

数控中的最小误差法插补原理

袁超廷

(重庆建筑工程学院基础科学系)

摘 要

本文提出了使插补误差最小的插补原理。这个原理的基本思想是使刀具在所有可能的走向中选取最好的一种走向,以使下一加工点离所要加工的曲线最近。我们称这种方法为最小误差法。

一、引 言

在数控中,为减小插补误差,一个有代表性的思想就是怎样保证刀具“按偏差最小的方向进给”,即找出一种插补方法使刀具每一步都能在所有可能的方向中选取最好的一个方向进给,以使下一加工点离所要加工的曲线最近。1978 年本文作者曾根据这一思想完成了一篇文章^[1]。随后有好几篇文章^[2-7]按这一思想提出了各自的插补原理。但以上文章所提出的数学插补公式还不能保证插补偏差最小,或应用上不方便。

本文提出的最小误差法特点是:1. 从理论上找到了插补误差最小的直线插补和圆弧插补方法;2. 在实际加工中这种方法插补精度最高;3. 其思想具有普遍意义,原则上可用于解决其它曲线的最小误差插补方法问题。

二、直 线 插 补

1. 直线插补的计算公式和进给规则

设所要加工的直线与 X 轴的夹角 α 满足条件 $0^\circ \leq \alpha < 45^\circ$, 直线始点在坐标原点, 终点 P_c 的坐标为 (X_c, Y_c) 。又设刀具在加工过程中某一时刻处在 P_m 点, 加工点 P_m 点的偏差定义为 P_m 点到所要加工的直线的垂直距离 δ_m 。显然

$$\delta_m = R_m \sin(\alpha_m - \alpha) = Y_m \cos \alpha - X_m \sin \alpha = \frac{Y_m X_c - X_m Y_c}{R_c},$$

式中 X_m, Y_m 为 P_m 点的坐标, $R_m = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2}$, $R_c = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}$, α_m 为 OP_m 直线与 X 轴的夹角。如图 1 示。

当 $\delta_m > 0$ 时, 由 δ_m 的表示式可知 $\alpha_m > \alpha$, P_m 在所加工直线上方; 当 $\delta_m = 0$ 时, P_m 在直线上; 当 $\delta_m < 0$ 时, P_m 点在直线下方。

刀具下一步可能的走向有三个: X 方向, Y 方向和 X - Y 同时进给的方向即 45° 方向。但由于所要加工的直线在正 X 轴(包括正 X 轴)与 45° 直线之间的区域(令它为 h_1 区域)内, 故刀具进给的最佳方向只能在 X 方向和 X - Y 方向间选取, 而 Y 方向肯定是最不好的方向。

若下一步是走 $(+\Delta X)$, 则新加工点 P_{m+1} 的偏差为:

$$\delta_{m+1} = \frac{Y_m X_e - (X_m + 1) Y_e}{R_e}.$$

若下一步是走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$, 则新加工点 P_{m+1} 的偏差为:

$$\delta'_{m+1} = \frac{(Y_m + 1) X_e + (X_m + 1) Y_e}{R_e}.$$

令

$$f_m = \delta_{m+1} + \delta'_{m+1} = \frac{2Y_m X_e - 2(X_m + 1) Y_e + X_e}{R_e}.$$

处在 P_m 点的刀具下一步是走 $(+\Delta X)$ 还是走 45° 方向, 取决于 f_m 的值, 这里有三种可能情况:

1. 如果 $\delta_{m+1} \geq 0$, 则 δ'_{m+1} 就会更大于 0, 故在 P_m 点的刀具下一步应走 $(+\Delta X)$ 才会使新加工点更接近所要加工的直线, 同时必有不等式 $f_m > 0$.
2. 如果 $\delta'_{m+1} < 0$, 则 δ_{m+1} 就会更小于 0, 处在 P_m 点的刀具下一步则应走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$, 同时必有 $f_m < 0$.
3. 如果 $\delta_{m+1} < 0$, $\delta'_{m+1} \geq 0$, 应计算 f_m 的值。当计算结果 $f_m > 0$, 刀具下一步显然应走 $(+\Delta X)$; 当计算结果 $f_m < 0$, 刀具下一步则应走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$; 如果 $f_m = 0$, 则规定刀具下一步走 $(+\Delta X)$ 。

