

文章编号:1000-2022(2002)01-0100-05

一类广义积分的算法及实现

陶诏灵

(南京气象学院 数学系, 江苏 南京 210044)

摘 要: Laplace 变换与 B 样条在社会生活的各个领域都有着广泛的应用, 考虑将二者联系起来, 运用 B 样条方法求解 Laplace 积分。对 Laplace 积分具有导数不连续点的像原函数, 运用重节点 B 样条进行拟合, 再引入差商, 以两个不同出发点导出 Laplace 积分的算法。并在均匀网格分划下, 给出一系列解析公式, 然后用算例编程计算, 实例表明简单、快速而且便于计算机实现。

关键词: Laplace 变换; B 样条; 积分

中图分类号: O241 **文献标识码:** A

拉普拉斯变换日益为大家所熟知。在数学上是一种重要的渐进分析方法和一种有效的求解常微分方程的方法。作为必不可少的数学工具, 在数学及其它自然科学和各种技术领域中有广泛的应用和研究。由于它自身重要的物理意义, 拉普拉斯变换成为电子和机械领域中所不可缺少的分析方法。而且, 它提供了一种深入理解问题实质的方法, 力学中的平动与转动微分方程、电路方程等都可因之而得到更好的理解。但是, 在拉普拉斯域内处理问题, 往往出现超越函数所描述的数学模型。虽然长期以来发展了不少方法来处理这些问题, 但是仍然运算复杂, 有的不适于使用计算机。与此同时, 随着计算几何学科理论的发展和工程应用的深入, NURBS 曲线, 亦即非均匀有理 B 样条曲线的重要性日益为人们所认识。国际标准化组织 (ISO) 于 1991 年公布的工业产品几何定义的 STEP 标准中, NURBS 被定义为唯一的数学方法^[1]。NURBS 方法在计算机辅助几何设计的十大前沿研究课题中, 也位居前列^[2]。下文将拉普拉斯变换与 B 样条结合, 力求得出一种较为通用、较为一般化的方法, 特别是配合计算机的使用, 以便于解决许多看起来很复杂的问题。

1 基本概念

设节点矢量为 $T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$, $t_j \leq t_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, n+k-1$ 。 k 阶 B 样条函数用递推式表示为^[3]

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_i, t_{i+1}); \\ 0, & t \notin [t_i, t_{i+1}). \end{cases}$$

收稿日期: 2001-05-08; 改回日期: 2001-07-25

基金项目: 南京气象学院科研基金项目 Y101

作者简介: 陶诏灵 (1970-), 女, 四川人, 硕士, 讲师。

$$B_{i,k}(t) = \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} B_{i,k-1}(t); \quad \text{规定 } \frac{0}{0} = 0.$$

一条 k 阶 ($k-1$) 次 B 样条曲线是一种分段多项式曲线, 表示为

$$r(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_{j,k}(t).$$

式中, P_j 为控制点, $B_{j,k}(t)$ 是归一化的 B 样条基函数。其节点矢量为

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}, t_j \leq t_{j+1}, j = 0, 1, \dots, n+k-1.$$

设 $t \geq 0$ 时函数 $f(t)$ 有定义, 且有广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, s 为复参变量。在 s 的某一复数域内收敛, 则该广义积分称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换 (简称拉氏变换)^[4-5]。记为 $F(s)$, 其中 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的像函数, 又称频域函数或复频函数, s 常称为复频率; $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的像原函数。

为计算广义积分 $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, 通常的做法是取任意小的正数 ϵ , 并选取递增序列 $\{b_n\}$, 计算 $\int_a^{b_n} f(t) dt$ 的值 ($n=1, 2, \dots$), 直到 $|\int_a^{b_{n+1}} f(t) dt - \int_a^{b_n} f(t) dt| < \epsilon$, 则用 $\int_a^{b_n} f(t) dt$ 作为 $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ 的近似值。实践中, 一般取 $\{b_n = 2^n\}$ 或 $\{b_n = \lambda n\}$, $n=1, 2, \dots; \lambda$ 为任意正常数。

