与 dendriform 型代数的关系.

Nijenhuis 算子与权为 λ (其中 λ 是一个常量) 的 Rota-Baxter 算子有着密切的联系, 而后者是由 Rota-Baxter 方程

$$P(x)P(y)=P(P(x)y)+P(xP(y))+\lambda P(xy),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \tag{1.2}$$

定义的. 基于 Baxter[16] 的概率研究, Cartier[17] 和 Rota[18] 研究了 Rota-Baxter 算子, 它与经典 Yang-Baxter 方程的算子形式密切相关 (参见文献 [19,20]). 在过去二十年中, 数学家们对它的深入研究发现了其在数学和物理学中的广泛应用, 最引人注目的是 Connes 和 Kreimer 在量子场论重整化方面的工作 (参见文献 [21–23]). 更多相关内容可参见文献 [24].

Nijenhuis 代数的理论发展与 Rota-Baxter 代数的理论发展是平行的. 例如, 当文献 [25, 26] 给出自由交换和非交换 Rota-Baxter 代数的构造后, 文献 [13, 14, 27] 给出了自由交换和非交换 Nijenhuis 代数的构造. 在文献 [28] 中有关算子等式分类的 Rota 问题背景下, 文献 [29] 研究了 Nijenhuis 算子, 它可看成 Rota-Baxter 型算子之一.

一个代数的重要性和对它的理解通常是借助于这个代数上的双代数或 Hopf 代数结构来实现的. 本文利用研究 Rota-Baxter 代数的思想, 探索自由交换 Nijenhuis 代数的 Hopf 代数结构.

在各类范畴中的自由对象或一般构造往往多是 Hopf 代数, 如交换和非交换多项式代数. 根据文献 [30, 31] 中的结论, 在任意具有凝聚 (coherent) 单位作用下的代算 (operad) 且是简化 (即它以恒等算子的多重复合作为唯一的一元运算) 的自由对象自然地有一个 Hopf 代数结构. 尽管这个结果覆盖了多类 Hopf 代数, 如洗牌 (shuffle) 代数、拟洗牌代数和 Loday-Ronco 根数代数, 但它并不适用非简化代算代数, 如微分代数、Rota-Baxter 代数和 Nijenhuis 代数. 实际上, 除简化的代算以外, 所知甚少. 因此应该研究一些熟知的算子代数, 以便了解非简化代算的自由对象与 Hopf 代数之间的关系.

自由 (交换) 微分代数天然有一个 Hopf 代数结构, 因为它们仅仅是微分变量上的 (交换) 多项式代数. 在除幂代数、洗牌代数和拟洗牌代数与 Rota-Baxter 代数的密切关系推动下, 在自由交换 Rota-Baxter 代数上发现了 Hopf 代数结构 (参见文献 [32–34]). 近年来, 郭锂等利用类似于 Connes 和 Kreimer[35] 根数 Hopf 代数的上闭链性质, 得到了自由 (非交换) Rota-Baxter 代数上的 Hopf 代数结构[36].

鉴于它们与 Rota-Baxter 代数相似, 在自由 Nijenhuis 代数上寻找一个 Hopf 代数结构是自然的. 本文的目的是, 在自由交换 Nijenhuis 代数情形下实现这一点. 对于非交换情形, 处理方法与本文一致, 可参见文献 [37]. 后来发现, 本文所得到的 Hopf 代数并不是一个通常意义下的 Hopf 代数, 而是仅有左余单位右对极的 Hopf 代数. 有趣的是, 在量子群和组合研究中均出现了相关结构 (参见文献 [38–41]). 在这两个研究方向中, 在第一个方向里虽然只有单侧对极是可任选的, 却使用了术语单侧 Hopf 代数; 而在第二个方向里, 单侧对极和另一侧单位都是任选的. 为了区分这些概念和本文的构造, 将引入左余单位双代数和左余单位 Hopf 代数. 因此, 文献 [40, 41] 中的单侧 Hopf 代数都属于本文引进的左余单位 Hopf 代数. 有关其他带有宽松条件的 Hopf 代数, 参见文献 [42–44]. 本文的构造为进一步研究各类弱化形式的 Hopf 代数提供了动力. 同时研究诸如文献 [29] 所列的其他 Rota-Baxter 型代数上的 Hopf 代数结构将是有趣的.

本文余下内容结构如下. 第 2 节回顾由洗牌积的推广形式给出的自由交换 Nijenhuis 代数, 并从一个特例出发讨论一组合等式. 第 3 节构建自由交换 Nijenhuis 代数上的左余单位双代数结构. 第 4

节首先将经典结论 (即连通分次双代数是一个 Hopf 代数) 推广到左余单位情形. 然后证明自由交换 Nijenhuis 代数上的左余单位双代数是分次连通的, 从而得到一个左余单位 Hopf 代数.

在本文中, 如不特别指出, $\mathbf{k}$ 是有单位元的交换环. 所有代数是指 $\mathbf{k}$ 上有单位元的交换代数. 线性映射和张量积均是指 $\mathbf{k}$ 上的.

2 自由交换 Nijenhuis 代数

本节回顾 Nijenhuis 代数定义和通过右移洗牌积给出自由交换 Nijenhuis 代数的构造, 可参见文献 [27]. 然后考虑自由交换 Nijenhuis 代数的一个特例.

2.1 交换代数上的自由交换 Nijenhuis 代数

定义 2.1 Nijenhuis 代数是指一个带有线性算子 P 且满足 Nijenhuis 方程 (1.1) 的结合代数 R. 称 P 为 R 上的 Nijenhuis 算子. Nijenhuis 代数 (R,P) 到 Nijenhuis 代数 (S,Q) 的同态是指一个代数同态 $f: R\to S$, 且满足 $fP=Qf$.

现在回顾交换代数上的自由交换 Nijenhuis 代数的定义和构造.

定义 2.2 令 A 是交换代数. A 上的自由交换 Nijenhuis 代数是一交换 Nijenhuis 代数 $(F_{\mathrm{N}}(A), N_A)$ 和一代数同态 $j_A: A\to F_{\mathrm{N}}(A)$, 使得对于任意的交换 Nijenhuis 代数 (R,P) 和任意的代数同态 $f: A\to R$, 存在唯一 Nijenhuis 代数同态 $\bar{f}: F_{\mathrm{N}}(A)\to R$ 满足 $f=\bar{f}\circ j_A$, 即下图可交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, "f"'] & F_{\mathrm{N}}(A) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & R. \end{tikzcd}$$

对于给定的有单位元 1_A 的交换代数 A, 下面将在 $\mathbf{k}$- 模

$$\overrightarrow{Ш}(A) := \bigoplus_{n\geqslant 1} A^{\otimes n}$$

构建 Nijenhuis 代数结构, 其中 $A^{\otimes n}$ 是指 A 的 n 次张量.

首先定义 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 上的右移算子

$$P_r: \overrightarrow{Ш}(A)\to \overrightarrow{Ш}(A),\quad P_r(\mathfrak{a}) = 1_A\otimes \mathfrak{a},\quad \forall\, \mathfrak{a}\in A^{\otimes n},\quad n\geqslant 1.$$

然后定义 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 上的乘法如下.

对于 $\mathfrak{a}=a_1\otimes\cdots\otimes a_m\in A^{\otimes m}$ 和 $\mathfrak{b}=b_1\otimes\cdots\otimes b_n\in A^{\otimes n}$, 若 $m\geqslant 2$, 则记 $\mathfrak{a}'=a_2\otimes\cdots\otimes a_m$. 若 $n\geqslant 2$, 则记 $\mathfrak{b}'=b_2\otimes\cdots\otimes b_n$. 因此, $\mathfrak{a}=a_1\otimes\mathfrak{a}'$ 和 $\mathfrak{b}=b_1\otimes\mathfrak{b}'$. 按如下递归方式定义 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 上的乘法 $\diamond_r$:

$$\mathfrak{a}\diamond_r\mathfrak{b} = \begin{cases} a_1b_1, & m=n=1,\\ a_1b_1\otimes\mathfrak{b}', & m=1,\quad n\geqslant 2,\\ a_1b_1\otimes\mathfrak{a}', & m\geqslant 2,\quad n=1,\\ a_1b_1\otimes(\mathfrak{a}'\diamond_r(1\otimes\mathfrak{b}')+(1\otimes\mathfrak{a}')\diamond_r\mathfrak{b}'-1\otimes(\mathfrak{a}'\diamond_r\mathfrak{b}')), & m,n\geqslant 2,\end{cases} \tag{2.1}$$

或者, 可按如下方式定义:

$$\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} = a_1 b_1 \otimes (\mathfrak{a}' ш_r \mathfrak{b}'),$$

其中 $ш_r$ 是文献 [27] 中定义的右移洗牌积. 由于后续没有用到右移洗牌积, 这里不再回顾它的精确定义.