至于 $\delta_{m+1} \geq 0$, $\delta'_{m+1} < 0$ 这种情况是不可能的。

综上可得出进给规则: 若 $f_m \geq 0$, 刀具走 $(+\Delta X)$; 若 $f_m < 0$, 刀具走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$ 。因此 f_m 的符号可作为刀具下一步走向的判据。

显然下式

$$F_m = 2Y_m X_e - 2(X_m + 1) Y_e + X_e \quad (1)$$

仍能起上述判别作用。

(1) 式即为位于区域 h_1 的直线插补判别式。

现在求 F_m 的递推公式。按 (1) 式, 刀具走 $(+\Delta X)$ 后, 新加工点 P_{m+1} 的判别式值应为:

$$F_{m+1} = 2Y_m X_e - 2(X_m + 1 + 1) Y_e + X_e,$$

所以有

$$F_{m+1} = F_m - 2Y_e.$$

式中 F_m 为判别式在 P_m 点的值。

当刀具走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$ 后, 新加工点 P_{m+1} 的判别式值应为:

$$F_{m+1} = 2(Y_m + 1) X_e - 2(X_m + 1 + 1) Y_e + X_e,$$

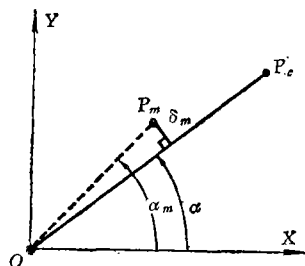


图 1

表 1

区域	始点 F 值计算公式	$F_m \geq 0$		$F_m < 0$	
		进给	新点 F 值计算公式	进给	新点 F 值计算公式
h_1	$F_0 = X_e - 2Y_e$	$(+\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2Y_e$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m + 2X_e - 2Y_e$
h_2	$F_0 = Y_e - 2X_e$	$(+\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e + 2Y_e$
h_3	$F_0 = Y_e - 2X_e$	$(+\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e + 2Y_e$
h_4	$F_0 = X_e - 2Y_e$	$(-\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2Y_e$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m + 2X_e - 2Y_e$
h_5	$F_0 = X_e - 2Y_e$	$(-\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2Y_e$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m + 2X_e - 2Y_e$
h_6	$F_0 = Y_e - 2X_e$	$(-\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e + 2Y_e$
h_7	$F_0 = Y_e - 2X_e$	$(-\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m - 2X_e + 2Y_e$
h_8	$F_0 = X_e - 2Y_e$	$(+\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2Y_e$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_{m+1} = F_m + 2X_e - 2Y_e$

表 2

进给步数	判别式值	进给	新点判别式值的计算	终点判断
1	$F_0 = 2 > 0$	$(+\Delta Y)$	$F_1 = F_0 - 2 \times 3 = -4$	$\Sigma_1 = \Sigma_0 - 1 = 10$
2	$F_1 = -4 < 0$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_2 = F_1 - 2 \times 3 + 2 \times 8 = 6$	$\Sigma_2 = \Sigma_1 - 2 = 8$
3	$F_2 = 6 > 0$	$(+\Delta Y)$	$F_3 = F_2 - 2 \times 3 = 0$	$\Sigma_3 = \Sigma_2 - 1 = 7$
4	$F_3 = 0$	$(+\Delta Y)$	$F_4 = F_3 - 2 \times 3 = -6$	$\Sigma_4 = \Sigma_3 - 1 = 6$
5	$F_4 = -6 < 0$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_5 = F_4 - 2 \times 3 + 2 \times 8 = 4$	$\Sigma_5 = \Sigma_4 - 2 = 4$
6	$F_5 = 4 > 0$	$(+\Delta Y)$	$F_6 = F_5 - 2 \times 3 = -2$	$\Sigma_6 = \Sigma_5 - 1 = 3$
7	$F_6 = -2 < 0$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$F_7 = F_6 - 2 \times 3 + 2 \times 8 = 8$	$\Sigma_7 = \Sigma_6 - 2 = 1$
8	$F_7 = 8 > 0$	$(+\Delta Y)$	$F_8 = F_7 - 2 \times 3 = 2$	$\Sigma_8 = \Sigma_7 - 1 = 0$

