中国科学: 数学 2010 年 第 40 卷 第 12 期: 1205～1224
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一类耦合的有限元 - 边界元变分不等式的预条件子

谨以此文致《中国科学》创刊六十周年

胡齐芽, 余德浩

中国科学院数学与系统科学研究院计算数学与科学工程计算研究所, 北京 100190
E-mail: hqy@lsec.cc.ac.cn, ydh@lsec.cc.ac.cn

收稿日期: 2010-02-22; 接受日期: 2010-05-18
国家自然科学基金 (批准号: 10771178)、国家自然科学基金重点项目 (批准号: 10531080) 和国家重点基础研究发展计划重大项目 (973 项目)(批准号: 2005CB321702, 2005CB321701) 资助项目

摘要 本文主要研究一类 Signorini 接触条件的非线性传输问题. 这类问题可以用耦合的有限元 - 边界元变分不等式来描述. 我们首先提出一种求解变分不等式的预处理梯度投影法. 然后对离散系统构造了有效的区域分解预条件子. 该预条件子能够使耦合的不等式问题分解成等式问题和小规模的不等式问题, 并且这些问题可以并行求解. 最后我们详细研究了该迭代方法的收敛性.

关键词 Signorini 接触 有限元 - 边界元耦合 变分不等式 预处理梯度投影 预条件子 条件数

MSC (2000) 主题分类 65N30, 65R20, 73C50

1 引言

许多工程问题可以利用界面问题描述, 其中包括定义在有界 Lipschitz 区域的非线性一致单调偏微分方程和定义在无界外区域带辐射条件的 Laplace 方程, 参见文献 [1–3].

本文我们考虑一类二维界面问题 (参见文献 [4]). 设 Ω 是具有 Lipschitz 边界 Γ 的有界区域. 为了描述混合边界条件, 设 $\Gamma = \overline{\Gamma_t \cup \Gamma_s}$, 其中 Γ_t 和 Γ_s 是 Γ 中的非空、不相交的开集. n 是定义在 Γ 上的单位外法向, 其中方向从 Ω 指向 $\Omega_c := \mathbb{R}^2 \backslash \bar{\Omega}$. 另外我们假设 $f \in L^2(\Omega), u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $t_0 \in L^2(\Gamma)$.

在区域内, 我们考虑以下非线性偏微分方程:

$$\operatorname{div}(p(|\nabla u|) \cdot \nabla u) + f = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

其中 $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是连续函数而且 $t \cdot p(t)$ 是 t 的单调递增函数. 在区域外, 我们考虑 Laplace 方程

$$\triangle u_c = 0 \quad \text{in } \Omega_c, \tag{1.2}$$

辐射条件为 (参见文献 [4] 的引理 3)

$$u_c(x) = a + o(1) \quad (|x| \to \infty), \tag{1.3}$$

英文版见: Hu Q Y, Yu D H. A preconditioner for a kind of coupled FEM-BEM variational inequality. Sci China Math, 2010, 53(11): 2811–2830, doi: 10.1007/s11425-010-4069-5

其中 a 是给定的实常数.

Γ 上的牵引力由函数 $p(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $-\frac{\partial u_c}{\partial n}$ 的迹给出. Γ_t 上的传输条件为:

$$u|_{\Gamma_t} = u_c|_{\Gamma_t} + u_0|_{\Gamma_t}, \quad p(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_t} = \frac{\partial u_c}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_t} + t_0|_{\Gamma_t}, \tag{1.4}$$

Γ_s 上的 Signorini 条件为:

$$\begin{aligned} &u|_{\Gamma_s} \leqslant u_c|_{\Gamma_s} + u_0|_{\Gamma_s}, \\ &p(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_s} = \frac{\partial u_c}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_s} + t_0|_{\Gamma_s} \leqslant 0, \\ &0 = p(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_s} \cdot (u_c + u_0 - u)|_{\Gamma_s}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

这个问题可以看成是两体接触问题的标量模型 (参见文献 [2, 3, 5]), 其中两种介质分别是非线性弹性无界介质和允许非线性单调应力应变关系的变形体.

近年来越来越多的文献关注于利用耦合的有限元和边界元方法求解传输问题, 参见文献 [1, 2, 4, 6–11]. 该类方法的优越性在于它能结合边界元方法处理无界区域和有限元方法处理复杂方程的优点.

文献 [4] 介绍了问题 (1.1)–(1.5) 的耦合的有限元 - 边界元变分不等式, 同时考虑了相应的离散问题. 而且基于抽象结果推导了渐进误差估计.

梯度投影方法是求解文献 [4] 给出的离散变分不等式最简单的方法. 然而, 此类方法的收敛性在细网格上非常慢, 除非应用有效的预条件子. 因此, 我们更加详细地提出和研究求解变分不等式的预处理梯度投影法. 我们发现定义在 Ω 上的内部变量和 Γ_s 上的边界变量在某种意义下可以分离, 基于此我们构造了有效的区域分解预条件子. 本文提出的方法具有如下优点: (1) 复杂的变分不等式可分解成两个简单的问题; (2) 主要计算可以并行实现; (3) 边界积分方程不需要求解.

类似的想法已被用于另一个简单的模型 (参见 [12]), 本文的结果不同于文献 [12], 而且分析更具有技巧性.

本文安排如下: 在第 2 节我们描述耦合的有限元 - 边界元变分不等式; 第 3 节详细研究了求解变分不等式的预处理梯度投影方法; 在第 4 节我们构造了耦合系统的预条件子, 并估计了预处理系统的条件数; 第 5 节给出了条件数估计的详细分析.

2 耦合的有限元 - 边界元变分不等式

我们首先回顾文献 [4] 考虑的变分问题. 对于 $\mathbb{R}^2$ 中的无界区域 Ω 和曲线 Γ, 以 $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 分别表示通常的 Sobolev 空间 (参见 [13]).

2.1 边界积分算子

设 $\gamma(x,y)$ 是以下 Laplace 方程的基本解,

$$\gamma(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^2.$$

令

$$V\varphi(z) = 2\int_\Gamma \varphi(x)\cdot\gamma(z,x)ds_x \quad (V: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)),$$

$$
\begin{aligned}
&K\varphi(z)=2\int_{\Gamma}\varphi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial n_x}\gamma(z,x)ds_x \quad (K:H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)),\\
&K'\varphi(z)=2\int_{\Gamma}\varphi(x)\cdot\frac{\partial}{\partial n_z}\gamma(z,x)ds_x \quad (K':H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)),\\
&W\varphi(z)=\frac{\partial}{\partial n_z}K\varphi(z) \quad (W:H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).
\end{aligned}
$$

一般地, 我们假设 Γ 的测度小于 1, 这可以通过缩放技巧达到 (参看 [11, 14, 15]). 众所周知, $V: H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是对称正定的, 而且 $W: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是对称半正定的. 因而,

$$S=\frac{1}{2}(W+(K'-I)V^{-1}(K-I))$$

定义的算子 $S: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 也是对称正定的 (参见 [1]). 注意到算子 S 恰是 Dirichlet-Neumann 映射或者 Poincare-Steklov 算子 (参见 [4] 和 [16]).

2.2 连续变分不等式

为方便起见, 我们做以下简单假设: $p_1\leqslant p(t)\leqslant p_2$, $\alpha\leqslant p(t)+tp'(t)\leqslant\beta$, 其中 $p_1,p_2,\alpha,\beta>0$ 为常数 (参见 [11]). 类似在文献 [4] 中, 令

$$g(t)=\int_0^t s\cdot p(s)ds,$$

并定义

$$G(w)=\int_{\Omega}g(|\nabla w|)dx, \quad w\in H^1(\Omega). \tag{2.1}$$

可以证明泛函 $G(\cdot)$ 的 Gâteaux 导数 (参见 [4]) 是

$$DG(u,w)=\int_{\Omega}p(|\nabla u|)(\nabla u)^t\cdot\nabla w dx, \quad u,\ w\in H^1(\Omega).$$

注意到 $DG: H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ 是非线性泛函. 定义线性泛函

$$
\begin{aligned}
&L: H^1(\Omega)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to\mathbb{R},\\
&L(u,\varphi)=\int_{\Omega}f\cdot u dx+\int_{\Gamma}t_0\cdot\varphi ds, \quad u\in H^1(\Omega),\ \varphi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).
\end{aligned}
$$

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 Γ 上的 L^2 内积. 令

$$F(u,\varphi)=L(u,u|_{\Gamma}+\varphi)+\langle S(a+u_0),u|_{\Gamma}+\varphi\rangle, \quad u\in H^1(\Omega), \quad \varphi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

设 $E=H^1(\Omega)\times\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$, 其中 $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)=\{\psi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma):\operatorname{supp} w\subseteq\bar{\Gamma}_s\}$. 令

$$D=\{(u,\varphi)\in E:\varphi\geqslant 0 \text{ a.e. on } \Gamma_s\}.$$

问题 (1.1)–(1.5) 的变分形式为: 求解 $(u,\varphi)\in D$ 使得

$$DG(u,w-u)+\langle S(u|_{\Gamma}+\varphi),w|_{\Gamma}+\psi-(u|_{\Gamma}+\varphi)\rangle\geqslant F(w-u,\psi-\varphi), \quad \forall(w,\psi)\in D. \tag{2.2}$$

如果 (u,φ) 是问题 (2.2) 的解, 则我们可以得到问题 (1.1)–(1.5) 的解 u 和 u_c, 其中 u_c 为

$$u_c(z)=\frac{1}{2}(K(u|_{\Gamma}+\varphi-u_0)+VS(u|_{\Gamma}+\varphi-u_0-a))(z)+a, \quad z\in\Omega_c.$$

2.3 变分不等式的离散

不失一般性, 我们假设区域 Ω 是多边形. 将 Ω 做形正规的拟一致三角剖分, 直径为 h. $V_h(\Omega)$ 表示对应剖分的有限维分片线性连续函数空间. 因为 Ω 的网格对应于边界网格, 所以令

$$V_h(\Gamma) = \{v|_\Gamma : v \in V_h(\Omega)\}.$$

而且, 我们用 $V_h^{-\frac{1}{2}}$ 表示分片常数试验函数.