令

$$j_A : A \to \overrightarrow{Ш}(A), \quad a \mapsto a$$

是一个自然嵌入, 则

$$j_A(ab) = ab = a \diamond_r b = j_A(a) \diamond_r j_A(b), \quad \forall\, a, b \in A.$$

因此, j_A 是一个代数同态.

定理 2.1 [27] 令 A 是一个带有单位元 1_A 的交换代数. 令 $\overrightarrow{Ш}(A)$、P_r、$\diamond_r$ 和 j_A 如上所述, 则下列结论成立:

(1) 三元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, P_r)$ 是一个交换 Nijenhuis 代数;

(2) 四元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, P_r, j_A)$ 是 A 上的自由交换的 Nijenhuis 代数.

2.2 特殊情形

设 X 是一个非空集合, $A = \mathbf{k}[X]$, 则 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{Ш}(\mathbf{k}[X])$ 是 X 上的自由交换 Nijenhuis 代数. 现在令 $A = \mathbf{k}$, 则可得自由交换 Nijenhuis 代数

$$\overrightarrow{Ш}(\mathbf{k}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbf{k}^{\otimes (n+1)}.$$

用 1 作为 $\mathbf{k}$ 的单位元 $1_{\mathbf{k}}$ 的缩写. 由于张量积是在 $\mathbf{k}$ 上的, 利用双线性性可得, 对于所有的 $n \geqslant 0$, 有 $\mathbf{k}^{\otimes (n+1)} = \mathbf{k}1^{\otimes (n+1)}$. 于是,

$$\overrightarrow{Ш}(\mathbf{k}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbf{k}1^{\otimes (n+1)}. \tag{2.2}$$

因此, $\overrightarrow{Ш}(\mathbf{k})$ 是以 $\{1^{\otimes n}, n \geqslant 1\}$ 为基的自由 $\mathbf{k}$- 模.

命题 2.1 对于任意自然数 m 和 n, 有

$$1^{\otimes (m+1)} \diamond_r 1^{\otimes (n+1)} = 1^{\otimes (m+n+1)}. \tag{2.3}$$

证明 通过对 $m+n \geqslant 0$ 归纳证明 (2.3). 当 $m+n=0$ 时, $m=n=0$. 于是, 由 $\diamond_r$ 的定义可得 $1 \diamond_r 1 = 1$. 设 $k \geqslant 0$, 假设对所有的 $m+n \leqslant k$, (2.3) 已经成立. 设 $m+n=k+1$, 则 $m \geqslant 1$ 或 $n \geqslant 1$. 如果 m 或 n 其中一个为 0, 那么通过 (2.1), 可得 $1^{\otimes (m+1)} \diamond_r 1^{\otimes (n+1)} = 1^{\otimes (m+n+1)}$. 如果 m 和 n 两者都不为 0, 那么根据 (2.1) 和归纳假设, 有

$$\begin{aligned}
1^{\otimes (m+1)} \diamond_r 1^{\otimes (n+1)} &= 1 \otimes (1^{\otimes m} \diamond_r 1^{\otimes (n+1)} + 1^{\otimes (m+1)} \diamond_r 1^{\otimes n} - 1 \otimes (1^{\otimes m} \diamond_r 1^{\otimes n})) \\
&= 1 \otimes (1^{\otimes (m+n)} + 1^{\otimes (m+n)} - 1 \otimes 1^{\otimes (m+n-1)}) \\
&= 1^{\otimes (m+n+1)}.
\end{aligned}$$

证毕. □

注意到 (1.1) 中定义的 Nijenhuis 算子可以看成是把 Rota-Baxter 算子定义 (1.2) 中的 λ 换成 $-P$ 得到的. 实际上, 自由交换 Nijenhuis 代数的构造与 A 上权为 λ 的自由交换 Rota-Baxter 代数 $\text{Ш}_{\mathbf{k}}(A) := (\text{Ш}(A), P_A, \diamond_\lambda)$ 构造相似 (参见文献 [24, 第 3 章, 定理 3.2.1]). 令 $A = \mathbf{k}$, 则 $(\text{Ш}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}), P_{\mathbf{k}}, \diamond_\lambda)$ 是 $\mathbf{k}$ 上权为 λ 的自由交换 Rota-Baxter 代数. 当 $A = \mathbf{k}$ 时, $\text{Ш}(A)$ 的模结构为

$$\text{Ш}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathbf{k}1^{\otimes(n+1)}$$

且乘法 $\diamond_\lambda$ 由如下方程给出:

$$1^{\otimes(m+1)} \diamond_\lambda 1^{\otimes(n+1)} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n-k}{m}\binom{m}{k}\lambda^k 1^{\otimes(m+n+1-k)}, \quad \forall\, m,n \geqslant 0. \tag{2.4}$$

由于 Nijenhuis 算子是形式上把 Rota-Baxter 算子中的 λ 替换成 $-P$ 而成, 如果那么做, 则上述方程中的 λ^k 可以替换成 $(-1)^k P^k$, 从而可得自由 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$ 的相应公式, 即

$$\begin{aligned}1^{\otimes(m+1)} \diamond_r 1^{\otimes(n+1)} &= \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n-k}{m}\binom{m}{k}(-1)^k P_r^k(1^{\otimes(m+n+1-k)})\\ &= \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \binom{m+n-k}{m}\binom{m}{k}(-1)^k 1^{\otimes(m+n+1)},\end{aligned}$$

其中 $P_r(1^{\otimes \ell}) = 1^{\otimes(\ell+1)}$. 与 (2.3) 比较, 可得等式

$$\sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} (-1)^k \binom{m+n-k}{m}\binom{m}{k} = 1.$$

这实际上是一个组合恒等式, 它与量子场论中的概率分布有关. 在不失一般性的假设 $m \geqslant n$ 下, 通过确定幂级数展开式

$$(1-x)^n(1-x)^{-n-1} = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

中的 x^m 的系数可证明该公式, 参见文献 [45]. 同时也可利用枚举 stuffles 积来证明该公式 (参见文献 [24]).

本节最后, 赋予 $\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$ 一个 Hopf 代数结构. 记 $u_n := 1^{\otimes(n+1)}$, $n \geqslant 0$. 通过 (2.3) 可得

$$u_n \diamond_r u_m = u_{m+n}, \quad \forall\, m,n \geqslant 0.$$

因此, $(\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k}), \diamond_r)$ 是由 u_1 $(= 1^{\otimes 2})$ 生成的自由交换代数 (即多项式代数) $\mathbf{k}[u_1]$. 利用自由交换代数的泛性质可知, $\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$ 有唯一一个双代数结构, 其中余乘为

$$\Delta(u_n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i \otimes u_{n-i},$$

余单位为

$$\varepsilon(u_0) = 1, \quad \varepsilon(u_n) = 0, \quad n \geqslant 1.$$

定义线性映射 $u : \mathbf{k} \to \overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$, $c \mapsto c$, 对于所有的 $c \in \mathbf{k}$.

定理 2.2 设 $\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$、$\diamond_r$、$u$、$\Delta$ 和 ε 如上所述, 则下列结论成立:

(1) 双代数 $(\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k}), \diamond_r, u, \Delta, \varepsilon)$ 是一个二项 Hopf 代数, 其对极为

$$S : \overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k}) \to \overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k}), \quad u_n \mapsto (-1)^n u_n, \quad n \geqslant 0.$$

(2) 自由交换 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(\mathbf{k})$ 是一个 Hopf 代数.