所以有

$$F_{m+1} = F_m + 2X_e - 2Y_e. \quad (3)$$

按 (1) 式, 直线始点判别式的值应为:

$$F_0 = X_e - 2Y_e. \quad (4)$$

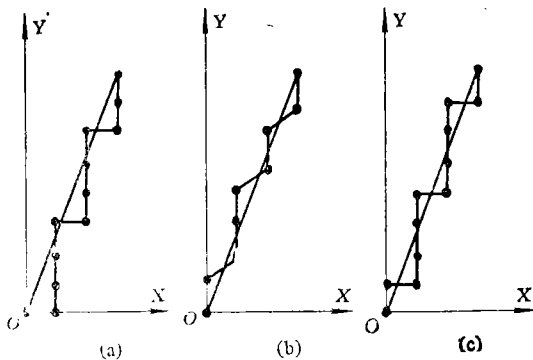


图 2

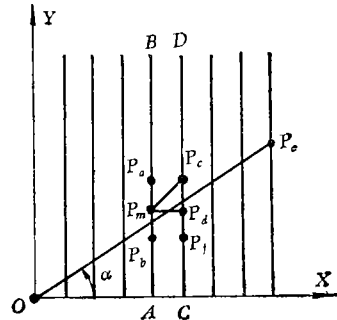


图 3

(2)~(4) 式即为区域 h_1 内的直线插补计算公式。

以 h_2 代表区域 ($45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), h_3 代表区域 ($90^\circ < \alpha \leq 135^\circ$), h_4 代表区域 ($135^\circ < \alpha \leq 180^\circ$), h_5 代表区域 ($180^\circ < \alpha < 225^\circ$), h_6 代表区域 ($225^\circ \leq \alpha < 270^\circ$), h_7 代表区域 ($270^\circ \leq \alpha \leq 315^\circ$) 和以 h_8 代表区域 ($315^\circ < \alpha < 360^\circ$) 时, 用同样的方法可算出这些区域内的直线插补计算公式。在终点坐标取绝对值的情况下, 最终可得表 1 所示的各区域内判别式值的计算公式和进给规则。

图 2 中 (a) 和 (b) 分别为逐点比较法和最小误差法直线插补时的实际加工线。

下面举一个直线插补例子。设需要加工一直线, 其终点坐标为 (3, 8)。显然此直线在 h_2 内, 按 h_2 内计算公式 $F_0 = 8 - 6 = 2$, 计数长度 $\Sigma_0 = 3 + 8 = 11$, 插补计算过程列成表 2, 刀具轨迹见图 2(b)。

2. 直线插补误差最小的证明

设所要插补的直线 OP_e 在 h_1 内。如图 3 所示, 可作平行于 Y 轴的线间距为 1 (一个脉冲当量) 的直线列。很显然, 当刀具可走 45° 方向时, 刀具只应当在 $(+\Delta X)$ 和 $(+\Delta X, +\Delta Y)$ 之间选择, 而不应当选择进给 $(+\Delta Y)$, 否则只能增加插补误差。所以如果某一插补方法包含了 $(+\Delta Y)$ 的走向, 那么它的误差一定很大, 这种插补法在插补精度上自不能和最小误差法比。这样, 不管采用什么插补方法, 只要这种方法允许走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$, 实际刀具轨迹中每步的端点都一定在这些平行线中某一根线上占据坐标为整数的一个点, 每一步的端点都处在不同的线上, P_e 点所在的线以前的每根线上一定有一个而且只有一个端点。不同的插补方法就是以不同的组和方式在每根线上选取一个点, 由这些点连成的折线就是该插补方法的实际刀具轨迹。

这样, 只需证明最小误差法的刀具轨迹上每步的端点是所在线上所有可能点中最靠近所要插补的直线的点, 误差最小这一结论就全部得证了。上面的叙述说明了每根线上都有一个最接近直线的点, 称之为最近点。

证明的方法采用数学归纳法。要证明的命题是: 如果插补过程中, 刀具所处的 P_m 点是所在线 AB (见图 3) 上所有可能点中最接近所要插补的直线 OP_e 的点, 即最近点, 那么按最小误差法刀具所作的下一步进给所到达的点也是最近点。