设 $E_h = V_h(\Omega)\times\tilde{V}_h(\Gamma_s)$, 其中 $\tilde{V}_h(\Gamma_s) = V_h(\Gamma)\cap\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$, 并设

$$D_h = \{(u_h, \varphi_h) \in E_h : \varphi_h \geqslant 0 \text{ a.e. on } \Gamma_s\}.$$

设 $i_h : V_h(\Gamma) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 和 $j_h : V_h^{-\frac{1}{2}} \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 表示嵌入算子, 其对偶嵌入算子为 $i_h^* : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow (V_h(\Gamma))^*$ 和 $j_h^* : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow (V_h^{-\frac{1}{2}})^*$. 令

$$S_h = \frac{1}{2}(i_h^* W i_h + i_h^*(K' - I)j_h(j_h^* V j_h)^{-1} j_h^*(K - I)i_h).$$

问题 (2.2) 的离散问题为: 求解 $(u_h, \varphi_h) \in D_h$ 使得

$$\begin{aligned} &DG(u_h, w_h - u_h) + \langle S_h(u_h|_\Gamma + \varphi_h), w_h|_\Gamma + \psi_h - (u_h|_\Gamma + \varphi_h)\rangle \\ &\quad \geqslant F_h(w_h - u_h, \psi_h - \varphi_h), \quad \forall (w_h, \psi_h) \in D_h, \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $F_h(w, \psi) = L(w, w|_\Gamma + \psi) + \langle S_h(a + u_0), w|_\Gamma + \psi\rangle$.

文献 [4] 已证明问题 (2.3) 和 (2.2) 有唯一解. 而且推导了误差 $u_h - u$ 和 $\varphi_h - \varphi$ 的渐进估计. 如果 (u_h, φ_h) 是 (2.3) 的解, 则我们可以得到 (1.1)–(1.5) 的近似解 u_h 和 u_{ch},

$$u_{ch}(z) = \frac{1}{2}(K(u_h|_\Gamma + \varphi_h - u_0) + VS_h(u_h|_\Gamma + \varphi_h - u_0 - a))(z) + a, \quad z \in \Omega_c.$$

为了方便使用符号, 我们定义非二次泛函 $J_h : E_h \to \mathbb{R}$ 为

$$J_h(\eta) = G(w) + \frac{1}{2}\langle S_h(w|_\Gamma + \psi), w|_\Gamma + \psi\rangle - F_h(w, \psi), \quad \eta = (w, \psi) \in E_h,$$

其中 $G(\cdot)$ 是 (2.1) 定义的泛函. 因为泛函 $G(\cdot)$ 的 Gâteaux 导数为 $DG(\cdot\ ,\ \cdot)$, 所以 Gâteaux 导数 $DJ_h(\xi;\ \cdot) : E_h \to \mathbb{R}$ $(\xi \in E_h)$ 为

$$DJ_h(\xi;\ \eta) = DG(u, w) + \langle S_h(u|_\Gamma + \varphi), w|_\Gamma + \psi\rangle - F_h(w, \psi), \quad \forall\, \eta = (w, \psi) \in E_h. \tag{2.4}$$

然后变分不等式 (2.3) 可以写成如下形式:

$$DJ_h(\xi;\ \eta - \xi) \geqslant 0, \quad \xi = (u_h, \varphi_h) \in D_h, \quad \forall\, \eta = (w_h, \psi_h) \in D_h. \tag{2.5}$$

注 2.1 梯度投影方法 (GPM, 参见 [17–19]) 是求解类似 (2.5) 的变分不等式最简单的方法. 从文献 [18] 给出的结果, 我们可以推断求解 (2.5) 的 GPM 方法的收敛率依赖于二阶 Gâteaux 导数 $D^2J_h(z)(\cdot\ ;\ \cdot)$ (对于任意的 $z \in E_h$) 的条件数. 可以证明这个条件数是 $O(h^{-2})$ 阶 (利用 (4.1), (5.4) 和 (5.5) 式可推得). 求解 (2.5) 的 GPG 方法的收敛率在细网格上是非常慢的, 除非应用有效的预条件子. 因此, 我们将在下一节研究预处理的梯度投影方法 (PGPM).

3 预处理的梯度投影方法

在这一节, 我们研究求解问题 (2.5) 的 GPG 方法.

3.1 主要结果

设定义在 $E_h \times E_h$ 上的对称正定双线性型 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 表示 $DJ_h(\cdot\,;\,\cdot)$ 的预条件子. 为了利用预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 描述 PGPM, 我们需要与预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 相关的两个算子. 定义非线性 "剩余" 算子 $\mathbf{r}: E_h \to E_h$ 满足

$$B(\mathbf{r}\eta;\zeta) = DJ_h(\eta;\zeta), \quad \forall\,\zeta \in E_h. \tag{3.1}$$

投影算子 $P: E_h \to D_h$ 定义如下: 对于 $\eta \in E_h$, 泛函 $P\eta \in D_h$ 满足

$$B(P\eta-\eta,\ P\eta-\eta) = \min_{\zeta\in D_h} B(\zeta-\eta,\ \zeta-\eta). \tag{3.2}$$

在大多数的应用中, 精确投影 P 的计算代价非常高, 所以可以替换成近似投影 $\tilde{P}: E_h \to D_h$, 将在随后详细讨论.

算法 3.1 (预处理梯度投影方法) 设 $\xi_0 \in D_h$ 是初始泛函. 当得到 $\xi_k \in D_h$, 定义 $\xi_{k+1} \in D_h$:

$$\xi_{k+1} = \tilde{P}\tilde{\xi}_{k+1} \tag{3.3}$$

和

$$\tilde{\xi}_{k+1} = \xi_k - \tau\mathbf{r}\xi_k \in E_h, \quad k=0,1,\ldots, \tag{3.4}$$

其中待定的松弛因子 $\tau \geqslant 0$.

本篇文章的核心是预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 的构造, 所以我们需要分析 PGPM 方法的收敛性和预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 的谱之间的关系. 文章 [20] 讨论了二次泛函的情形. 以下我们将讨论当前的更复杂的情形. 以下我们令 $D^2J_h(z)(\cdot\,;\,\cdot): E_h \times E_h \to \mathbb{R}$ 表示泛函 $J_h(\cdot)$ 在点 $z \in E_h$ 的二阶 Gâteaux 导数. 假设预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 满足条件: 存在正数 c_0 和 C_0, 使得

$$c_0B(\xi;\xi) \leqslant D^2J_h(z)(\xi;\xi) \leqslant C_0B(\xi;\xi), \quad \forall\,\xi,\ z \in E_h. \tag{3.5}$$

令 $\|\cdot\|_B$ 表示由双线性型 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 生成的范数. 以下定理给出了算法 3.1 的收敛性质.

定理 3.1 设 $\xi \in D_h$ 是(2.5)的解, 泛函 ξ_k 由(3.3)和(3.4)给出. 近似投影 $\tilde{P}$ 满足

$$\|\tilde{P}\tilde{\xi}_{k+1} - \tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2 \leqslant \rho\|\tilde{\xi}_{k+1} - \xi_k\|_B^2 + (1-\rho)\|P\tilde{\xi}_{k+1} - \tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2, \tag{3.6}$$

其中 $\rho \in [0,1)$. 假设松弛因子 $\tau \in (0, 1/C_0]$, 则算法 3.1 是收敛的. 而且,

$$J_h(\xi_{k+1}) - J_h(\xi) \leqslant \rho_0(J_h(\xi_k) - J_h(\xi)), \quad k=0,1,\ldots, \tag{3.7}$$

其中收敛率 ρ_0 定义为

$$\rho_0 = 1 - \frac{c_0\tau(1-\rho)}{2}\min\left\{1, \frac{2c_0}{C_0}\right\}. \tag{3.8}$$

更进一步,

$$\|\xi_k - \xi\|_B^2 \leqslant \frac{2}{c_0}(\rho_0)^k(J_h(\xi_0) - J_h(\xi)), \quad k=1,2,\ldots \tag{3.9}$$

这个结果表明算法 3.1 的收敛率依赖于商 C_0/c_0, 即预条件系统的条件数. 在下一节, 我们将构造预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 使得条件数对网格大小不敏感.