下一节将考虑将此结论推广到其他自由 Nijenhuis 代数.

3 自由交换 Nijenhuis 代数上的左余单位双代数结构

令 $A := (A, m_A, \mu_A, \Delta_A, \varepsilon_A)$ 是一个左余单位双代数. 本节将赋予自由交换 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 左余单位双代数结构. 首先利用上闭链性质构造自由交换 Nijehuis 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A) := (\overrightarrow{\text{Ш}}(A), \diamond_r, P_r)$ 上的余乘. 然后定义 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 上的余单位. 下一节将考虑左余单位 Hopf 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 的性质.

3.1 上闭链条件下的余乘

首先通过定义自由交换 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 上的余乘和余单位来构造 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 上左余单位余代数. 然后证明其余结合性和左余单位性.

首先介绍带有左余单位的算子双代数和上闭链双代数的概念.

定义 3.1 (1) 左余单位余代数是一个三元组 (H, Δ, ε), 其中 H 是一个 $\mathbf{k}$- 模, 线性映射 $\Delta : H \to H \otimes H$ 满足余结合性, 称为余乘; 线性映射 $\varepsilon : H \to \mathbf{k}$ 满足左余单位性: $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \beta_\ell$, 称为左余单位, 其中 $\beta_\ell : H \to \mathbf{k} \otimes H$, $u \mapsto 1 \otimes u$, 对于所有的 $u \in H$.

(2) 左余单位算子双代数是一个六元组 $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon, P)$, 其中 (H, Δ, ε) 是一个左余单位余代数, 四元组 (H, m, μ, P) 是一个算子代数, 即 (H, m, μ) 是一个带有线性算子 $P : H \to H$ 的结合代数, Δ 和 ε 都是代数同态.

(3) 左余单位上闭链双代数是一个左余单位算子双代数 $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon, P)$, 满足上闭链条件[1]:

$$\Delta P = (\mathrm{id} \otimes P)\Delta. \tag{3.1}$$

任何双代数均是左余单位双代数. 举一个简单的左余单位双代数但又不是双代数的例子. 在 $\mathbf{k}[x]$ 上定义余乘 $\Delta(u) = 1 \otimes u$ $(u \in \mathbf{k}[x])$ 和左余单位 $\varepsilon : \mathbf{k}[x] \to \mathbf{k}$, $\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(1) = 1$. 容易验证, 除了右余单位性: $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \beta_r$, 其中 $\beta_r : \mathbf{k}[x] \to \mathbf{k}[x] \otimes \mathbf{k}$, $u \mapsto u \otimes 1$ 外, 其满足双代数的所有条件. 例如, 由于

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(x) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(1 \otimes x) = 1 \otimes 0 = 0 \neq x \otimes 1,$$

因此, 右余单位性不成立.

注意到张量积 $\overrightarrow{\text{Ш}}(A) \otimes \overrightarrow{\text{Ш}}(A)$ 仍是一个结合代数, 其乘法记为 $\bullet$. 现定义余乘

$$\Delta_T : \overrightarrow{\text{Ш}}(A) \to \overrightarrow{\text{Ш}}(A) \otimes \overrightarrow{\text{Ш}}(A).$$

对于每个纯张量 $\mathfrak{a} := a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$, $n \geqslant 1$, 对于 $n \geqslant 1$ 用数学归纳法定义 Δ_T. 当 $n = 1$, 即 $\mathfrak{a} = a_1 \in A$, 定义 $\Delta_T(\mathfrak{a}) := \Delta_A(a_1)$, 其中 Δ_A 为 A 上的余乘. 假设对于 $n \geqslant 1$, 余乘 Δ_T 已定义. 设

1) 上闭链条件 $\Delta P = P \otimes 1 + (\mathrm{id} \otimes P)\Delta$, 被用于构造自由 Rota-Baxter 代数上 Hopf 代数结构 [36], 但它不适用于自由 Nijenhuis 代数.

$\mathfrak{a} \in A^{\otimes(n+1)}$, 则 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes \mathfrak{a}'$, 其中 $\mathfrak{a}' := a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$. 根据 (2.1), 可得

$$a_1 \otimes \mathfrak{a}' = a_1 \diamond_r (1_A \otimes \mathfrak{a}') = a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}'). \tag{3.2}$$

首先定义

$$\Delta_T(1_A \otimes \mathfrak{a}') = (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}'). \tag{3.3}$$

然后定义

$$\Delta_T(a_1 \otimes \mathfrak{a}') = \Delta_A(a_1) \bullet \Delta_T(1_A \otimes \mathfrak{a}') \ (= \Delta_A(a_1) \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}')). \tag{3.4}$$

由于 $\mathfrak{a}'$ 属于 $A^{\otimes n}$, 根据归纳假设可知, (3.3) 中的 $\Delta_T(\mathfrak{a}')$ 是良好定义的. 因此, $\Delta_T(\mathfrak{a})$ 是良好定义的. 另外, Δ_T 的定义也可改写成如下:

$$\Delta_T(\mathfrak{a}) = \Delta_A(a_1) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)(\Delta_A(a_2) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)(\cdots \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_A(a_n)))))). \tag{3.5}$$

例 3.1　注意到 $\mathbf{k}$- 代数 $\mathbf{k}$ 天然有一个双代数结构, 其中余乘 $\Delta_{\mathbf{k}}$ 和余单位 $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 的定义分别为

$$\Delta_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \to \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad c \mapsto c \otimes 1 \quad 和 \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \to \mathbf{k}, \quad c \mapsto c, \quad \forall\, c \in \mathbf{k},$$

则 $\mathbf{k}$ 也是一个左余单位双代数. 由 (2.2) 得出

$$\overrightarrow{Ш}(\mathbf{k}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbf{k} 1^{\otimes(n+1)}.$$

对于每个 $c_i \in \mathbf{k}, 1 \leqslant i \leqslant 3$, 根据 (3.5) 中的 Δ_T 定义可知,

$$\begin{aligned}
\Delta_T(c_1 \otimes c_2 \otimes c_3) &= \Delta_{\mathbf{k}}(c_1) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)(\Delta_{\mathbf{k}}(c_2) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_{\mathbf{k}}(c_3)))) \\
&= \Delta_{\mathbf{k}}(c_1) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)((c_2 \otimes 1) \bullet (c_3 \otimes 1^{\otimes 2}))) \\
&= \Delta_{\mathbf{k}}(c_1) \bullet ((\mathrm{id} \otimes P_r)(c_2 c_3 \otimes 1^{\otimes 2})) \quad (根据\ (2.1)) \\
&= (c_1 \otimes 1) \bullet (c_2 c_3 \otimes 1^{\otimes 3}) \quad (根据\ (2.1)) \\
&= c_1 c_2 c_3 \otimes 1^{\otimes 3}.
\end{aligned}$$

更一般地, 对于所有的 $n \geqslant 0$, 设 $u_n := 1^{\otimes(n+1)}$, 则

$$\Delta_T(u_0) = \Delta_{\mathbf{k}}(1) = 1^{\otimes 2} = 1 \otimes u_0.$$

根据 (3.3) 可得

$$\Delta_T(u_n) = (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(u_{n-1}) = 1 \otimes u_n.$$

因此, Δ_T 不同于定理 2.2 中定义的余乘.