为证明方便, 将 P_m 点的偏差 δ_m 扩大 R_e 倍, 并仍以 δ_m 表示, 这时 $\delta_m = Y_m X_e - X_m Y_e$ 的

表 3

区域	始点 F 值 计算公式	$F_{ij} \geq 0$			$F_{ij} < 0$		
		进 给	新点坐标计算	新点 F 值计算公式	进 给	新点坐标计算	新点 F 值计算公式
h_1	$F_{00} = - X_0 + 2 Y_0 + 1$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta Y)$	$X_j = X_i$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 1$
h_2	$F_{00} = -2 X_0 + Y_0 + 1$	$(-\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 1$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$
h_3	$F_{00} = 2 X_0 - Y_0 + 1$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 1$
h_4	$F_{00} = X_0 - 2 Y_0 + 1$	$(-\Delta Y)$	$X_i = X_i$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{j+1} + 1$	$\begin{pmatrix} -\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$
h_5	$F_{00} = - X_0 + 2 Y_0 + 1$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$	$(-\Delta Y)$	$X_i = X_i$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{j+1} + 1$
h_6	$F_{00} = -2 X_0 + Y_0 + 1$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 1$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ -\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$
h_7	$F_{00} = 2 X_0 - Y_0 + 1$	$\begin{pmatrix} +\Delta X \\ +\Delta Y \end{pmatrix}$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 1$

逆 圆

顺圆

h_8	$F_{00} = X_0 - 2 Y_0 + 1$	$(+\Delta Y)$	$X_i = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{i(j+1)} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$
h_8	$F_{00} = - X_0 + 2 Y_0 + 1$	$(-\Delta X)$ $(-\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$	$(-\Delta Y)$	$X_j = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{i(j+1)} = F_{ij} - 2Y_{j+1} + 1$
h_7	$F_{00} = -2 X_0 + Y_0 + 1$	$(-\Delta X)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 1$	$(-\Delta X)$ $(-\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$
h_6	$F_{00} = 2 X_0 - Y_0 + 1$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$	$(-\Delta X)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 1$
h_5	$F_{00} = X_0 - 2 Y_0 + 1$	$(+\Delta Y)$	$X_j = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{i(j+1)} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 1$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j - 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$
h_4	$F_{00} = - X_0 + 2 Y_0 + 1$	$(+\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 2X_{i+1} + 1$	$(+\Delta Y)$	$X_j = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{i(j+1)} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 1$
h_3	$F_{00} = -2 X_0 + Y_0 + 1$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 1$	$(+\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1$
h_2	$F_{00} = 2 X_0 - Y_0 + 1$	$(+\Delta X)$ $(-\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1} + 1$
h_1	$F_{00} = X_0 - 2 Y_0 + 1$	$(-\Delta Y)$	$X_j = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{i(j+1)} = F_{ij} - 2Y_{j+1} + 1$	$(+\Delta X)$ $(-\Delta Y)$	$X_{i+1} = X_j + 1$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} + 2X_{i+1} - 2Y_{j+1} + 1$

这一形式在符号上和前种形式等效.

AB 线上与 P_m 点紧近邻的刀具可能占据的两点是 P_a 和 P_b , 其偏差分别为:

$$\delta_a = (Y_m + 1)X_c - X_m Y_c$$

和

$$\delta_b = (Y_m - 1)X_c - X_m Y_c.$$

由于 P_m 点最接近 OP_c 直线, 无论 P_m 点在线上方或线下方, 都应有

$$\delta_m + \delta_a = (2Y_m + 1)X_c - 2X_m Y_c > 0 \quad (5)$$

和

$$\delta_m + \delta_b = (2Y_m - 1)X_c - 2X_m Y_c < 0. \quad (6)$$

按最小误差法 P_m 点判别式值应为:

$$F_m = 2Y_m X_c - 2(X_m + 1)Y_c + X_c.$$

当 $F_m \geq 0$ 时, 按最小误差法进给规则, 处在 P_m 点的刀具应走 $(+\Delta X)$ 到 P_d 点. 下面证明 P_d 点是下一直线 CD 上最靠近 OP_c 直线的点.