注 3.1 显然, $\tau = 1/C_0$ 是松弛因子 τ 的最优选择. 为了选择最优松弛因子, 我们必须通过计算最大的广义特征值 (参见 [20]) 来精确估计常数 C_0. 当然, 我们希望松弛因子 τ 能够以某些简单的方式确定. 可是, 到目前为止还没有相关文献讨论过这个复杂的问题. 此类问题的一种可能的解决方案是通过每步迭代计算所得的可变松弛因子替换 τ.

3.2 分析

为了证明定理 3.1, 我们需要两个引理.

引理 3.1[20] 精确的投影算子 P 满足

$$\begin{aligned}&\|P\tilde{\xi}_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\xi_k-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2\\&\quad\leqslant-\max\left\{0,\min\left\{B(\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k;\ \xi-\xi_k),\frac{B(\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k;\ \xi-\xi_k)^2}{\|\xi-\xi_k\|_B^2}\right\}\right\}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

引理 3.2 设 c_0 和 C_0 是由(3.5)定义的常数. 则,

$$J_h(\xi_k)-J_h(\xi)\leqslant\max\left\{1,\frac{C_0}{2c_0}\right\}B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi).\tag{3.11}$$

证明 由一阶 Taylor 展式知存在函数 $\hat{z}_k\in D_h$, 使得

$$DJ_h(\xi_k;\ \xi_k-\xi)-DJ_h(\xi;\ \xi_k-\xi)=D^2J_h(\hat{z}_k)(\xi_k-\xi;\ \xi_k-\xi),$$

联立 (3.5) 得

$$DJ_h(\xi_k;\ \xi_k-\xi)-DJ_h(\xi;\ \xi_k-\xi)\geqslant c_0\|\xi_k-\xi\|_B^2.$$

由 (3.1) 知,

$$B(\mathbf{r}\xi;\ \xi_k-\xi)\leqslant B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi)-c_0\|\xi_k-\xi\|_B^2.\tag{3.12}$$

从 (3.18) 和 (3.1) 得

$$B(\mathbf{r}\xi;\ \xi_k-\xi)=DJ_h(\xi;\ \xi_k-\xi)\geqslant 0.$$

因而, 不等式 (3.12) 可导出

$$\|\xi_k-\xi\|_B^2\leqslant\frac{1}{c_0}B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi).\tag{3.13}$$

另一方面, 利用二阶 Taylor 展式得

$$J_h(\xi_k)-J_h(\xi)=DJ_h(\xi;\ \xi_k-\xi)+\frac{1}{2}D^2J(\bar{z}_k)(\xi_k-\xi;\ \xi_k-\xi),\tag{3.14}$$

其中 $\bar{z}_k\in D_h$.

利用 (3.14), 联立 (3.5) 和 (3.12), 我们得到

$$\begin{aligned}J_h(\xi_k)-J_h(\xi)&\leqslant B(\mathbf{r}\xi\ ;\ \xi_k-\xi)+\frac{1}{2}C_0\|\xi_k-\xi\|_B^2\\&\leqslant B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi)+\left(\frac{1}{2}C_0-c_0\right)\|\xi_k-\xi\|_B^2.\end{aligned}$$

而且, 利用 (3.13) 得到

$$J_h(\xi_k)-J_h(\xi)\leqslant B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi)+\max\left\{0,\frac{\frac{1}{2}C_0-c_0}{c_0}\right\}B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi),$$

这样便知结论成立. □

定理 3.1 的证明 利用二阶 Taylor 展式知存在函数 $z_k\in D_h$, 使得

$$J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)=DJ_h(\xi_k;\xi_{k+1}-\xi_k)+\frac{1}{2}D^2J(z_k)(\xi_{k+1}-\xi_k;\ \xi_{k+1}-\xi_k).$$

利用 (3.1) 和 (3.5), 得出

$$J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)\leqslant B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_{k+1}-\xi_k)+\frac{1}{2}C_0\|\xi_{k+1}-\xi_k\|_B^2. \tag{3.15}$$

因为 $B(\cdot\ ;\ \cdot)$ 是双线性的, 所以

$$\begin{aligned}B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_{k+1}-\xi_k)&=\frac{1}{\tau}B(\tau\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_{k+1}-\xi_k)\\&=\frac{1}{2\tau}[\|\tau\mathbf{r}\xi_k+\xi_{k+1}-\xi_k\|_B^2-(\|\tau\mathbf{r}\xi_k\|_B^2+\|\xi_{k+1}-\xi_k\|_B^2)].\end{aligned} \tag{3.16}$$

利用 (3.4), 有 $\tau\mathbf{r}\xi_k=\xi_k-\tilde{\xi}_{k+1}$. 因而, 方程 (3.16) 导出

$$B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_{k+1}-\xi_k)=\frac{1}{2\tau}(\|\xi_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2)-\frac{1}{2\tau}\|\xi_{k+1}-\xi_k\|_B^2.$$

将以上表达式代入 (3.15) 得到

$$\begin{aligned}J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)\leqslant&\frac{1}{2\tau}(\|\xi_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2)\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}-C_0\right)\|\xi_{k+1}-\xi_k\|_B^2.\end{aligned}$$

利用 τ 的选择, (3.3) 和 (3.6), 导出

$$\begin{aligned}J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)&\leqslant\frac{1}{2\tau}(\|\xi_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2)\\&=\frac{1}{2\tau}(\|\tilde{P}\tilde{\xi}_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2)\\&\leqslant\frac{1-\rho}{2\tau}(\|P\tilde{\xi}_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2).\end{aligned} \tag{3.17}$$

另一方面, 借助于 (3.4) 和 (3.13), 有 $B(\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k;\ \xi-\xi_k)=\tau B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi)\geqslant c_0\tau\|\xi_k-\xi\|_B^2$. 因而, 不等式 (3.10) 导出

$$\begin{aligned}\|P\tilde{\xi}_{k+1}-\tilde{\xi}_{k+1}\|_B^2-\|\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k\|_B^2&\leqslant-\min\{1,c_0\tau\}B(\tilde{\xi}_{k+1}-\xi_k;\ \xi-\xi_k)\\&\leqslant-\min\{1,c_0\tau\}\tau B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi)\\&=-c_0\tau^2B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi).\end{aligned}$$

将此代入 (3.17) 得到 (注意到 $\rho<1$ 和 $\tau>0$)

$$J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)\leqslant-\frac{c_0\tau(1-\rho)}{2}B(\mathbf{r}\xi_k;\ \xi_k-\xi),$$

结合 (3.11), 得到

$$J_h(\xi_{k+1})-J_h(\xi_k)\leqslant-\frac{c_0\tau(1-\rho)}{2}\min\left\{1,\frac{2c_0}{C_0}\right\}(J_h(\xi_k)-J_h(\xi)).$$

而且, (3.7) 也成立. 又知 $DJ_h(\xi;\ \xi_k-\xi)\geqslant 0$, 所以不等式 (3.9) 是 (3.5), (3.7) 和 (3.14) 的直接推论. □

3.3 算法实现

在这一节, 我们讨论如何有效地求解极小化问题 (3.2).

如果预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 没有特殊结构, 利用逐点 GPM 方法求解 (3.2) 效率非常低.

假设 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 可以分解为

$$B(\xi;\ \eta) = B_\Omega(u,w) + B_s(\varphi,\psi), \quad \xi=(u,\varphi), \eta=(w,\psi)\in E_h, \tag{3.18}$$

其中 $B_\Omega(\cdot,\cdot): V_h(\Omega)\times V_h(\Omega)\to\mathbb{R}$ 和 $B_s(\cdot,\cdot): \tilde V_h(\Gamma_s)\times\tilde V_h(\Gamma_s)\to\mathbb{R}$. 令

$$\tilde K = \{\psi\in\tilde V_h(\Gamma_s): \psi\geqslant 0 \text{ a.e. on } \Gamma_s\},$$

并定义局部投影算子 $P_s:\tilde V_h(\Gamma_s)\to\tilde K$

$$B_s(P_s\varphi-\varphi,\ P_s\varphi-\varphi) = \min_{\psi\in\tilde K} B_s(\psi-\varphi,\ \psi-\varphi). \tag{3.19}$$

设 $\eta=(v,\ \varphi)\in E_h$ 给定. 因为凸集 D_h 中的元素的第一个分量可以在线性空间中任意选取, 所以取 $P\eta=(v,\ P_s\varphi)$ 和 $\tilde P\eta=(v,\ \tilde P_s\varphi)$, 其中 $\tilde P_s:\tilde V_h(\Gamma_s)\to\tilde K$ 是某些局部近似投影. 这意味着在假设 (3.18) 下, 我们只需要近似求解局部极小化问题 (3.19).