接下来利用 A 的左余单位 ε_A, 构造 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 上的左余单位 ε_T. 对于每个纯张量 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes n}$, $n \geqslant 1$, 定义

$$\varepsilon_T : \overrightarrow{Ш}(A) \to \mathbf{k}, \quad \mathfrak{a} \mapsto \varepsilon_A(a_1)\varepsilon_A(a_2)\cdots\varepsilon_A(a_n). \tag{3.6}$$

引理 3.1 对于任意纯张量 $\mathfrak{a} \in A^{\otimes m}$ 和 $\mathfrak{b} \in A^{\otimes n}$, $m, n \geqslant 1$, 有

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta_T)(\mathrm{id} \otimes P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes P_r)(\mathrm{id} \otimes \Delta_T)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \tag{3.7}$$

和

$$(\Delta_T \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes P_r)(\Delta_T \otimes \mathrm{id})(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}). \tag{3.8}$$

证明 首先证明 (3.7) 对于任意纯张量 $\mathfrak{a} \in A^{\otimes m}$ 和 $\mathfrak{b} \in A^{\otimes n}$ 成立. 由 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \Delta_T)(\mathrm{id} \otimes P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta_T P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \\ &= \mathfrak{a} \otimes (\Delta_T P_r(\mathfrak{b})) \\ &= \mathfrak{a} \otimes ((\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{b})) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes P_r)(\mathrm{id} \otimes \Delta_T)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}).\end{aligned}$$

而 (3.8) 源自

$$\begin{aligned}(\Delta_T \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) &= (\Delta_T \otimes P_r)(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}) \\ &= \Delta_T(\mathfrak{a}) \otimes P_r(\mathfrak{b}) \\ &= (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes P_r)(\Delta_T \otimes \mathrm{id})(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}).\end{aligned}$$

证明完毕. □

3.2 $\boldsymbol{\Delta_T}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon_T}$ 的相容性

本节证明 Δ_T 和 ε_T 都是代数同态.

命题 3.1 余乘 $\Delta_T : \overrightarrow{Ш}(A) \to \overrightarrow{Ш}(A) \otimes \overrightarrow{Ш}(A)$ 是一个代数同态.

证明 要证 Δ_T 是一个代数同态, 只需证对于任意纯张量 $\mathfrak{a} := a_1 \otimes \cdots \otimes a_m \in A^{\otimes m}$ 和 $\mathfrak{b} := b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \in A^{\otimes n}$, $m, n \geqslant 1$, 有

$$\Delta_T(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) = \Delta_T(\mathfrak{a}) \bullet \Delta_T(\mathfrak{b}). \tag{3.9}$$

对 $m + n \geqslant 2$ 运用数学归纳法证明 (3.9). 若 $m + n = 2$, 则 $m = n = 1$. 于是, $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 均属于 A. 因此, 由 $\Delta_A : A \to A \otimes A$ 是一个代数同态即证 (3.9).

令 $k \geqslant 2$. 假设对于 $m + n \leqslant k$, (3.9) 已经成立. 考察 $m + n = k + 1$, 则 $m \geqslant 2$ 或者 $n \geqslant 2$. 首先验证当 $m \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 2$ 的情形. 记 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes \mathfrak{a}'$, 其中 $\mathfrak{a}' = a_2 \otimes \cdots \otimes a_m \in A^{\otimes (m-1)}$; $\mathfrak{b} = b_1 \otimes \mathfrak{b}'$, 其中 $\mathfrak{b}' = b_2 \otimes \cdots \otimes b_n \in A^{\otimes (n-1)}$, 则 (3.9) 的左边

$$\begin{aligned}\Delta_T(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) &= \Delta_T((a_1 \otimes \mathfrak{a}') \diamond_r (b_1 \otimes \mathfrak{b}')) \\ &= \Delta_T((a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \diamond_r (b_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{b}'))) \\ &= \Delta_T((a_1 b_1) \diamond_r (P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r P_r(\mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 } \diamond_r \text{ 的交换性}) \\ &= \Delta_T((a_1 b_1) \diamond_r P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 } (1.1)) \\ &= \Delta_T(a_1 b_1 \otimes (\mathfrak{a}' \diamond_r (1_A \otimes \mathfrak{b}') + (1_A \otimes \mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}' - 1_A \otimes (\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 } (2.1))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_A(a_1b_1) \bullet ((\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}' \diamond_r (1_A\otimes \mathfrak{b}')) + (\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T((1_A\otimes \mathfrak{a}')\diamond_r \mathfrak{b}') \\
&\quad - (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}'\diamond_r \mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 (3.3) 和 (3.4)}) \\
&= \Delta_A(a_1b_1) \bullet ((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet \Delta_T(1_A\otimes \mathfrak{b}')) + (\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(1_A\otimes \mathfrak{a}')\bullet \Delta_T(\mathfrak{b}')) \\
&\quad - (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet \Delta_T(\mathfrak{b}')))) \quad (\text{根据归纳假设}) \\
&= \Delta_A(a_1b_1) \bullet ((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet (\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{b}')) \\
&\quad + (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet \Delta_T(\mathfrak{b}')) \\
&\quad - (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet \Delta_T(\mathfrak{b}')))) \quad (\text{根据 (3.3)}).
\end{aligned}
$$

(3.9) 的右边

$$
\begin{aligned}
\Delta_T(\mathfrak{a})\bullet\Delta_T(\mathfrak{b}) &= \Delta_T(a_1\otimes\mathfrak{a}')\bullet\Delta_T(b_1\otimes\mathfrak{b}') \\
&= (\Delta_A(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}'))\bullet((\Delta_A(b_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{b}')) \quad (\text{根据(3.4)}) \\
&= \Delta_A(a_1b_1)\bullet((\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{b}')) \quad (\text{根据 $\bullet$ 的交换性}) \\
&= \Delta_A(a_1b_1)\bullet((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{b}')) \\
&\quad + (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet\Delta_T(\mathfrak{b}')) \\
&\quad - (\mathrm{id}\otimes P_r)((\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T(\mathfrak{a}')\bullet\Delta_T(\mathfrak{b}')))) \quad (\text{根据(1.1)}).
\end{aligned}
$$

于是, $\Delta_T(\mathfrak{a}\diamond_r\mathfrak{b}) = \Delta_T(\mathfrak{a})\bullet\Delta_T(\mathfrak{b})$. 当 m 或 n 等于 1 时的情形更易验证. □

现在证明在 (3.6) 中定义的 $\varepsilon_T : \overrightarrow{Ш}(A)\to\mathbf{k}$ 是一个代数同态.

命题 3.2 余单位 ε_T 是一个代数同态.

证明 只需证对于任意纯张量 $\mathfrak{a} := a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_m\in A^{\otimes m}$ 和 $\mathfrak{b} := b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_n\in A^{\otimes n}$, $m,n\geqslant 1$, 有

$$\varepsilon_T(\mathfrak{a}\diamond_r\mathfrak{b}) = \varepsilon_T(\mathfrak{a})\varepsilon_T(\mathfrak{b}). \tag{3.10}$$

对 $m+n\geqslant 2$ 作归纳证明. 如果 $m=n=1$, 那么根据 (2.1) 和 (3.6), 可得

$$\varepsilon_T(\mathfrak{a}\diamond_r\mathfrak{b}) = \varepsilon_A(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \varepsilon_A(\mathfrak{a})\varepsilon_A(\mathfrak{b}) = \varepsilon_T(\mathfrak{a})\varepsilon_T(\mathfrak{b}).$$

令 $k\geqslant 2$. 假设对于 $m+n\leqslant k$, (3.10) 成立. 考察 $m+n=k+1$, 则 $m\geqslant 2$ 或 $n\geqslant 2$. 只验证 $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 2$ 情形, 因为其他情形较简单. 由 (3.6) 可知,

$$\varepsilon_T(a_1\otimes\mathfrak{a}') = \varepsilon_A(a_1)\varepsilon_T(\mathfrak{a}') = \varepsilon_T(a_1)\varepsilon_T(\mathfrak{a}'). \tag{3.11}$$