首先把点 P_d 和 CD 上 P_d 上方的各点作比较. P_d 点的偏差为:

$$\delta_d = Y_m X_c - (X_m + 1)Y_c,$$

P_c 点的偏差为:

$$\delta_c = (Y_m + 1)X_c - (X_m + 1)Y_c,$$

$$\delta_d + \delta_c = (2Y_m + 1)X_c - 2(X_m + 1)Y_c = F_m.$$

按假设 $F_m \geq 0$, 所以 $\delta_d + \delta_c \geq 0$, 说明直线 CD 上 P_c 点距 OP_c 比 P_d 点距 OP_c 远, 位于 P_c 点上方的 CD 上各点距 OP_c 就更远了.

再把点 P_d 和 CD 上 P_d 下方的各点作比较. P_f 点的偏差为:

$$\delta_f = (Y_m - 1)X_c - (X_m + 1)Y_c,$$

$$\delta_d + \delta_f = (2Y_m - 1)X_c - 2(X_m + 1)Y_c$$

$$= \delta_m + \delta_b - 2Y_c < 0. \quad (\text{按 (6) 式})$$

所以 P_d 点比 P_f 点更接近 OP_c 直线. 至于 P_f 点以下的 CD 上的点距 OP_c 直线就更远了.

以上证明了处在 P_m 点的刀具按最小误差法当 $F_m \geq 0$ 而走到 P_d 点时, P_d 点是 CD 上的最近点.

当 $F_m < 0$ 时, 按最小误差法处在 P_m 点的刀具应走 $(+\Delta X, +\Delta Y)$ 到 P_e 点. 仿上述方法, 利用 (5) 式, 同样可证明这时 P_e 点是 CD 线上的最近点.

这样, 前述命题得证.

由于刀具最初是处在 OP_c 直线的起点即坐标原点上, 这点自然是最近点, 从而按最小误差法而得到的加工轨迹的每步的端点都是最近点. 因此该轨迹的最大偏差在所有可能的加工轨迹中是最小的, 各端点偏差的平方和是最小的, 各端点

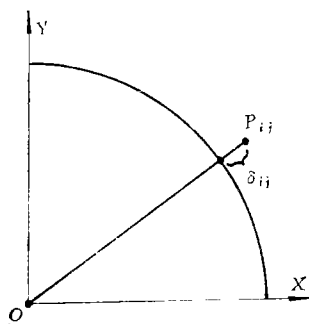


图 4

偏差绝对值的和也是最小的.

三、圆弧插补

1. 圆弧插补的计算公式和进给规则

如图 4 所示, 设要对 h_1 区域内圆心在原点半径为 R 的圆弧进行逆圆加工。加工过程中某时刻刀具处在 P_{ij} 点, 其坐标为 (X_i, Y_j) 。

令 $\delta_{ij} = \sqrt{X_i^2 + Y_j^2} - R$ 为加工点 P_{ij} 的偏差。显然当 $\delta_{ij} = 0$ 时, P_{ij} 点圆上; 当 $\delta_{ij} > 0$ 时 P_{ij} 点在圆外; 当 $\delta_{ij} < 0$ 时, P_{ij} 点在圆内。

显然, 由于圆弧在 h_1 区域内, 最佳的进给方向只能在 $(+\Delta Y)$ 和 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 之间选择。

若下一步是走 $(+\Delta Y)$, 则 $P_{i(j+1)}$ 点的偏差为:

$$\delta_{i(j+1)} = \sqrt{X_i^2 + (Y_j + 1)^2} - R.$$

若下一步是走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$, 则 $P_{(i+1)(j+1)}$ 点的偏差为:

$$\delta_{(i+1)(j+1)} = \sqrt{(X_i - 1)^2 + (Y_j + 1)^2} - R.$$

令

$$f_{ij} = \delta_{i(j+1)} + \delta_{(i+1)(j+1)} = [\sqrt{X_i^2 + (Y_j + 1)^2}]^{1/2} + [(\sqrt{(X_i - 1)^2 + (Y_j + 1)^2})]^{1/2} - 2R,$$

处于 P_{ij} 点的刀具下一步是走 $(+\Delta Y)$ 还是 $(-\Delta X, +\Delta Y)$, 取决于 f_{ij} 的值。这里也有三种情况:

(1) 如果 $\delta_{i(j+1)} < 0$, $\delta_{(i+1)(j+1)}$ 会更小于 0, 故在 P_{ij} 点的刀具下一步应走 $(+\Delta Y)$ 才会使下一加工点更接近圆弧, 同时必然有不等式 $f_{ij} < 0$ 。