为了精确描述算子 $\tilde P_s$, 设 $\xi_k=(u_k\ ,\varphi_k)\in D_h$ 给定, $\tilde\xi_{k+1}=(u_{k+1},\ \tilde\varphi_{k+1})$ 由 (3.4) 给出. 利用 $\tilde V_h(\Gamma_s)$ 的标准的节点基函数, 设 M_s 是双线性型 $B_s(\cdot,\cdot)$ 的刚度矩阵. 为简单起见, 我们利用函数自身的相同概念表示 $\tilde V_h(\Gamma_s)$ 中函数的坐标向量. 设 $\hat P:\mathbb{R}^{N_s}\to K\subset\mathbb{R}^{N_s}$ 是逐点投影算子, 其中 N_s 是子空间 $\tilde V_h(\Gamma_s)$ 的维数, K 是凸集, 其元素分量非负. 定义逐点投影迭代:

$$\varphi_{k+1}^{i+1} = \hat P(\varphi_{k+1}^i + \theta M_s(\tilde\varphi_{k+1}-\varphi_{k+1}^i)), \quad i=0,1,\ldots \tag{3.20}$$

其中, 松弛因子 θ 适当选择 (参见 [21] 和 [19]). 为了满足条件 (3.6), 我们选择 $\varphi_{k+1}^0=\varphi_k$, 并取 $\tilde P_s\tilde\varphi_{k+1}=\varphi_{k+1}^n$, 其中 $n\approx\mathrm{cond}(M_s)$. 可以证明 (参见 [20])

$$\|\tilde P_s\tilde\varphi_{k+1}-\tilde\varphi_{k+1}\|_{M_s}^2 \leqslant \rho\|\tilde\varphi_{k+1}-\varphi_k\|_{M_s}^2 + (1-\rho)\|P_s\tilde\varphi_{k+1}-\tilde\varphi_{k+1}\|_{M_s}^2,$$

其中, $\rho\approx e^{-1}$.

在 "内部" 迭代 (3.20) 中, 我们只需要矩阵与向量的乘积. 因为 M_s 是低阶阵, 迭代 (3.20) 的代价很小. 因而, 内部迭代 (3.20) 的整体代价依赖于 M_s 的条件数.

注 3.2 从定理 3.1 和以上讨论, 我们推测出预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 具有以下性质: (1) 当 $h\to 0$, 由 (3.5) 定义的正数 c_0 和 C_0 满足 $C_0/c_0\ll O(h^{-2})$, 其中 C_0/c_0 是 $D^2J_h(z)(\cdot\,;\,\cdot)$ $(z\in E_h)$ 的条件数; (2) 分解 (3.18) 成立; (3) $\mathrm{cond}(M_s)\ll O(h^{-2})$ 当 $h\to 0$.

注 3.3 利用 (2.4) 给出的泛函 DJ_h, 分别定义算子 $R_\Omega: E_h\to V_h(\Omega)$ 和 $R_s: E_h\to\tilde V_h(\Gamma_s)$,

$$B_\Omega(R_\Omega(u,\varphi),w) = DJ_h(u,\varphi;w,0), \quad \forall\, w\in V_h(\Omega)$$

和

$$B_s(R_s(u,\varphi),\psi) = DJ_h(u,\varphi;0,\psi), \quad \forall\,\psi\in\tilde V_h(\Gamma_s).$$

因而, 算法 3.1 可以分解成

$$u_{k+1} = u_k - \tau R_\Omega(u_k,\varphi_k), \quad k=0,1,\ldots \tag{3.21}$$

和

$$\varphi_{k+1} = \tilde{P}_s \tilde{\varphi}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.22}$$

其中

$$\tilde{\varphi}_{k+1} = \varphi_k - \tau R_s(u_k, \varphi_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

因而, 本节讨论的方法的本质在于将大型的变分不等式 (2.5) 分解成两个子问题, 而这两个子问题可以分别通过迭代 (3.21) 和 (3.22) 有效求解。显然该分解与空间直和分解 $D_h = (V_h(\Omega) \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \tilde{K})$ 有关.

4 预条件子的构造

上一节研究了求解 (2.5) 的带预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 的预处理梯度投影方法. 这一节, 我们考虑预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 的构造.

4.1 辅助的双线性型

泛函 G 的二阶 Gâteaux 导数为 (参见 [4] 和 [11])

$$D^2G(w)(u, v) = (\tilde{p}(\nabla w)\nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \forall\, w,\ u,\ v \in H^1(\Omega),$$

其中, $\tilde{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是 $x \to \rho(|x|)x$ 的 Jacobian 矩阵:

$$\tilde{p}(x) = \rho(|x|)I_{2\times 2} + |x|\rho'(|x|)\frac{x \cdot x^t}{|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

则从定义在 p 上的假设知,

$$\alpha|u|^2_{1,\Omega} \leqslant D^2G(w)(u, u), \quad \forall\, w,\ u \in H^1(\Omega)$$

和

$$D^2G(w)(u, v) \leqslant \beta|u|_{1,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega}, \quad \forall\, w,\ u,\ v \in H^1(\Omega).$$

因而,

$$\begin{aligned} &\alpha|u|^2_{1,\Omega} + \langle S_h(u|_\Gamma + \varphi), u|_\Gamma + \varphi\rangle \\ &\qquad \leqslant D^2J_h(\zeta)(\xi\,;\,\xi) \leqslant \beta|u|^2_{1,\Omega} + \langle S_h(u|_\Gamma + \varphi), u|_\Gamma + \varphi\rangle, \quad \forall\, \zeta, \xi = (u,\ \varphi) \in E_h. \end{aligned} \tag{4.1}$$

所以, 我们只需要构造双线性型的预条件子,

$$A(\xi;\ \eta) = (\nabla u, \nabla w) + \langle S_h(u|_\Gamma + \varphi), w|_\Gamma + \psi\rangle, \quad \xi = (u, \varphi),\ \eta = (w, \psi) \in E_h. \tag{4.2}$$

在构造双线性型 A 的预条件子时我们面对以下三个困难: (1) 交界面变量 φ 与内部变量耦合, 这将影响逐点投影 (参见第 3 节); (2) 边界积分算子将生成稠密刚度矩阵; (3) 因为不存在 Γ 上的 Dirichlet 边界条件, 所以当消除对称正定算子 S_h 时, A 不是正定的.

为了解决这些困难, 我们需要从 $u|_\Gamma$ 中分离 φ, 并且利用能够生成稀疏刚度矩阵的正定算子替换 S_h. 以下预条件子的构造思想借鉴了参考文献 [22].

4.2 区域分解和某些局部空间

因为 Γ 是交界面, 其中 u_h 和 φ_h 的值是未知的, 所以我们考虑非重叠的区域分解预条件子.

我们将区域 Ω 分解成三角形或者四边形 $\{\omega_i\}_{i=1}^L$, 使得:

(1) 所有子区域 ω_i 在下述意义下大小均为 d, 存在不依赖于 d 的常数 α_1 和 α_2, 使得每个 ω_i 包含直径为 $\alpha_1 d$ 的圆;

(2) 对于 $i \neq j$, 如果两条边 $\gamma' \subset \partial\omega_i$ 和 $\gamma'' \subset \partial\omega_j$ 拥有一个共同点, 则 $\overline{\gamma'} = \overline{\gamma''} = \overline{\omega}_i \cap \overline{\omega}_j = \gamma_{ij}$. 设 $\gamma = \bigcup \gamma_{ij} \cup \Gamma$ 表示整个交界面;

(3) 每个子区域 ω_i 包含直径为 h 的拟一致三角形元或者四边形元.

设 $V_h(\omega_i)$ 表示定义在 ω_i 上的协调线性有限元空间, 如第 2 节所定义. 我们假设第 2 节介绍的网格是由以上非重叠区域分解法生成. 而且,

$$V_h(\Omega) = (V_h(\omega_1) \times V_h(\omega_2) \times \cdots \times V_h(\omega_L)) \cap C(\Omega_0).$$

对于 $w \in V_h(\Omega)$, 设 $w_H \in V_h(\Omega)$ 表示 $w|_\gamma$ 的离散调和延拓, 满足:

$$\begin{cases} (\nabla(w_H|_{\omega_i}), \nabla\psi)_{\omega_i} = 0, \quad \forall\, \psi \in V_h(\omega_i) \cap H_0^1(\omega_i), \quad i = 1, \ldots, L, \\ w_H = w, \qquad \text{on} \quad \gamma. \end{cases}$$

定义

$$w_p = w - w_H \in V_h(\Omega) \cap (H_0^1(\omega_1) \times H_0^1(\omega_2) \times \cdots \times H_0^1(\omega_L)).$$

定义棱子空间和顶点子空间分别为

$$V_h^0(\Omega) = \{w \in V_h(\Omega) : w \text{ 在}\omega_{\mathrm{i}} \text{ 的每个顶点处为}0\}$$

和

$$V_d(\Omega) = \{w \in V_h(\Omega) : w|_{\gamma_{ij}} \text{ 是}\gamma_{\mathrm{ij}} \text{ 上的线性函数}\},$$

其中它们均为与初始分解相关的线性有限元空间.