特别地, 由 $\varepsilon_A(1_A)=1$ 可得, $\varepsilon_T(P_r(\mathfrak{a})) = \varepsilon_T(\mathfrak{a})$. 于是,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_T(\mathfrak{a}\diamond_r\mathfrak{b}) &= \varepsilon_T((a_1\otimes\mathfrak{a}')\diamond_r(b_1\otimes\mathfrak{b}')) \\
&= \varepsilon_T((a_1\diamond_r P_r(\mathfrak{a}'))\diamond_r(b_1\diamond_r P_r(\mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 (3.2)}) \\
&= \varepsilon_T((a_1b_1)\diamond_r P_r(\mathfrak{a}'\diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}')\diamond_r\mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}'\diamond_r\mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 (1.1)}) \\
&= \varepsilon_T((a_1b_1)\otimes(\mathfrak{a}'\diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}')\diamond_r\mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}'\diamond_r\mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 (2.1)}) \\
&= \varepsilon_T(a_1b_1)(\varepsilon_T((\mathfrak{a}'\diamond_r P_r(\mathfrak{b}')) + \varepsilon_T(P_r(\mathfrak{a}')\diamond_r\mathfrak{b}') - \varepsilon_T(P_r(\mathfrak{a}'\diamond_r\mathfrak{b}'))) \quad (\text{根据 (3.6)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_T(a_1b_1)(\varepsilon_T(\mathfrak{a}')\varepsilon_T(\mathfrak{b}') + \varepsilon_T(\mathfrak{a}')\varepsilon_T(\mathfrak{b}') - \varepsilon_T(\mathfrak{a}')\varepsilon_T(\mathfrak{b}')) \quad (\text{根据归纳假设和 } (3.11))\\
&= \varepsilon_T(a_1)\varepsilon_T(b_1)\varepsilon_T(\mathfrak{a}')\varepsilon_T(\mathfrak{b}')\\
&= \varepsilon_T(a_1\otimes\mathfrak{a}')\varepsilon_T(b_1\otimes\mathfrak{b}') \quad (\text{根据 } (3.11))\\
&= \varepsilon_T(\mathfrak{a})\varepsilon_T(\mathfrak{b}).
\end{aligned}
$$

证明完毕. □

3.3 Δ_T 的余结合性和 ε_T 的左余单位性

本小节将证明 Δ_T 是余结合的, ε_T 满足左余单位性.

命题 3.3 余乘 Δ_T 是余结合的, 即

$$
(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T = (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T. \tag{3.12}
$$

证明 要证 (3.12), 只需证对于任意纯张量 $\mathfrak{a} := a_1\otimes\mathfrak{a}' \in A^{\otimes n}$, $n\geqslant 1$, 有

$$
(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(\mathfrak{a}) = (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}). \tag{3.13}
$$

为此, 对 $n\geqslant 1$ 作归纳证明. 如果 $n=1$, 那么 $\mathfrak{a}=a_1\in A$, 故由 Δ_A 的结合性便知, (3.13) 成立.

令 $k\geqslant 1$. 假设对于 $\mathfrak{a}\in A^{\otimes k}$, (3.13) 成立. 考察 $\mathfrak{a}=a_1\otimes\mathfrak{a}'\in A^{\otimes(k+1)}$. 于是,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(\mathfrak{a}) &= (\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(a_1\diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \quad (\text{根据 } (3.2))\\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta_T)(\Delta_T(a_1)\bullet\Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))) \quad (\text{根据命题 } 3.1)\\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))\\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据 } (3.3))\\
&= (\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes P_r)(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据 } (3.7))\\
&= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据归纳假设}).
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
(\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}) &= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(a_1\diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \quad (\text{根据 } (3.2))\\
&= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})(\Delta_T(a_1)\bullet\Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))) \quad (\text{根据命题 } 3.1)\\
&= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(a_1)\bullet(\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))\\
&= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(a_1)\bullet(\Delta_T\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据 } (3.3))\\
&= (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(a_1)\bullet(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes P_r)(\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据 } (3.8)).
\end{aligned}
$$

因此, $(\mathrm{id}\otimes\Delta_T)\Delta_T(\mathfrak{a}) = (\Delta_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a})$. □

命题 3.4 **k**- 线性映射 ε_T 满足左余单位性:

$$
(\varepsilon_T\otimes\mathrm{id})\Delta_T = \beta_\ell, \tag{3.14}
$$

其中 $\beta_\ell : \overrightarrow{Ш}(A)\to\mathbf{k}\otimes\overrightarrow{Ш}(A)$, $\mathfrak{a}\mapsto 1\otimes\mathfrak{a}$, 对于所有的 $\mathfrak{a}\in A^{\otimes k}$, $k\geqslant 1$.

证明 只需证对于 $\mathfrak{a} \in A^{\otimes k}$, $k \geqslant 1$, 有

$$(\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}) = \beta_\ell(\mathfrak{a}). \tag{3.15}$$

对 $k \geqslant 1$ 归纳证明. 如果 $k=1$, 那么 $\mathfrak{a} \in A$. 故由 ε_A 的左余单位性即证 (3.15).

设 $k \geqslant 1$. 假设对于 $\mathfrak{a} \in A^{\otimes k}$, (3.15) 成立. 设 $\mathfrak{a} := a_1 \otimes \mathfrak{a}' \in A^{\otimes(k+1)}$, 则

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}) &= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_T(a_1 \otimes \mathfrak{a}') \\
&= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_T(a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \quad (\text{根据 } (3.2)) \\
&= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})(\Delta_A(a_1) \bullet \Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))) \quad (\text{根据命题 } 3.1) \\
&= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_A(a_1)(\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})(\Delta_T(P_r(\mathfrak{a}'))) \quad (\text{根据命题 } 3.2) \\
&= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_A(a_1)(\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据 } (3.3)) \\
&= (\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_A(a_1)(\mathrm{id} \otimes P_r)(\varepsilon_T \otimes \mathrm{id})\Delta_T(\mathfrak{a}') \\
&= \beta_\ell(a_1)(\mathrm{id} \otimes P_r)\beta_\ell(\mathfrak{a}') \quad (\text{根据归纳假设}) \\
&= \beta_\ell(a_1)\beta_\ell(P_r(\mathfrak{a}')) \quad (\text{根据 } \beta_\ell \text{ 的定义}) \\
&= \beta_\ell(a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \quad (\text{根据 } \beta_\ell \text{ 是代数同态}) \\
&= \beta_\ell(\mathfrak{a}).
\end{aligned}$$

证明完毕. □

由于 ε_T 是 ε_A 的延拓, 当 ε_A 不满足右余单位性时, ε_T 也不满足. 若假定 ε_A 满足右余单位性, 即 A 是一个双代数, 则可以验证所定义的 ε_T 是左余单位的, 但不是右余单位的. 例如, 定义线性映射 $\beta_r : \overrightarrow{Ш}(A) \to \overrightarrow{Ш}(A) \otimes \mathbf{k}, \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \otimes 1$. 取 $\mathfrak{a} := a_1 \otimes a_2 \in A^{\otimes 2}$, 则有

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)\Delta_T(\mathfrak{a}) &= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)\Delta_T(a_1 \otimes a_2) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)\Delta_T(a_1 \diamond_r P_r(a_2)) \quad (\text{根据 } (3.2)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)(\Delta_A(a_1) \bullet \Delta_T(P_r(a_2))) \quad (\text{根据命题 } 3.1) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)\Delta_A(a_1)(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)(\Delta_T(P_r(a_2))) \quad (\text{根据命题 } 3.2) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)\Delta_A(a_1)(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_T)(\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_A(a_2) \quad (\text{根据 } (3.3)) \\
&= (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(a_1)(\mathrm{id} \otimes \varepsilon_A)\Delta_A(a_2) \quad (\text{根据 } (3.6)) \\
&= \beta_r(a_1)\beta_r(a_2) \quad (\text{根据 } \varepsilon_A \text{ 的右余单位性}) \\
&= \beta_r(a_1 \diamond_r a_2) \quad (\text{根据 } \beta_r \text{ 是代数同态}) \\
&= \beta_r(a_1 a_2) \\
&\neq \beta_r(\mathfrak{a}).
\end{aligned}$$

定义线性映射

$$\mu_T : \mathbf{k} \to \overrightarrow{Ш}(A), \quad c \mapsto c1_A, \quad c \in \mathbf{k},$$

则 μ_T 是 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r)$ 的单位元. 现在把各个部分组合在一起, 给出这一节最主要的结果.

定理 3.1 六元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, \mu_T, \Delta_T, \varepsilon_T, P_r)$ 是一个左余单位上闭链双代数.

证明 首先, 根据定理 2.1 可知, 四元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, \mu_T, P_r)$ 是一个自由交换 Nijenhuis 代数. 由命题 3.3 和 3.4 可得, 三元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \Delta_T, \varepsilon_T)$ 是一个左余单位余代数. 利用命题 3.1 和 3.2 便知, 五元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, \mu_T, \Delta_T, \varepsilon_T)$ 是一个左余单位双代数且满足 (3.1) 中的 cocyle 条件. 因此, 六元组 $(\overrightarrow{Ш}(A), \diamond_r, \mu_T, \Delta_T, \varepsilon_T, P_r)$ 是一个左余单位上闭链双代数. □

4 自由交换 Nijenhuis 代数上的左余单位 Hopf 代数结构

本节将在自由交换 Nijenhuis 代数 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 上构建左余单位 Hopf 代数结构.