若存在间断点或不连续点, 传统的做法是由积分可加性, 进行分段积分, 将这些点作为端点用重节点处理, 因而只需考虑 $\int_a^b f(t) dt$ 的形式。

2 理论基础

运用重节点 B 样条, 对于 Laplace 积分的像原函数或像原函数的某阶导数具有不连续点的情况下, 得出一个计算 Laplace 积分的算法。

定理^[6] 设 $F(u) = \int_a^b f(x) e^{-ux} dx$, 分划 $\Omega; a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = b$, 则有

$$F(u) = \sum_{j=1}^{N-k} a_j L_{j,k}(u).$$

其中, $L_{j,k}(u) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{u^k} h_{j+k} [x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] e^{-ux}$, $h_{j+i} = x_{j+i} - x_j, j=1, 2, \dots, N-k, i=1, 2, \dots, k, a_j$ 是 $f(x)$ 用重节点 B 样条表示的系数。

用 k 阶 B 样条表示 $f(x)$, 记 $f(x) = \sum_{j=1}^{N-k} a_j B_{j,k}(x)$, 代入积分式, 运用数学归纳法和分部积分法便可得到定理证明。

定理结论还可表示为 $F(u) = \sum_{j=1}^{N-k} a_j L_{j,k}(u)$ 。其中, $L_{j,k}(u) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{u^k} h_{j+k} [0, h_{j+1}, \dots, h_{j+k}] e^{-ux}$ 。

定理中以划分节点值来计算差商, 变化后则以划分节点间的累加长度为出发点计算差商。因为在均匀分划情况下, 由归纳法可证明差分与差商的关系式为

$$[x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}] f = \frac{\Delta^k f(x_1)}{h^k \cdot k!}.$$

其中, $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, $\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i)$ 。

于是由定理, 得出推论 1。

推论 1 设 $F(u) = \int_a^b f(x)e^{-ux}dx$, 内节点均匀分划 $\Omega: a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N=b$, 则有

$$F(u) = \sum_{j=1}^{N-k} a_j L_{j,k}(u).$$

其中, $L_{j,k}(u) = (-1)^k \frac{(k-1)!}{u^k} h_{j+k} \frac{\Delta^k e^{-ux_1}}{h^k \cdot k!}$, $h_{j+i} = x_{j+i} - x_j$, $h = x_{j+1} - x_j$, $j=1, 2, \cdots, N-k$, $i=1, 2, \cdots, k$, a_j 是用 B 样条表示的系数。

设 $f(x)$ 只在端点处不连续, 取端点重数为 k , 在均匀网格分划下有下面的表达式和关系式。当 $j=k, k+1, \cdots, N+1-2k$ 时, 为没有重节点的情形。由归纳法得, $L_{j,k}(u) = (-1)^k \cdot h \cdot e^{-ux_j} \cdot \left(\frac{e^{-uh}-1}{uh}\right)^k L_{j,k}(u)$ 。对应于以节点间的累加长度为出发点计算, $L_{j,k}(u) = (-1)^k \cdot h \cdot \left(\frac{e^{-uh}-1}{uh}\right)^k$ 。

于是, 下面将两不同出发点的计算式在同一式子中给出, $\doteq$ 号后为属于后一出发点的, 不再说明。

当 $j=1, 2, \cdots, k-1, N-2(k-1), \cdots, N-k$ 时, 为重节点情形。此时有:

1) $j=1$ 时, $x_1=x_2=\cdots=x_k$ 为左 k 重节点,

$$L_{1,k}(u) = he^{-ux_1} \cdot (k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-uh)^{j-k}}{j!} \doteq h(k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(-uh)^{j-k}}{j!}.$$