显然, 对于任意 $w \in V_h(\Omega)$, 存在唯一分解式 $w_H = w_e + w_v$ 使得 $w_e \in V_d(\Omega)$, $w_v \in V_h^0(\Omega)$. 令

$$V_h^0(\gamma_{ij}) = \{w|_{\gamma_{ij}} : w \in V_h^0(\Omega)\}.$$

4.3 主要结果

一般地, 我们定义算子 $\Lambda_0 : V_h^0(\gamma_{ij}) \to V_h^0(\gamma_{ij})$ 如下,

$$\langle \Lambda_0 \varphi, \psi \rangle_{\gamma_{ij}} = \langle \varphi', \psi' \rangle_{\gamma_{ij}}, \quad \forall\, \psi \in V_h^0(\gamma_{ij}).$$

对于每一条边 γ_{ij}, 设 v_i 和 v_j 表示边 γ_{ij} 的两个端点. $N_d(\Gamma)$ 表示 Γ 上的初始节点集合, $\{v_{si}\}_{i=1}^{n_s}$ 表示 Γ_s 上的初始节点集合. 定义双线性型如下:

$$\begin{aligned} B_\Omega(u_H, w_H) = \sum_{\gamma_{ij}} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} u_e, w_e \rangle_{\gamma_{ij}} + \Bigg[\sum_{\gamma_{ij}} (u_v(v_i) - u_v(v_j))(w_v(v_i) - w_v(v_j)) \\ + d \sum_{v_i \in N_d(\Gamma)} u_v(v_i) \cdot w_v(v_i) \Bigg], \quad u, w \in V_h(\Omega) \end{aligned}$$

和

$$B_s(\varphi,\psi)=\sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s}\langle\Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e,\psi_e\rangle_{\gamma_{ij}}+\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1}\frac{(\varphi_v(v_{si})-\varphi_v(v_{sj}))(\psi_v(v_{si})-\psi_v(v_{sj}))}{(j-i)^2}$$
$$+\sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v(v_{si})\psi_v(v_{si}),\quad \varphi,\psi\in\tilde{V}_h(\Gamma_s).$$

我们按下式定义双线性型 $D^2J_h(\zeta)(\cdot\,;\,\cdot)$ 的预条件子,

$$\begin{aligned}&B(\xi;\ \eta)=(\nabla u_p,\nabla w_p)+B_\Omega(u_H,w_H)+B_s(\varphi,\psi),\\&\xi=(u,\varphi),\qquad \eta=(w,\psi)\in E_h.\end{aligned}\tag{4.3}$$

以下结果表明此条件子是非常有效的.

定理 4.1 设双线性型 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 由 (4.3) 给出. 则存在不依赖于 h 和 d 的常数 c_1 和 C_1, 使得

$$c_1(1+\ln^2(d/h))^{-1}B(\xi;\ \xi)\leqslant D^2J_h(\zeta)(\xi;\ \xi)\leqslant C_1B(\xi;\ \xi),\quad \forall\,\xi,\zeta\in E_h.\tag{4.4}$$

这意味着由 (3.5) 定义的常数 c_0 和 C_0 满足 $C_0/c_0\leqslant 1+\ln^2(d/h)$, 即预条件系统的条件数为 $O(1+\ln^2(d/h))$.

从定理 3.1 和 4.1 知, 具有预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ 的算法 3.1 具有快速收敛性.

定理 4.2 存在不依赖于 h 和 d 的常数 c_2 和 C_2, 使得

$$c_2\min\{1,d^{-1}\}\|\varphi\|_{0,\Gamma_s}^2\leqslant B_s(\varphi,\varphi)\leqslant C_2\max\{h^{-1}(1+\ln^2(d/h))\}\|\varphi\|_{0,\Gamma_s}^2,\quad \forall\,\varphi\in\tilde{V}(\Gamma_s).\tag{4.5}$$

即

$$\mathrm{cond}(M_s)=O(h^{-1}(1+\ln^2(d/h))).\tag{4.6}$$

注 4.1 显然对任意 $\varepsilon>0$, 成立 $h^\varepsilon\ln^2(d/h)\to 0$ 当 $h\to 0$. 因而, 预条件子拥有注 3.2 给出的性质 (参见注 2.1).

注 4.2 局部的预条件子 M_s 可以由文献 [20] 中提到的多水平 Schur 补预条件子取代, 其条件数为 $O(h^{-1})$. 然而, 当实现这样的多水平预条件子时, 需要求解线性代数方程组 (参见 [20]).

这些定理会在下一节给出证明. 现在我们描述预条件子 $B(\cdot\,;\,\cdot)$ (参见 [22]) 的性质. 给定 $g(\cdot,\cdot):E_h\to\mathbb{R}$, $(u,\varphi)\in E_h$ 表示如下问题的解:

$$B(u,\varphi;w,\psi)=g(w,\psi),\quad \forall(w,\psi)\in E_h.$$

则 (u,φ) 可以按如下方式计算:

算法 4.1 步骤 1: 并行求解 $u_p|_{\omega_i}\in V_h(\omega_i)\cap H_0^1(\omega_i)$ $(i=1,\ldots,L)$ 使得

$$(\nabla(u_p|_{\omega_i}),\nabla w)_{\omega_i}=g(w,0),\quad \forall\,w\in V_h(\omega_i)\cap H_0^1(\omega_i);$$

步骤 2: 并行求解 $u_e|_{\gamma_{ij}}\in V_h^0(\gamma_{ij})$ 和 $\varphi_e|_{\gamma_{ij}}\in V_h^0(\gamma_{ij})$, 其中 $\gamma_{ij}\subset\Gamma_s$ 使得

$$\langle\Lambda_0^{\frac{1}{2}}u_e|_{\gamma_{ij}},w\rangle_{\gamma_{ij}}=g(\tilde{w},0)-(\nabla u_p,\nabla\tilde{w}),\quad \forall\,w\in V_h^0(\gamma_{ij})$$

和

$$\langle\Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e|_{\gamma_{ij}},\psi\rangle_{\gamma_{ij}}=g(0,\psi),\quad \forall\,\psi\in V_h^0(\gamma_{ij})\cap\tilde{V}_h(\Gamma_s).$$

其中, $\tilde{w} \in V_h(\Omega)$ 是 w 的零延拓;

步骤 3: 求解 $u_v(v_i)$ 和 $\varphi_v(v_{si})$ 使得

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma_{ij}}(u_v(v_i)-u_v(v_j))(w(v_i)-w(v_j))+d\sum_{v_i\in N_d(\Gamma_0)}u_v(v_i)\cdot w(v_i)\\ =g(w,0)-(\nabla u_p,\nabla w),\quad \forall\, w\in V_d(\Omega)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1}\frac{(\varphi_v(v_{si})-\varphi_v(v_{sj}))(\psi(v_{si})-\psi(v_{sj}))}{(j-i)^2}+\sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v(v_{si})\psi(v_{si})\\ &\quad=g(0,\psi),\quad \forall\,\psi\in V_d(\Omega)\cap\tilde{V}_h(\Gamma_s);\end{aligned}$$

步骤 4: 求解离散的调和延拓 u_H 使得

$$\begin{cases}(\nabla u_H,\nabla w)_{\omega_i}=0,\quad \forall\, w\in V_h(\omega_i)\cap H_0^1(\omega_i)\ (i=1,\ldots,L),\\ u_H=u_e+u_v,\quad \text{on } \gamma;\end{cases}$$

步骤 5: 取 $u=u_p+u_H$ 和 $\varphi=\varphi_e+\varphi_v$.

注 4.3 从算法 4.1 我们可以观察到本节构造的预条件子具有如下优点: (1) 因为第 2 步可以由快速算法完成 (参见 [22]), 所以算法可以容易的并行求解; (2) 算法不需要计算与 S_h 相关的边界积分方程; (3) 未知函数 u 和 φ 可以独自求解.

注 4.4 在第 3 步的第 1 个方程中, 第二项求和是必要的, 否则相应的刚度矩阵仅为半正定.

5 条件数的估计

5.1 $H^{\frac{1}{2}}$- 范数和相应的离散范数

为了证明定理 4.1 和 4.2, 我们需要定义 $H^{\frac{1}{2}}$- 范数. 设 $\omega\subset\mathbb{R}^2$ 表示边界为 $\partial\omega$ 的有界区域, 并且 $\Sigma\subseteq\partial\omega$. 对于 $\varphi\in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, 定义

$$\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Sigma}=(l^{-1}\|\varphi\|_{0,\Sigma}^2+|\varphi|_{\frac{1}{2},\Sigma}^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中 l 表示 Σ 的长度, 并且

$$|\varphi|_{\frac{1}{2},\Sigma}^2=\int_\Sigma\int_\Sigma\frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^2}ds(x)ds(y).$$

对于 $\Sigma\subset\partial\omega$, 空间 $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ 按如下方式定义,

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)=\{\varphi\in L^2(\partial\omega):\operatorname{supp}\varphi\subset\Sigma,\tilde{\varphi}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\omega)\},$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 表示 v 向 $\partial\omega\backslash\Sigma$ 的零延拓. 可以证明对于 $\varphi\in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, 成立

$$|\tilde{\varphi}|_{\frac{1}{2},\partial\omega}\simeq\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)},$$

其中

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2=\int_\Sigma\int_\Sigma\frac{(\varphi(x)-\varphi(y))^2}{|x-y|^2}ds(x)ds(y)+\int_\Sigma\frac{\varphi^2(x)}{\operatorname{dist}(x,\partial\Sigma)}ds(x).$$

在以下讨论中我们还需要一些基本的范数等价结论. 设 $\Sigma \subseteq \Gamma$, N_b 表示 Σ 上的节点集合, 其中 $b=h$ 或者 $b=d$. 对于任意的 $\varphi \in V_b(\Omega)|_\Sigma$, 成立

$$\|\varphi\|_{0,\Sigma}^2 \simeq b \sum_{x_i \in N_b} \varphi^2(x_i), \quad |\varphi|_{\frac{1}{2},\Sigma}^2 \simeq b^2 \sum_{\substack{x_i, x_j \in N_b \\ x_i \neq x_j}} \frac{(\varphi(x_i)-\varphi(x_j))^2}{|x_i - x_j|^2}$$

和

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 \simeq b^2 \sum_{\substack{x_i, x_j \in N_b \\ x_i \neq x_j}} \frac{(\varphi(x_i)-\varphi(x_j))^2}{|x_i - x_j|^2} + b \sum_{x_i \in N_b} \left(\frac{1}{|x^0 - x_i|} + \frac{1}{|x^1 - x_i|} \right) \varphi^2(x_i),$$

其中, x^0 和 x^1 表示 Σ 的端点.