定义 4.1 (1) 称左余单位双代数 $(H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ 是分次的, 如果存在 H 的 $\mathbf{k}$- 子模 $H^{(n)}$, $n \geqslant 0$, 满足对所有的 $p, q, n \geqslant 0$, 有

$$H = \bigoplus_{n\geqslant 0} H^{(n)}, \quad H^{(p)}H^{(q)} \subseteq H^{(p+q)},$$

$$\Delta(H^{(n)}) \subseteq (H^{(0)} \otimes H^{(n)}) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p>0, q>0}} H^{(p)} \otimes H^{(q)} \Bigg).$$

(2) 称分次左余单位双代数是连通的, 如果 $H^{(0)} = \mathrm{im}\mu (= \mathbf{k})$ 且

$$\ker \varepsilon = \bigoplus_{n\geqslant 1} H^{(n)}. \tag{4.1}$$

设 $A := (A, m_A, \mu_A)$ 是 $\mathbf{k}$- 代数, $C := (C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ 是左余单位 $\mathbf{k}$- 余代数. 记 $R := \mathrm{Hom}(C, A)$. 对于 $f, g \in R$, 定义 f 和 g 的卷积:

$$f * g := m_A(f \otimes g)\Delta_C.$$

引理 4.1 设 $A := (A, m, \mu)$ 是 $\mathbf{k}$- 代数, $C := (C, \Delta, \varepsilon)$ 是左余单位 $\mathbf{k}$- 余代数. 记 $e := \mu\varepsilon$, 则在卷积 $*$ 下, e 是 $\mathbf{k}$- 代数 $\mathrm{Hom}(C, A)$ 的左单位.

证明 对于所有的 $k \in \mathbf{k}$ 和 $a \in A$, 定义线性映射 $\alpha_\ell : \mathbf{k} \otimes A \to A$, $k \otimes a \mapsto ka$; 对于所有的 $c \in C$, 定义线性映射 $\beta_\ell : C \to \mathbf{k} \otimes C$, $c \mapsto 1_{\mathbf{k}} \otimes c$, 则 α_ℓ 和 β_ℓ 都是代数同构. 由于 μ 是 A 的单位元, ε 是 C 的左余单位, 因此, $m(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \alpha_\ell$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C)\Delta = \beta_\ell$. 对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$, 有

$$e * f = m(\mu\varepsilon \otimes f)\Delta = m(\mu \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_{\mathbf{k}} \otimes f)(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C)\Delta = \alpha_\ell(\mathrm{id}_{\mathbf{k}} \otimes f)\beta_\ell = f.$$

证毕. □

一般地, 根据 e 的幂等性、ε 的满射性和 μ 的单射性, 可得下面的引理.

引理 4.2 设 $\mathbf{k}$ 是一个域, $H := (H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ 是连通分次左余单位 $\mathbf{k}$- 双代数, 则

$$H = \mathrm{im}\mu \oplus \ker \varepsilon.$$

定义 4.2 设 $H := (H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ 是左余单位 $\mathbf{k}$- 双代数, 则

(1) 称 H 上的 $\mathbf{k}$- 线性映射 S 是 H 的右对极, 如果

$$\mathrm{id}_H * S = e.$$

(2) 称带有右对极的左余单位双代数是左余单位右对极 Hopf 代数, 或简称左余单位 Hopf 代数.

由于任何 Hopf 代数和文献 [40] 中的右 Hopf 代数均是左余单位 (右对极) Hopf 代数, 故左余单位 Hopf 代数的例子很多.

命题 4.1 设 $\mathbf{k}$ 是域, $H := (H, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ 是连通分次左余单位 $\mathbf{k}$- 双代数, 则对于任意 $x \in H^{(n)}$, $n \geqslant 1$, 有

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \tilde{\Delta}(x), \quad \tilde{\Delta}(x) \in \ker \varepsilon \otimes \ker \varepsilon.$$

证明 根据 $\Delta(H^{(n)}) \subseteq (H^{(0)} \otimes H^{(n)}) \oplus (\bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p>0,q>0}} H^{(p)} \otimes H^{(q)})$ 和 $H^{(0)} = \mathbf{k}$ 可知,

$$\Delta(x) = 1 \otimes u + \tilde{\Delta}(x),$$

其中 $u \in H^{(n)}$ 和 $\tilde{\Delta}(x) \in \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p>0,q>0}} H^{(p)} \otimes H^{(q)}$. 由 (4.1) 便知, $\tilde{\Delta}(x) \in \ker \varepsilon \otimes \ker \varepsilon$. 利用左余单位性可得

$$x = \beta_\ell^{-1}(\beta_\ell(x)) = \beta_\ell^{-1}(\varepsilon \otimes I)\Delta(x) = \beta_\ell^{-1}(\varepsilon \otimes I)(1 \otimes u + \tilde{\Delta}(x)) = u.$$

因此,

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + \tilde{\Delta}(x).$$

证明完毕. □

定理 4.1 设 $\mathbf{k}$ 是一个域, 则连通分次左余单位 $\mathbf{k}$ 双代数是一个左余单位 Hopf 代数. 借助于 Sweedler 记法:

$$\tilde{\Delta}(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x'',$$

它的对极 S 按如下递归定义:

$$S(1_H) = 1_H, \quad S(x) = -\sum_{(x)} x' S(x''), \quad x \in \ker \varepsilon. \tag{4.2}$$

证明 可通过直接验证 (4.2) 中所定义的映射 S 满足下列条件: 对于 $x = 1_H$ 和 $x \in \ker \varepsilon$, 有

$$(\mathrm{id}_H * S)(x) = e(x).$$

此证明方法与证明一个连通分次双代数是 Hopf 代数方法一致 (参见文献 [24,46]). □

定理 4.2 设 $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A^{(n)}$ 是连通分次左余单位双代数, 则双代数 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 是左余单位 Hopf 代数.

证明 根据定理 4.1 可知, 只需证 $\overrightarrow{Ш}(A)$ 是一个连通分次左余双代数. 对于任意元素 $0 \neq a \in A$, 通过如下方式定义 a 的次数:

$$\deg(a) := k, \quad 如果\ a \in A^{(k)}, \quad k \geqslant 0.$$

更一般地, 对于任意纯张量 $0 \neq \mathfrak{a} := a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_m \in A^{\otimes m}$, 定义

$$\deg(\mathfrak{a}) := \deg(a_1) + \deg(a_2) + \cdots + \deg(a_m) + m - 1. \tag{4.3}$$

设 $m \geqslant 2$, 则 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes \mathfrak{a}'$, 其中 $\mathfrak{a}' := a_2 \otimes \cdots \otimes a_m$. 于是,

$$\deg(\mathfrak{a}) = \deg(a_1) + \deg(\mathfrak{a}') + 1. \tag{4.4}$$

令 $\mathfrak{U} := \overrightarrow{Ш}(A)$. 用 $\mathfrak{U}^{(k)}$ 表示 $\{\mathfrak{a} \in \mathfrak{U} \mid \deg(\mathfrak{a}) = k\}$ 的线性扩展, 即知 $\mathfrak{U}^{(0)} = A^{(0)}$, 故 $\mathfrak{U}^{(0)} = \mathbf{k}$. 进一步有

$$A^{(n)} \subseteq \mathfrak{U}^{(n)}, \quad \mathfrak{U}^{(i)} \cap \mathfrak{U}^{(j)} = \{0\}, \quad i \neq j,$$

因此,

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{U}^{(n)}.$$

设 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes \mathfrak{a}' \in A^{\otimes m}$, 则通过 (4.4) 可得

$$\deg(\mathfrak{a}) = n \Rightarrow \deg(\mathfrak{a}') = n - \deg(a_1) - 1 \tag{4.5}$$

和

$$\deg(\mathfrak{a}') = n \Rightarrow \deg(\mathfrak{a}) = \deg(a_1) + n + 1. \tag{4.6}$$