2) $j=2$ 时, $x_2=x_3=\cdots=x_k$ 为左 $k-1$ 重节点, 此时有

$$\begin{aligned} L_{2,k}(u) &= 2he^{-ux_2} \cdot (k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} (2^{j+1-k} - 1) \frac{(-uh)^{j-k}}{j!} \\ &\doteq 2h(k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} (2^{j+1-k} - 1) \frac{(-uh)^{j-k}}{j!}. \end{aligned}$$

3) $j=3$ 时, $x_3=x_4=\cdots=x_k$ 为左 $k-2$ 重节点,

$$\begin{aligned} L_{3,k}(u) &= 3he^{-ux_3} \cdot (k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{3^{j+3-k}}{3!} - \frac{2^{j+3-k}}{2!} + \frac{1}{2} \right) \frac{(-uh)^{j-k}}{j!} \\ &\doteq 3h(k-1)! \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{3^{j+3-k}}{3!} - \frac{2^{j+3-k}}{2!} + \frac{1}{2} \right) \frac{(-uh)^{j-k}}{j!}. \end{aligned}$$

4) $j=N-2(k-1), N-2(k-1)+1, \cdots, N-k$ 时分别为右 2 重、3 重、 $\cdots$ 、 k 重节点, 用同样的方法可得

$$L_{N-k,k}(u) = e^{u(x_j-h)} \cdot L_{j,k}(-u).$$

所以有

$$L_{N-k-(j-1),k}(u) = e^{u(N-k+1-j)h} \cdot L_{j,k}(-u).$$

推论 2 记 $\lambda = -uh$, 在均匀网格分划下, 则可以得到下面的常用的计算 $L_{j,k}(u)$ 的公式为

$$L_{1,2}(u) = \frac{h}{\lambda^2} e^{-ux_1} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda)] \doteq \frac{h}{\lambda^2} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda)];$$

$$L_{1,3}(u) = \frac{h}{\lambda^3} e^{-ux_1} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2)] \doteq \frac{h}{\lambda^3} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2)];$$

$$L_{2,3}(u) = \frac{h}{\lambda^3} e^{-ux_2} \cdot (e^{2\lambda} - 4e^\lambda + 2\lambda + 3) \doteq \frac{h}{\lambda^3} \cdot (e^{2\lambda} - 4e^\lambda + 2\lambda + 3);$$

$$L_{1,4}(u) = \frac{6h}{\lambda^4} e^{-ux_1} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3)] \doteq \frac{6h}{\lambda^4} \cdot [e^\lambda - (1+\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3)];$$

$$L_{2,4}(u) = \frac{3h}{2\lambda^3} e^{-ux_2} \cdot (e^{2\lambda} - 8e^\lambda + 2\lambda^2 + 6\lambda + 7) \doteq \frac{3h}{2\lambda^2} \cdot (e^{2\lambda} - 8e^\lambda + 2\lambda^2 + 6\lambda + 7);$$

$$L_{3,4}(u) = \frac{h}{\lambda^4} e^{-ux_3} \cdot (e^{3\lambda} - \frac{9}{2}e^{2\lambda} + 9e^\lambda - 3\lambda - \frac{11}{2}) \doteq \frac{h}{\lambda^4} (e^{3\lambda} - \frac{9}{2}e^{2\lambda} + 9e^\lambda - 3\lambda - \frac{11}{2}).$$

3 应用与算例

由上可知问题的关键在于用重节点 B 样条表示被积函数 $f(x)$, 即 $f(x) \approx \sum_{j=1}^{N-k} a_j B_{j,k}(x)$. 而这些, 有成熟的样条逼近理论可以保证^[3].

用 B 样条基时具有良好的条件数, 因此有利于进行数值计算. 经过多个算例计算, 通过计算还知道, 该方法比 Simpson 积分法速度快得多, 克服了 Gauss-Laguerre 积分, Gauss-Legendre 积分等函数零点难以确定的困难, 此方法较之其他方法优越之处在于采用了具有良好条件数的 B 样条基表示拟合方法, 而且 B 样条重结点可刻画不光滑像原函数.