5.2 辅助结果

在以下讨论中, 设 C 表示不依赖于 h 和 d 的正常数, 但是在不同场合可能取不同值.

以下三条结论在区域分解方法中是显然的.

引理 5.1[23] 设 $\gamma_0 \subset \Gamma$ (或者 $\partial\omega_i$) 为长度为 l 的曲线段. 则对于任意的 $\varphi \in V_h(\Gamma)|_{\gamma_0}$ (或者 $V_h(\partial\omega_i)|_{\gamma_0}$), 成立以下不等式,

$$\|\varphi\|_{0,\infty,\gamma_0}^2 \leqslant C \ln(l/h) \|\varphi\|_{\frac{1}{2},\gamma_0}^2. \tag{5.1}$$

引理 5.2[22] 设 γ_0 和 φ 由引理 5.1 定义。假设 $\operatorname{supp} \varphi \subset \gamma_0$. 则

$$\int_{\gamma_0} \frac{(\varphi(x))^2}{\operatorname{dist}(x, \partial\gamma_0)} ds(x) \leqslant C \ln(l/h) \|\varphi\|_{0,\infty,\gamma_0}^2. \tag{5.2}$$

引理 5.3[22] 设算子 Λ_0 由 4.3 小节定义. 则对于任意的 $w \in V_h(\Omega)$, 成立

$$\sum_{\gamma_{ij} \subset \partial\omega_k} [\langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} w_e, w_e \rangle_{\gamma_{ij}} + (w_v(v_i) - w_v(v_j))^2] \leqslant C(1 + \ln^2(d/h)) |w_H|_{1,\omega_k}^2, \quad 1 \leqslant k \leqslant L. \tag{5.3}$$

以下两条结论表明范数 $\langle S_h \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Gamma}$ 是等价的.

引理 5.4[1] 对于任意的 $\mu \in V_h(\Gamma)$, 成立

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \leqslant C \langle S_h \mu, \mu \rangle. \tag{5.4}$$

引理 5.5 对于任意的 $\mu \in V_h(\Gamma)$, 成立

$$\langle S_h \mu, \mu \rangle \leqslant C \|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2. \tag{5.5}$$

证明 利用 S_h 的定义, 有

$$\langle S_h \mu, \mu \rangle = \frac{1}{2} (\langle W\mu, \mu \rangle_\Gamma + \langle (j_h^* V j_h)^{-1} j_h^* (K-I)\mu, j_h^*(K-I)\mu \rangle). \tag{5.6}$$

令 $g_h = j_h^*(K-I)\mu$, $\chi_h = (j_h^* V j_h)^{-1} g_h$。则 χ_h 满足

$$(j_h^* V j_h) \chi_h = g_h. \tag{5.7}$$

设 $P_h : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to V_h(\Gamma)$ 是 L^2 投影算子. 利用 j_h 和 j_h^* 的定义, 方程 (5.7) 可以写成 (参见 [1])

$$P_h V \chi_h = P_h g,$$

其中 $g=(K-I)\mu$. 因而, χ_h 是以下方程的 Galerkin 有限元解,

$$V\chi=g.$$

利用 [14] 给出的结论知

$$\|\chi_h\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}\leqslant C\|\chi\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma}\leqslant C\|g\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}.$$

因而, 利用 Cauchy 不等式知

$$\langle(j_h^*Vj_h)^{-1}j_h^*(K-I)\mu,j_h^*(K-I)\mu\rangle=\langle\chi_h,g\rangle_\Gamma\leqslant C\|\chi_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\cdot\|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\leqslant C\|g\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}.$$

所以, 方程 (5.6) 导出 (注意到 $g=(K-I)\mu$)

$$\langle S_h\mu,\mu\rangle\leqslant C(\|W\mu\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}\cdot\|\mu\|_{\frac{1}{2},\Gamma}+\|(K-I)\mu\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}).\tag{5.8}$$

文献 [24] 已证明算子

$$W:H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\quad 和\quad K:H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

是一致有界的, 结合 (5.8) 知结论成立. □

对于 $\varphi\in V_h(\Gamma)$, 设 $w_\varphi\in V_h(\Omega)$ 表示 φ 的离散的调和延拓. 则

$$|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}\leqslant C|w_\varphi|^2_{1,\Omega},\quad\forall\,\varphi\in V_h(\Gamma),\tag{5.9}$$

此不等式是迹定理的重要情形. 以下引理是 (5.5) 和 (5.9) 的直接推论.

引理 5.6 对于任意的 $\varphi\in V_h(\Gamma)$, 成立

$$\langle S_h\varphi,\varphi\rangle\leqslant C(|w_\varphi|^2_{1,\Omega}+\|\varphi\|^2_{0,\Gamma}).\tag{5.10}$$

取 $V_d(\Gamma)=V_d(\Omega)|_\Gamma$. 对于 $\varphi\in V_h(\Gamma)$, 设 $\varphi_v\in V_d(\Gamma)$ 是满足对于任意的 $v_k\in N_d(\Gamma)$, 均有 $\varphi_v(v_k)=\varphi(v_k)$ 的函数. 为了利用 $\langle\varphi_v,\psi_v\rangle$ 替换 $\langle S_h\varphi,\psi\rangle$, 我们需要另外的结论.

引理 5.7 对于任意的 $\varphi\in V_h(\Gamma)$, 成立以下不等式,

$$\|\varphi_v\|^2_{0,\Gamma_0}\leqslant Cd\ln(d/h)\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}.\tag{5.11}$$

证明 设 $\{\gamma_{0i}\}_{i=1}^{L_0}$ 表示与 Γ 的初始分解相关的曲线段集合. 从 $H^{\frac{1}{2}}$- 半范数可以推得

$$|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}\geqslant\sum_{i=1}^{L_0}|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{0i}}.$$

因而, 我们只需要证明

$$\|\varphi_v\|^2_{0,\gamma_{0i}}\leqslant Cd\ln(d/h))\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{0i}},\quad i=1,\ldots,L_0.\tag{5.12}$$

设 γ_{0i} 的端点分别由 v_{0i}^1 和 v_{0i}^2 表示. 由离散的等价范数知

$$\|\varphi_v\|^2_{0,\gamma_{0i}}\simeq d(\varphi(v_{0i}^1)^2+\varphi(v_{0i}^2)^2).\tag{5.13}$$

注意到

$$\varphi(v_{0i}^1)^2+\varphi(v_{0i}^2)^2\leqslant 2\|\varphi\|^2_{0,\infty,\gamma_{0i}},$$

结合 (5.1) 和 (5.13), 可以推得 (5.12). □

对 $\varphi \in V_h(\gamma_{ij})$, 设 $\gamma(\varphi)$ 表示定义在 γ_{ij} 上的函数 φ 的平均值.

引理 5.8 设 $\gamma_{ij} \subset \Gamma_s$ 和 $\varphi \in V_h(\gamma_{ij})$. 假设对某些点 $p \in \gamma_{ij}$, 成立 $\varphi(p) = 0$. 则

$$\|\varphi\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} \leqslant C\ln(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}}. \tag{5.14}$$

证明 利用三角不等式得

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} &\leqslant 2(\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} + |\gamma(\varphi)|^2)\\ &= 2(\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} + |\varphi(p)-\gamma(\varphi)|^2)\\ &\leqslant 4\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

另一方面, 利用引理 5.1 和 Friedrichs 不等式, 成立以下不等式

$$\begin{aligned}\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} &\leqslant C\ln(d/h)(|\varphi-\gamma(\varphi)|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} + d^{-2}\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\gamma_{ij}})\\ &\leqslant C\ln(d/h)|\varphi-\gamma(\varphi)|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}}\\ &= C\ln(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}},\end{aligned} \tag{5.16}$$

联立 (5.15) 得 (5.14). □

引理 5.9 设 $\varphi \in V_h(\gamma_{ij})$. 则我们有 (1)

$$|\varphi_v|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} \leqslant C\ln(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}}, \tag{5.17}$$

和 (2)

$$\|\varphi_e\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} \leqslant C\ln(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}}. \tag{5.18}$$

证明 (1) 设 v^1 和 v^2 表示 γ_{ij} 的端点. 利用等价的离散范数知,

$$|\varphi_v|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} \leqslant C|\varphi(v^1)-\varphi(v^2)|^2. \tag{5.19}$$

取 $\hat{\varphi} = \varphi - \varphi(v^2)$. 显然 $\hat{\varphi}(v^2) = 0$. 因而, 由 (5.14) 知

$$|\varphi(v^1)-\varphi(v^2)|^2 \leqslant \|\hat{\varphi}\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} \leqslant C\ln(d/h)|\hat{\varphi}|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} = C\ln(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}}, \tag{5.20}$$

联立 (5.19) 便得到所证结论.