要证

$$\mathfrak{U}^{(p)} \diamond_r \mathfrak{U}^{(q)} \subseteq \mathfrak{U}^{(p+q)}, \quad \forall\, p, q \geqslant 0, \tag{4.7}$$

只需证

$$\deg(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) = \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}), \quad \forall\, \mathfrak{a} \in \mathfrak{U}^{(p)}, \quad \mathfrak{b} \in \mathfrak{U}^{(q)}. \tag{4.8}$$

对 $p + q \geqslant 0$ 作递归证明. 如果 $p = q = 0$, 那么 $\mathfrak{U}^{(p)} = \mathfrak{U}^{(q)} = \mathfrak{U}^{(0)} = \mathbf{k}$, 故 $\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} \in \mathbf{k}$. 于是,

$$\deg(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) = 0 = \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}).$$

假定对 $p + q \leqslant k$, (4.8) 已经成立. 设 $p + q = k + 1$. 如果 $p = 0$ 或 $q = 0$, 那么 $\mathfrak{U}^{(P)} = \mathbf{k}$ 或 $\mathfrak{U}^{(q)} = \mathbf{k}$. 根据 (2.1) 中 $\diamond_r$ 的定义, 要么 $\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, 要么 $\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. 因此, (4.8) 成立. 现设 $p, q \geqslant 1$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}^{(p)}$ 和 $\mathfrak{b} \in \mathfrak{U}^{(q)}$. 若 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in A$, 则 $\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, 故

$$\deg(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) = \deg(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}).$$

若 $\mathfrak{a} \in A$ 且 $\mathfrak{b} := b_1 \otimes \mathfrak{b}' \in A^{\otimes \ell}$, $\ell \geqslant 2$, 则 $\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} = \mathfrak{a} b_1 \otimes \mathfrak{b}'$. 根据 (4.4) 可得

$$\begin{aligned}
\deg(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) &= \deg(\mathfrak{a} b_1 \otimes \mathfrak{b}) \\
&= \deg(\mathfrak{a} b_1) + \deg(\mathfrak{b}') + \ell - 1 \\
&= \deg(\mathfrak{a}) + \deg(b_1) + \deg(\mathfrak{b}') + \ell - 1 \\
&= \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}).
\end{aligned}$$

类似地, 对于 $\mathfrak{a} \in A^{\otimes m}$, $m \geqslant 2$ 和 $\mathfrak{b} \in A$, (4.8) 同样成立. 设 $\mathfrak{a} := a_1 \otimes \mathfrak{a}' \in A^{\otimes \ell}$ 和 $\mathfrak{b} := b_1 \otimes \mathfrak{b}' \in A^{\otimes m}$, $\ell, m \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b} &= (a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \diamond_r (b_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{b}')) \\
&= (a_1 b_1) \diamond_r P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}')) \\
&= (a_1 b_1) \otimes (\mathfrak{a}' \diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}')).
\end{aligned}$$

根据 (4.5) 可知,

$$\deg(\mathfrak{a}') = p - \deg(a_1) - 1 \quad 和 \quad \deg(\mathfrak{b}') = q - \deg(b_1) - 1,$$

从而通过 (4.6) 可得

$$\deg(P_r(\mathfrak{a}')) = \deg(1_A \otimes \mathfrak{a}') = p - \deg(a_1) \quad 和 \quad \deg(P_r(\mathfrak{b}')) = \deg(1_A \otimes \mathfrak{b}') = q - \deg(b_1).$$

利用归纳假设可得

$$\deg(\mathfrak{a}' \diamond_r P_r(\mathfrak{b}')) = \deg(P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}') = \deg(P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}')) = p + q - \deg(a_1) - \deg(b_1) - 1.$$

于是, 根据 (4.4), 有

$$\begin{aligned}\deg(\mathfrak{a} \diamond_r \mathfrak{b}) &= \deg(a_1 b_1) + \deg(\mathfrak{a}' \diamond_r P_r(\mathfrak{b}') + P_r(\mathfrak{a}') \diamond_r \mathfrak{b}' - P_r(\mathfrak{a}' \diamond_r \mathfrak{b}')) + 1\\ &= \deg(a_1) + \deg(b_1) + p + q - \deg(a_1) - \deg(b_1) - 1 + 1\\ &= p + q\\ &= \deg(\mathfrak{a}) + \deg(\mathfrak{b}).\end{aligned}$$

这就完成了归纳证明.

最后证

$$\Delta_T(\mathfrak{U}^{(n)}) \subseteq (\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n)}) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\substack{p+q=n\\ p>0,q>0}} \mathfrak{U}^{(p)} \otimes \mathfrak{U}^{(q)}\Bigg), \quad \forall\, p, q, n \geqslant 0. \tag{4.9}$$

对 $n \geqslant 0$ 作归纳证明. 如果 $n = 0$, 那么 $\mathfrak{U}^{(0)} = \mathbf{k}$. 故

$$\Delta_T(\mathfrak{U}^{(0)}) = \Delta_A(\mathbf{k}) = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(0)}.$$

假设对 $n \geqslant 0$, (4.9) 已经成立. 设 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}^{(n+1)}$. 如果 $\mathfrak{a} \in A$ $(= \bigoplus_{k\geqslant 0} A^{(k)})$, 那么 $\mathfrak{a} \in A^{(n+1)}$. 由于 A 是一个连通分次左余单位双代数, 于是,

$$\begin{aligned}\Delta_T(\mathfrak{a}) &= \Delta_A(\mathfrak{a})\\ &\subseteq (A^{(0)} \otimes A^{(n+1)}) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\substack{p+q=n+1\\ p>0,q>0}} A^{(p)} \otimes A^{(q)}\Bigg)\\ &\subseteq (\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n+1)}) \oplus \Bigg(\bigoplus_{\substack{p+q=n+1\\ p>0,q>0}} \mathfrak{U}^{(p)} \otimes \mathfrak{U}^{(q)}\Bigg).\end{aligned}$$

设 $\mathfrak{a} = a_1 \otimes \mathfrak{a}' \in A^{\otimes(\ell+1)}$, $\ell \geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}\Delta_T(\mathfrak{a}) &= \Delta_T(a_1 \diamond_r P_r(\mathfrak{a}')) \quad (根据 (3.2))\\ &= \Delta_T(a_1) \bullet \Delta_T(P_r(\mathfrak{a}')) \quad (根据命题 3.1)\\ &= \Delta_T(a_1) \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}') \quad (根据命题 3.3)\\ &= \Delta_A(a_1) \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}').\end{aligned}$$

通过 (4.5) 便知, $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{U}^{(n-\deg(a_1))}$. 利用归纳假设可知,

$$\Delta_T(\mathfrak{a}') \subseteq (\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n-\deg(a_1))}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_2>0,q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_2)} \right).$$

因此,

$$\begin{aligned}
\Delta_T(\mathfrak{a}) &= \Delta_A(a_1) \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r)\Delta_T(\mathfrak{a}') \\
&\subseteq \left((A^{(0)} \otimes A^{(\deg(a_1))}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_1+q_1=\deg(a_1)\\ p_1>0,q_1>0}} A^{(p_1)} \otimes A^{(q_1)} \right) \right) \\
&\quad \bullet (\mathrm{id} \otimes P_r) \left(\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n-\deg(a_1))} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_2>0,q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_2)} \right) \right) \\
&\subseteq \left((\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(\deg(a_1))}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_1+q_1=\deg(a_1)\\ p_1>0,q_1>0}} A^{(p_1)} \otimes A^{(q_1)} \right) \right) \\
&\quad \bullet \left((\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n-\deg(a_1)+1)}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_2>0,q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_2+1)} \right) \right) \\
&\subseteq (\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n+1)}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_2>0,q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_2+1+\deg(a_1))} \right) \\
&\quad \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_1+q_1=\deg(a_1)\\ p_1>0,q_1>0}} \mathfrak{U}^{(p_1)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_1+n-\deg(a_1)+1)} \right) \\
&\quad \oplus \left(\left(\bigoplus_{\substack{p_1+q_1=\deg(a_1)\\ p_1>0,q_1>0}} \mathfrak{U}^{(p_1)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_1)} \right) \bullet \left(\bigoplus_{\substack{p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_2>0,q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_2+1)} \right) \right) \\
&\subseteq (\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n+1)}) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p_1+q_1=\deg(a_1)\\ p_2+q_2=n-\deg(a_1)\\ p_1+p_2>0,q_1+q_2>0}} \mathfrak{U}^{(p_1+p_2)} \otimes \mathfrak{U}^{(q_1+q_2+1)} \right) \\
&\subseteq \left(\mathfrak{U}^{(0)} \otimes \mathfrak{U}^{(n+1)}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{p+q=n+1\\ p>0,q>0}} \mathfrak{U}^{(p)} \otimes \mathfrak{U}^{(q)} \right) \quad (p := p_1 + p_2, \quad q := q_1 + q_2 + 1).
\end{aligned}$$