(2) 如果 $\delta_{(i+1)(j+1)} \geq 0$, $\delta_{i(j+1)}$ 会更大于 0, 故刀具下一步应走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$, 同时必有不等式 $f_{ij} > 0$ 。

(3) 如果 $\delta_{i(j+1)} \geq 0$, $\delta_{(i+1)(j+1)} < 0$, 则应计算 f_{ij} 的值。当计算结果 $f_{ij} < 0$ 时, 处在 P_{ij} 点的刀具下一步显然应走 $(+\Delta Y)$ 。当计算结果 $f_{ij} > 0$ 时, 处在 P_{ij} 点的刀具应走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 。当计算结果是 $f_{ij} = 0$ 时, 则规定刀具下一步走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 。

至于 $\delta_{i(j+1)} < 0$, $\delta_{(i+1)(j+1)} > 0$ 这一情况是不可能的。

综上可得出进给规则: 若 $f_{ij} \geq 0$, 刀具走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$; 若 $f_{ij} < 0$, 走 $(+\Delta Y)$ 。因此 f_{ij} 的符号可作为处在 P_{ij} 点的刀具下一步最佳走向的判据。

为简便运算, 不宜直接采用 f_{ij} 作判别式。下面将找出与之等效的实际上采用的判别式。

显然不等式 $f_{ij} \geq 0$ 等效于

$$\sqrt{X_i^2 + (Y_j + 1)^2} + \sqrt{(X_i - 1)^2 + (Y_j + 1)^2} \geq 2R.$$

把上面不等式有理化后得

$$f'_{ij} = 8R^2(2X_i^2 - 2X_i + 2Y_j^2 + 4Y_j + 3 - 2R^2) - (2X_i - 1)^2 \geq 0.$$

因为 $8R^2 > (2X_i - 1)^2 > 0$, 而 $2X_i^2 - 2X_i + 2Y_j^2 + 4Y_j + 3 - 2R^2$, 取数字量 0, ± 1 , $\pm 2, \dots$, 所以当式

$$A_{ij} = 2X_i^2 - 2X_i + 2Y_j^2 + 4Y_j + 3 - 2R^2 \geq 1$$

时, $f'_{ij} > 0$; 而当 $A_{ij} < 1$ 时, $f_{ij} < 0$ 。

进一步不难知, 当 $F_{ij} = X_i^2 - X_i + Y_j^2 + 2Y_j + 1 - R^2 \geq 0$ 时, $A_{ij} \geq 1$; 当 $F_{ij} < 0$

时, $A_{ij} < 1$.

最后 $f_{ij} > 0$ 和 $f_{ij} < 0$ 这两个不等式分别等效于不等式

$$F_{ij} = X_i^2 + Y_j^2 - X_i + 2Y_j + 1 - R^2 \geq 0$$

和

$$F_{ij} = X_i^2 + Y_j^2 - X_i + 2Y_j + 1 - R^2 < 0.$$

因此式

$$F_{ij} = X_i^2 + Y_j^2 - X_i + 2Y_j + 1 - R^2 \quad (7)$$

的符号可作为 P_{ij} 点刀具下一步最佳走向的判别式.

如果是走 $(+\Delta Y)$, 下一加工点 $P_{i(j+1)}$ 的判别式

$$F_{i(j+1)} = X_i^2 + (Y_j + 1)^2 - X_i + 2(Y_j + 1) + 1 - R^2,$$

即

$$F_{i(j+1)} = F_{ij} + 2Y_{j+1} + 1. \quad (8)$$

式中 $Y_{j+1} = Y_j + 1$ 为下一加工点 $P_{i(j+1)}$ 的 Y 坐标.

如果走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$, 同理可得下一加工点 $P_{(i+1)(j+1)}$ 的判别式值为:

$$P_{(i+1)(j+1)} = F_{ij} - 2X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1. \quad (9)$$

式中 $X_{i+1} = X_i - 1$ 为下一加工点 $P_{(i+1)(j+1)}$ 的 X 坐标.