(2) 因为 $\varphi_e(v^1) = 0$, 利用 (5.15) 得

$$\begin{aligned}\|\varphi_e\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} &\leqslant 4\|\varphi_e-\gamma(\varphi_e)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}}\\ &\leqslant 4(\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} + \|\varphi_v-\gamma(\varphi_v)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}})\\ &\leqslant 4(\|\varphi-\gamma(\varphi)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}} + \|\varphi(v^1)-\varphi(v^2)\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}}).\end{aligned} \tag{5.21}$$

其中, 我们利用了 φ_v 是定义在 γ_{ij} 上的线性函数.

利用 (5.21), 结合 (5.16) 和 (5.20), 我们可以推导出 (5.18). □

引理 5.10 以下不等式成立,

$$B_s(\varphi,\varphi) \leqslant C(1+\ln^2(d/h))\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}, \quad \forall\, \varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma_s). \tag{5.22}$$

证明 因为当 $d \to 0^+$ 时, 初始节点数 $n_s \to +\infty$, 所以此不等式不能由已知的结论直接推得. 显然

$$\langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} \varphi_e, \varphi_e \rangle_{\gamma_{ij}} \simeq \|\varphi_e\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_{ij})}. \tag{5.23}$$

因而, 利用 (5.2) 知

$$\begin{aligned}\langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} \varphi_e, \varphi_e \rangle_{\gamma_{ij}} &\leqslant C(|\varphi_e|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} + \ln(d/h)\|\varphi_e\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}}) \\ &\leqslant C(|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} + |\varphi_v|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} + \ln(d/h)\|\varphi_e\|^2_{0,\infty,\gamma_{ij}}).\end{aligned}$$

又由 (5.15) 和 (5.18) 可以得到

$$\sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} \varphi_e, \varphi_e \rangle_{\gamma_{ij}} \leqslant C\ln^2(d/h) \sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} |\varphi|^2_{\frac{1}{2},\gamma_{ij}} \leqslant C\ln^2(d/h)|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_s} \leqslant C\ln^2(d/h)\|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)}. \tag{5.24}$$

另一方面, 根据等价的离散范数和三角不等式知,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1} \frac{(\varphi_v(v_i)-\varphi_v(v_j))^2}{(j-i)^2} + \sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v^2(v_i) \\ &\quad\simeq |\varphi_v|^2_{\frac{1}{2},\Gamma_s} + \int_{\Gamma_s} \frac{(\varphi_v(x))^2}{\mathrm{dist}(x,\partial\Gamma_s)} ds(x) \\ &\quad\simeq \|\varphi_v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} \leqslant C\Big(\|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} + \|\varphi_e\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)}\Big).\end{aligned} \tag{5.25}$$

可以直接证明

$$\|\varphi_e\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} \leqslant \sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \|\varphi_e\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\gamma_{ij})}. \tag{5.26}$$

因而, 不等式 (5.25) 导出 (注意 (5.23))

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1} \frac{(\varphi_v(v_i)-\varphi_v(v_j))^2}{(j-i)^2} + \sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v^2(v_i) \\ &\quad\leqslant C\Big(\|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} + \sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} \varphi_e, \varphi_e \rangle_{\gamma_{ij}}\Big).\end{aligned}$$

所以, 根据 (5.24) 可以推得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1} \frac{(\varphi_v(v_i)-\varphi_v(v_j))^2}{(j-i)^2} + \sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v^2(v_i) \\ &\quad\leqslant C(1+\ln^2(d/h))\|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)},\end{aligned}$$

联立 (5.24), 便得所证结论. □

引理 5.11 对于任意的 $\varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma_s)$, 成立以下不等式,

$$\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant CB_s(\varphi,\varphi). \tag{5.27}$$

证明 注意到 $\varphi|_{\Gamma_t} = 0$, 利用 Friedrichs 不等式和三角不等式知,

$$\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant C|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \simeq \|\varphi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} \leqslant C(\|\varphi_v\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)} + \|\varphi_e\|^2_{H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)}),$$

结合 (5.25), (5.26) 和 (5.23), 便得 (5.27). □

以下结论是从 $u|_\Gamma$ 中分离变量 φ 的基础.

引理 5.12 对于任意的 $u \in V_h(\Omega)$ 和 $\varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma)$, 成立以下不等式,

$$\|u_H\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant C(|u_H|^2_{1,\Omega} + \langle S_h(u|_\Gamma + \varphi), u|_\Gamma + \varphi\rangle), \tag{5.28}$$

其中 $u_H \in V_h(\Omega)$ 是 $u|_\Gamma$ 的离散调和延拓.

证明 显然

$$|u_H|^2_{1,\Omega} \simeq |u|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}.$$

利用 (5.4), 能够证明

$$\|u_H\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant C(|u_H|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|u|_\Gamma + \varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}). \tag{5.29}$$

因为 $\varphi|_{\Gamma_t} = 0$, 根据 Friedrichs 不等式知

$$\|\varphi\|^2_{0,\Gamma} \leqslant C|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}.$$

因而,

$$\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant C|\varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant C(|u|_\Gamma + \varphi|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + |u|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}) \leqslant C(|u_H|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|u|_\Gamma + \varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}). \tag{5.30}$$

而且,

$$\|u_H\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant 2(\|u_H|_\Gamma + \varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}) \leqslant C(\|u|_\Gamma + \varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} + |u_H|^2_{\frac{1}{2},\Gamma}),$$

联立 (5.30), 得 (5.29). □

引理 5.13 存在不依赖于 h 的常数 c 和 C, 使得

$$cd^{-1}\|\varphi_e\|^2_{0,\Gamma_s} \leqslant \sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e, \varphi_e\rangle_{\gamma_{ij}} \leqslant C(1+\ln^2(d/h))h^{-1}\|\varphi\|^2_{0,\Gamma_s}, \quad \forall \varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma_s). \tag{5.31}$$

证明 对于任意的 $\varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma_s)$, 利用引理 5.10 和逆估计知

$$\sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e, \varphi_e\rangle_{\gamma_{ij}} \leqslant B_s(\varphi,\varphi) \leqslant C(1+\ln^2(d/h))\|\varphi\|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \leqslant Ch^{-1}(1+\ln^2(d/h))\|\varphi\|^2_{0,\Gamma}.$$

因而, 我们只需证明

$$\sum_{\gamma_{ij}\subset\Gamma_s} \langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e, \varphi_e\rangle_{\gamma_{ij}} \geqslant Cd^{-1}\|\varphi\|^2_{0,\Gamma}, \quad \varphi \in \tilde{V}(\Gamma_s). \tag{5.32}$$

对于 $\gamma_{ij} \subset \Gamma_s$ 和 $\varphi \in \tilde{V}_h(\Gamma_s)$, 设 $\tilde{\varphi}_e \in V_h(\Gamma)$ 表示 $\varphi_e|_{\gamma_{ij}}$ 的零延拓. 利用 (5.23) 和 Friedrichs 不等式得

$$\langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}}\varphi_e, \varphi_e\rangle_{\gamma_{ij}} \simeq |\tilde{\varphi}_e|^2_{\frac{1}{2},\Gamma} \geqslant Cd^{-1}\|\tilde{\varphi}_e\|^2_{0,\Gamma} = Cd^{-1}\|\varphi_e\|^2_{0,\gamma_{ij}},$$

从而得证 (5.32). □

引理 5.14 存在不依赖于 h 的常数 c 和 C, 使得

$$c\|\varphi_v\|^2_{0,\Gamma_s} \leqslant \sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1} \frac{(\varphi_v(v_i)-\varphi_v(v_j))^2}{(j-i)^2} + \sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v^2(v_i)$$

$$\leqslant Ch^{-1}\|\varphi\|_{0,\Gamma_s}^2, \quad \forall\,\varphi\in\tilde{V}_h(\Gamma_s). \tag{5.33}$$

证明 由于 $\varphi_v|_{\Gamma_t}=0$, 利用 Friedrichs 不等式和 (5.25) 知

$$\begin{aligned}\|\varphi_v\|_{0,\Gamma_s}^2 &\leqslant C|\varphi_v|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 \simeq \|\varphi_v\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)}^2\\ &\simeq \sum_{i=1}^{n_s-1}\sum_{j=i+1}^{n_s-1}\frac{(\varphi_v(v_i)-\varphi_v(v_j))^2}{(j-i)^2}+\sum_{i=1}^{n_s-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{n_s-i}\right)\varphi_v^2(v_i).\end{aligned} \tag{5.34}$$