这里给出两例: $F(u) = \int_0^{+\infty} e^{-ux} f(x) dx (u > 0)$. 其中, $f_1(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$, $F_1(u) = \ln \frac{u+1}{u}$; $f_2(x) = \frac{\sin x}{x}$, $F_2(u) = \arctg \frac{1}{u}$.

经计算后得精确图 1a、2a 和近似图 1b、2b(由后一出发点编程). 由此可见, 效果良好.

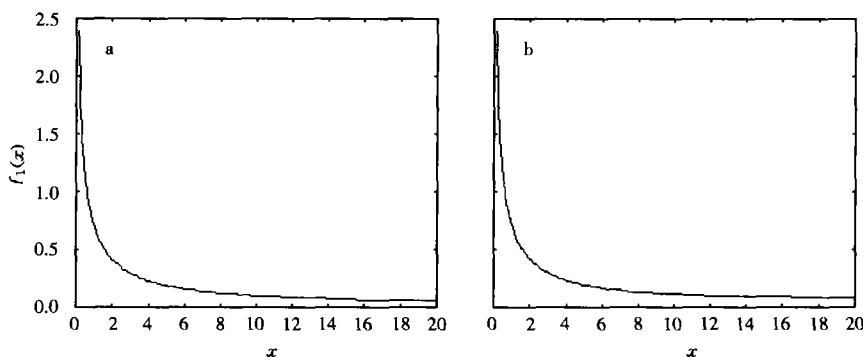


图 1 f_1 效果图

Fig. 1 Effect diagram for f_1

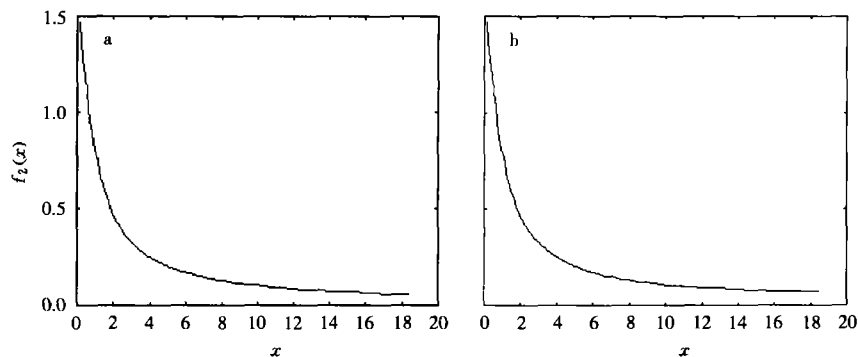


图 2 f_2 效果图

Fig. 2 Effect diagram for f_2

对一般的函数, Laplace 积分函数是减函数, 根据经验可以推测, 随 u 的增加, 计算值与真实值的误差将会逐步减小, 实验结果与此推测一致。

参考文献:

- [1] Vergeest S M. CAD Surface data exchange using STEP[J]. CAD, 1991, 23(1): 269-281.
- [2] Nielson G M. CAGD's top ten: what to watch[J]. IEEE CG&A, 1993, 13(1): 35-37.
- [3] E 德人, 杨忠华. 数值逼近引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.
- [4] 沙万特 Q C J. 拉普拉斯变换原理[M]//李少哲, 等译. 西安: 陕西科学技术出版社, 1984.
- [5] 田根宝, 刘振周. 复变函数与积分变换[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1997.
- [6] Tang Yuehong, Tao Zhaoling. A numerical algorithm for Laplace's intergral by B -spline[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2001, 18(1): 113-117.

Algorithm for One Improper Integral and Its Realization

TAO Zhao-ling

(Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044, China)

Abstract: Laplace transform and B -spline are both widely used in various fields. Considering their union, B -spline is used during Laplace integral. Function with non-smooth point, is approximated by B -spline, then integrated. A set of analytic formulas are given. Experimental results show that the scheme behaves well.

Key words: Laplace transform; B -spline; integral