证明完毕. □

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Nijenhuis A. X_{n-1}-forming sets of eigenvectors. Indag Math (NS), 1951, 13: 200–212
2 Dorfman I. Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations. Chichester: John Wiley & Sons, 1993
3 Kosmann-Schwarzbach Y, Magri F. Poisson-Nijenhuis structures. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 1990, 53: 35–81
4 Golubchik I Z, Sokolov V V. One more type of classical Yang-Baxter equation. Funct Anal Appl, 2000, 34: 296–298

5 Golubchik I Z, Sokolov V V. Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras. J Nonlinear Math Phys, 2000, 7: 184–197
6 Magri F, Morosi C. A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds. Quaderno S 19, University of Milan. Https://www.researchgate.net/publication/240500648, 1984
7 Caseiro R. Modular classes of Poisson-Nijenhuis Lie algebroids. Lett Math Phys, 2007, 80: 223–238
8 Liu J F, Sheng Y H, Zhou Y Q, et al. Nijenhuis operators on n-Lie algebras. Commun Theor Phys (Beijing), 2016, 65: 659–670
9 Panasyuk A. Algebraic Nijenhuis operators and Kronecker Poisson pencils. Differential Geom Appl, 2006, 24: 482–491
10 Sheng Y H. Representations of Hom-Lie algebras. Algebr Represent Theory, 2012, 15: 1081–1098
11 Cariñena J F, Grabowski J, Marmo G. Quantum bi-Hamiltonian systems. Internat J Modern Phys A, 2000, 15: 4797–4810
12 Uchino K. Twisting on associative algebras and Rota-Baxter type operators. J Noncommut Geom, 2010, 4: 349–379
13 Ebraihimi-Fard K. On the associative Nijenhuis relation. Electron J Combin, 2004, 11: #R38
14 Lei P, Guo L. Nijenhuis algebras, NS algebras, and N-dendriform algebras. Front Math China, 2012, 7: 827–846
15 Leroux P. Construction of Nijenhuis operators and dendriform trialgebras. Int J Math Math Sci, 2004, 49: 2595–2615
16 Baxter G. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. Pacific J Math, 1960, 10: 731–742
17 Cartier P. On the structure of free Baxter algebras. Adv Math, 1972, 9: 253–265
18 Rota G C. Baxter algebras and combinatorial identities, I; II. Bull Amer Math Soc (NS), 1969, 75: 325–329; 330–334
19 Bai C M. A unified algebraic approach to the classical Yang-Baxter equation. J Phys A, 2007, 40: 11073–11082
20 Semenov-Tyan-Shanskii M A. What is a classical r-matrix? Funct Anal Appl, 1983, 17: 259–272
21 Connes A, Kreimer D. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert Problem I: The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. Comm Math Phys, 2000, 210: 249–273
22 Ebrahimi-Fard K, Guo L, Kreimer D. Spitzer's identity and the algebraic Birkhoff decomposition in pQFT. J Phys A Math Gen, 2004, 37: 11037–11052
23 Ebrahimi-Fard K, Guo L, Manchon D. Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion. Comm Math Phys, 2006, 267: 821–845
24 Guo L. An Introduction to Rota-Baxter Algebra. Beijing: Higher Education Press; Boston: International Press, 2012
25 Ebrahimi-Fard K, Guo L. Rota-Baxter algebras and dendriform algebras. J Pure Appl Algebra, 2008, 212: 320–339
26 Guo L, Keigher W. Baxter algebras and shuffle products. Adv Math, 2000, 150: 117–149
27 Ebrahimi-Fard K, Leroux P. Generalized shuffles related to Nijenhuis and TD-algebras. Comm Algebra, 2009, 37: 3064–3094
28 Rota G C. Baxter Operators, An Introduction. Gian-Carlo Rota on Combinatorics. Boston: Birkhäuser, 1995
29 Zheng S H, Gao X, Guo L, et al. Rota-Baxter type operators, rewriting systems and Gröbner-Shirshov bases. J Symbolic Comput, 2019, in press
30 Holtkamp R. On Hopf algebra structures over free operads. Adv Math, 2006, 207: 544–565
31 Loday J L. Scindement d'associativité et algèbres de Hopf, actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray. Sémin Congr, 2004, 9: 155–172
32 Andrew G, Guo L, Keigher W, et al. Baxter algebras and Hopf algebras. Trans Amer Math Soc, 2003, 335: 4639–4656
33 Ebrahimi-Fard K, Guo L. Mixable shuffles, quasi-shuffles and Hopf algebras. J Algebraic Combin, 2006, 24: 83–101
34 Yu H Y, Guo L, Thibon J Y. Weak quasi-symmetric functions, Rota-Baxter algebras and Hopf algebras. Adv Math, 2019, 344: 1–34
35 Connes A, Kreimer D. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry. Comm Math Phys, 1998, 199: 203–242
36 Zhang T J, Gao X, Guo L. Hopf algebras of rooted forests, cocyles, and free Rota-Baxter algebras. J Math Phys, 2016, 57: 101701
37 Gao X, Lei P, Zhang T J. Left counital Hopf algebras on free Nijenhuis algebras. Comm Algebra, 2018, 46: 4868–4883
38 Forcey S, Lauve A, Sottile F. Cofree compositions of coalgebras. Ann Comb, 2013, 17: 105–130
39 Forcey S, Springfield D. Geometric combinatorial algebras: Cyclohedron and simplex. J Algebraic Combin, 2010, 32: 597–627
40 Green J A, Nichols W D, Taft E J. Left Hopf algebras. J Algebra, 1980, 65: 399–411
41 Rodríguez-Romo S, Taft E J. One-sided Hopf algebras. Contemp Math, 2005, 376: 377–384
42 Wang S H. Hopf-type algebras. Comm Algebra, 2010, 38: 4255–4276
43 Li F. Weak Hopf algebras and some new solutions of the quantum Yang-Baxter equation. J Algebra, 1998, 208: 72–100
44 Böhm G, Nill F, Szlachányi K. Weak Hopf algebras I: Integral theory and C-structure. J Algebra, 1999, 221: 385–438

45 Lee C. Nonclassical effects in the gray-body state. Phys Rev A, 1995, 52: 1594–1600
46 Manchon D. Hopf algebras, from basics to applications to renormalization. ArXiv:0408405, 2004

Left counital Hopf algebra structures on free commutative Nijenhuis algebras

Shanghua Zheng & Li Guo

Abstract Motivated by the Hopf algebra structures established on free commutative Rota-Baxter algebras, we explore Hopf algebra related structures on free commutative Nijenhuis algebras. Applying a cocycle condition, we first prove that a free commutative Nijenhuis algebra on a left counital bialgebra (in the sense that the right-sided counicity needs not hold) can be enriched to a left counital bialgebra. We then establish a general result that a connected graded left counital bialgebra is a left counital right antipode Hopf algebra in the sense that the antipode is also only right-sided. We finally apply this result to show that the left counital bialgebra on a free commutative Nijenhuis algebra on a connected left counital bialgebra is connected and graded, hence is a left counital right antipode Hopf algebra.

Keywords Nijenhuis algebra, bialgebra, left counital bialgebra, connected bialgebra, left counital right antipode Hopf algebra

MSC(2010) 16W99, 16W30, 08B20

doi: 10.1360/SCM-2017-0662