另一方面, 利用逆估计和离散范数, 得

$$|\varphi_v|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2\leqslant Cd^{-1}\|\varphi_v\|_{0,\Gamma}^2\leqslant Cd^{-1}(d/h)\|\varphi\|_{0,\Gamma}^2=Ch^{-1}\|\varphi\|_{0,\Gamma_s}^2,$$

联立 (5.34), 得证。 □

5.3 主要结果的证明

现在我们证明定理 4.1 和 4.2。

定理 4.1 的证明 我们首先指出对于任意的 $w\in V_h(\Omega)$, w_p 和 w_H 关于内积 $(\nabla\cdot,\nabla\cdot)$ 是正交的. 因而, 成立以下等式,

$$A(\xi;\xi)=|u_p|_{1,\Omega}^2+\sum_{k=1}^{L}|u_H|_{1,\omega_k}^2+\langle S_h(u_H|_{\Gamma_0}+\varphi),u_H|_{\Gamma_0}+\varphi\rangle, \quad \forall\,\xi=(u,\varphi)\in E_h.$$

而且利用 (5.28), (5.10) 和 (5.5) 得

$$A(\xi;\xi)\geqslant|u_p|_{1,\Omega}^2+\sum_{k=1}^{L}|u_H|_{1,\omega_k}^2+\|u_H|_\Gamma\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2+\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2, \quad \forall\,\xi=(u,\varphi)\in E_h \tag{5.35}$$

和

$$\begin{aligned}A(\xi;\xi)&\leqslant|u_p|_{1,\Omega}^2+\sum_{k=1}^{L}|u_H|_{1,\omega_k}^2+2(\langle S_h(u_H|_{\Gamma_0}),u_H|_{\Gamma_0}\rangle+\langle S_h\varphi,\varphi\rangle)\\ &\leqslant|u_p|_{1,\Omega}^2+C\sum_{k=1}^{L}|u_H|_{1,\omega_k}^2+C(\|u_H\|_{0,\Gamma}^2+\|\varphi\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2), \quad \forall\,\xi=(u,\varphi)\in E_h.\end{aligned} \tag{5.36}$$

根据 (5.11) 有

$$d\sum_{v_i\in N_d(\Gamma)}(u_v(v_i))^2\simeq\|u_v|_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\leqslant Cd\ln(d/h)\|u_H|_\Gamma\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2\leqslant C(1+\ln^2(d/h))\|u_H|_\Gamma\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2,$$

联立 (5.3), (5.22) 和 (5.35) 得

$$A(\xi;\xi)\geqslant C(1+\ln^2(d/h))^{-1}B(\xi;\xi), \quad \forall\,\xi\in E_h. \tag{5.37}$$

另一方面, 显然有 (参见 [22])

$$|u_e|_{1,\omega_k}^2\leqslant C\sum_{\gamma_{ij}\subset\partial\omega_k}\langle\Lambda_0^{\frac{1}{2}}u_e,u_e\rangle_{\gamma_{ij}} \tag{5.38}$$

和

$$|u_v|_{1,\omega_k}^2 \simeq \sum_{\gamma_{ij}\subset\partial\omega_k} (u_v(v_i)-u_v(v_j))^2.$$

因而 (注意到 $u_H = u_e + u_v$)

$$|u_H|_{1,\omega_k}^2 \leqslant 2(|u_e|_{1,\omega_k}^2 + |u_v|_{1,\omega_k}^2) \leqslant C \sum_{\gamma_{ij}\subset\partial\omega_k} [\langle \Lambda_0^{\frac{1}{2}} u_e, u_e\rangle_{\gamma_{ij}} + (u_v(v_i)-u_v(v_j))^2]. \tag{5.39}$$

由于 $u_e(v_i)=0$, 利用等价离散范数, 得

$$\|u_e\|_{0,\Gamma_0}^2 \leqslant C|u_e|_{\frac{1}{2},\Gamma_0}^2,$$

所以

$$\|u_H\|_{0,\Gamma_0}^2 \leqslant 2(\|u_v\|_{0,\Gamma_0}^2 + \|u_e\|_{0,\Gamma_0}^2) \leqslant C\left[d \sum_{v_i\in N_d(\Gamma)} u_v^2(v_i) + |u_e|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2\right].$$

而且利用 (5.10) 和迹定理有

$$\langle S_h(u_H|_\Gamma), u_H|_\Gamma\rangle \leqslant C\left[|u_H|_{1,\Omega}^2 + d \sum_{v_i\in N_d(\Gamma_0)} (u_v(v_i))^2 + |u_e|_{1,\Omega}^2\right].$$

联立 (5.36), (5.27) 和 (5.39), 推出

$$A(\xi;\xi) \leqslant CB(\xi;\xi), \quad \forall\, \xi \in E_h. \tag{5.40}$$

利用 (5.16), (5.37) 和 (5.40), 得到 (4.4). □

定理 4.2 的证明 注意到 $\varphi = \varphi_e + \varphi_v$, 利用三角不等式有

$$\|\varphi\|_{0,\Gamma_s}^2 \leqslant 2(\|\varphi_e\|_{0,\Gamma_s}^2 + \|\varphi_v\|_{0,\Gamma_s}^2).$$

因而, (4.5) 是 (5.31) 和 (5.33) 的直接推论. □

致谢 作者感谢 C. Carstensen 教授热心地提供了参考文献 [1].

参考文献

1 Carstensen C. Interface problem in holonomic elastoplasticity. Math Methods Appl Sci, 1993, 16: 819–835
2 Costabel M, Stephan E. Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem. SIAM J Numer Anal, 1990, 27: 1212–1226
3 Necas J. Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations. In: Teubner-Texte zur Mathematic, vol. 52. Leipzig: Teubner, 1983
4 Carstensen C, Gwinner J. FEM and BEM coupling for a nonlinear transmission problem with Signorini contact. SIAM J Numer Anal, 1997, 34: 1845–1864
5 Kikuchi N, Oden J. Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: SIAM, 1988
6 Bustinza R, Gatica G, Sayas F. On the coupling of local discontinuous Galerkin and boundary element for nonlinear exterior transmission problems. IMA J Numer Anal, 2008, 28: 225–244
7 Gatica G, Hsiao G. On the coupled BEM and FEM for a nonlinear exterior Dirichlet problem in $\mathbb{R}^2$. Numer Math, 1992, 61: 171–214

8 Gatica G, Hsiao G, Meddahi S. A coupled mixed finite element method for the interaction problem between electromagnetic field and elastic body. SIAM J Numer Anal, in press

9 Gatica G, Maischak M, Stephan E P. On the numerical analysis of a transmission problem with Signorini contact via coupling of mixed-FEM and BEM. Preprint 07-37, Departamento de Ingenieria Matematica, Universidad de Concepcion, 2007

10 Gatica G, Marquez A, Meddahi S. Analysis of the coupling of BEM. FEM, and mixed-FEM for a two-dimensional fluid-solid interaction problem. Appl Numer Math, 2009, 59: 2735–2750

11 Mund P, Stephan E. An adaptive two-level method for the coupling of nonlinear FEM-BEM equations. SIAM J Numer Anal, 1999, 36: 1001–1021

12 Hu Q, Yu D. A Solution method for a certain nonlinear interface problem in unbounded domains. Computing, 2001, 67: 119–140

13 Lions J, Magenes E. Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, vol. I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1972

14 Hsiao G, Wendland W. A finite element method for some integral equations of the first kind. J Math Anal Appl, 1977, 58: 449–481

15 Stephan E, Wendland W, Hsiao G. On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem of the Laplacian. Math Methods Appl Sci, 1979, 1: 265–321

16 Yu D. The relation between the Steklov-Poincare operator, the natural integral operator and Green functions. Chinese J Numer Math Appl, 1995, 17: 95–106

17 Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. New York: Springer-Verlag, 1984

18 Polyak B. Introduction to Optimization. New York: Optimization Software, Inc. Publications Division, 1987

19 Solodov M, Svaiter B. A new projection method for variational inequality problems. SIAM J Control Optim, 1999, 37: 765–776

20 Schoberl J. Solving the Signorini problem on the basis of domain decomposition techniques. Computing, 1998, 60: 323–344

21 Dunn J. Global and asymptotic convergence rate estimates for a class of projected gradient processes. SIAM J Control Optim, 1981, 19: 368–400

22 Bramble J, Pasciak J, Schatz A. The construction of preconditioner for elliptic problems by substructuring, I. Math Comp, 1986, 47: 103–134

23 Dryja M. A method of domain decomposition for 3-D finite element problems. In: Glowinski R, Golub G, Meurant G, et al., eds. First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Philadelphia, PA: SIAM, 1988

24 Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. SIAM J Numer Math Anal, 1988, 19: 613–626

25 Yu D. Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence. Chinese J Numer Math Appl, 1996, 18: 93–102

26 Meddahi S. An optimal iterative process for the Johnson-Nedelec method of coupling boundary and finite elements. SIAM J Numer Anal, 1998, 35: 1393–1415

27 Yu D. The Mathematical Theory of the Natural Boundary Element Methods. Beijing: Science Press, 1993

28 Zenisek A. Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations. London: Academic Press, 1990