当始点 (X_0, Y_0) 在圆弧上时, 由 (7) 式知始点 P_{00} 的判别式值的计算公式为:

$$F_{00} = -X_0 + 2Y_0 + 1. \quad (10)$$

当始点不在圆弧上时,

$$F_{00} = X_0^2 + Y_0^2 - R^2 - X_0 + 2Y_0 + 1. \quad (10')$$

(8)~(10) 式构成了 h_1 区域内逆圆加工判别式值的基本计算公式.

用同样的方式可得其余区域区内顺逆圆插补的计算公式和进给规则, 它们被列于表 3 中.

2. 过区域时判别式值的变换公式

设刀具原在 h_1 内加工. 当刀具的下一加工点已处于 h_2 内时, 则再下一点刀具进给方向已不是在 $(+\Delta Y)$ 和 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 间选择, 而是在 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 和 $(-\Delta X)$ 间选择. 但判别式值仍是按 h_1 区域内的计算公式算出的, 故在这一点上需将这个值变换成按 h_2 区域内的判别式值计算公式算出的值, 才能确保刀具再走下一步时正确地在进给 $(-\Delta X)$ 和 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 间选择. 以后的计算过程当然按 h_2 区域内逆圆插补公式进行.

刀具由 h_1 进入 h_2 的方式有两种, 一是走 $(+\Delta Y)$ 进入 h_2 , 一是走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 进入 h_2 .

h_1 区域内的判别式如 (7) 式所示, 用得到 (7) 式一样的方法可得到 h_2 区域内的判别式

$$F_{ij} = X_i^2 + Y_j^2 - 2X_i + Y_j + 1 - R^2. \quad (11)$$

设刀具原处在 h_1 区域内 P_{ij} 点上. 若下一步是走 $(+\Delta Y)$ 进入 h_2 区域, 按 h_1 的公式, 下一步到达的 $P_{i(j+1)}$ 点的判别式值应为:

$$F_{i(j+1)} = X_i^2 + Y_{j+1}^2 - X_i + 2Y_{j+1} + 1 - R^2.$$

而按 h_2 区域内的公式 (11), $P_{i(j+1)}$ 点的判别式值为:

$$F'_{i(j+1)} = X_i^2 + Y_{j+1}^2 - 2X_i + Y_{j+1} + 1 - R^2.$$

所以有

$$F'_{i(j+1)} = F_{i(j+1)} - X_i - Y_{j+1}. \quad (12)$$

若下一步是走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 进入 h_2 区域, 则下一点 $P_{(i+1)(j+1)}$ 的判别式的值按 h_1 的公式为:

$$F_{(i+1)(j+1)} = X_{i+1}^2 + Y_{j+1}^2 - X_{i+1} + 2Y_{j+1} + 1 - R^2,$$

而按 h_2 的公式, 其值应为:

$$F'_{(i+1)(j+1)} = X_{i+1}^2 + Y_{j+1}^2 - 2X_{i+1} + Y_{j+1} + 1 - R^2,$$

所以有

$$F'_{(i+1)(j+1)} = F_{(i+1)(j+1)} - X_{i+1} - Y_{j+1}. \quad (13)$$

(12) 和 (13) 式即为刀具从 h_1 进入 h_2 时两种情况下的判别式值变换公式.

不难知, 从 $h_2 \rightarrow h_1$ 时, 刀具只能以走 $(-\Delta X)$ 的方式进入, 这时只有一个变换公式

$$F'_{(i+1)j} = F_{(i+1)j} - 2Y_j. \quad (14)$$

考虑顺逆圆加工及各个区域的情况, 总共可得如下 5 个变换公式:

$$F'_{i(j+1)} = F_{i(j+1)} - |X_i| - |Y_{j+1}|, \quad (15)$$

$$F'_{(i+1)j} = F_{(i+1)j} - |X_{i+1}| - |Y_j|, \quad (16)$$

$$F'_{(i+1)j} = F_{(i+1)j} - 2|Y_j|, \quad (17)$$

$$F'_{i(j+1)} = F_{i(j+1)} - 2|X_i|, \quad (18)$$

$$F'_{(i+1)(j+1)} = F_{(i+1)(j+1)} - |X_{i+1}| - |Y_{j+1}|. \quad (19)$$

在什么情况下应用什么变换公式见表 4.

这样, 在圆弧插补中, 每走一步不仅要进行新加工点判别式值和坐标值的计算, 而且要判断新加工点是否已进入下一区域. 一旦区域改变, 就要进行判别式值的变换运算.

图 5 中 (a) 和 (b) 分别为逐点比较法和最小误差法在圆弧插补中的实际加工线.

下面举一个圆弧插补例子. 设需加工一圆弧, 其始点在 $(6, 0)$, 终点在 $(0, 6)$.

由于始点在 h_1 内, 且是逆圆加工, 故有初始值 $F_{00} = -6 + 1 = -5$. 计算过程列于表 5, 刀具轨迹见图 5(b).

3. 圆弧插补误差最小的证明

设所要插补的圆弧 MN 在 h_1 内. 如图 6 所示, 可作一系列线间距为 1 的平行于 X 轴的直

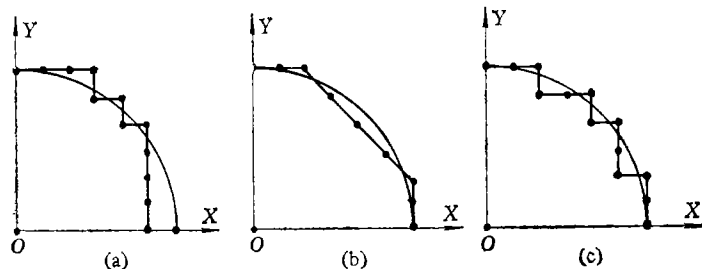


图 5

线列. 不难得知, 不管采用什么样的插补方法(这些方法应是 X 轴和 Y 轴可同时进给的), 刀具轨迹上每步端点都在这些平行线中某一根线上占据坐标为整数的一个点, 每根线上有一个且只有一个端点.

表 4

变换公式	适 用 情 况
(15)	$h_1 \rightarrow h_2, h_5 \rightarrow h_6, h_8 \rightarrow h_7, h_4 \rightarrow h_3$ 用于走单步过上区域时
(16)	$h_3 \rightarrow h_4, h_7 \rightarrow h_8, h_6 \rightarrow h_5, h_2 \rightarrow h_1$ 用于走单步过上区域时
(17)	$h_2 \rightarrow h_3, h_6 \rightarrow h_7, h_7 \rightarrow h_8, h_3 \rightarrow h_2$
(18)	$h_4 \rightarrow h_5, h_8 \rightarrow h_1, h_5 \rightarrow h_4, h_1 \rightarrow h_8$
(19)	用于走 X-Y 步过 $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ 和 315° 线时

表 5

进给步数	判别式值	进给	新点坐标	新点判别式值的计算	过区域判别	判别式值变换	终点判别
1	$F_{00} = -5 < 0$	$(+\Delta Y)$	$X_0 = 6$ $Y_1 = 1$	$F_{01} = F_{00} + 2$ $+ 1 = -2$	否		否
2	$F_{01} = -2 < 0$	$(+\Delta Y)$	$X_0 = 6$ $Y_2 = 2$	$F_{02} = F_{01} + 4$ $+ 1 = 3$	否		否
3	$F_{02} = 3 > 0$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_1 = 5$ $Y_3 = 3$	$F_{13} = F_{02} - 10$ $+ 6 + 1 = 0$	否		否
4	$F_{13} = 0$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_2 = 4$ $Y_4 = 4$	$F_{24} = F_{13} - 8$ $+ 8 + 1 = 1$	是	$F'_{24} = 1 - 4$ $- 4 = -7$	否

由于已进入 h_2 区域, 插补计算和进给判断应换 h_2 区域内的公式和规律

5	$F_{24} = -7 < 0$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_3 = 3$ $Y_5 = 5$	$F_{35} = F_{24} - 6$ $+ 10 + 1 = -2$	否		否
6	$F_{35} = -2 < 0$	$(-\Delta X)$ $(+\Delta Y)$	$X_4 = 2$ $Y_6 = 6$	$F_{46} = F_{35} - 4$ $+ 12 + 1 = 7$	否		否
7	$F_{46} = 7 > 0$	$(-\Delta X)$	$X_5 = 1$ $Y_6 = 6$	$F_{56} = F_{46} - 2$ $+ 1 = 6$	否		否
8	$F_{56} = 6 > 0$	$(-\Delta X)$	$X_6 = 0$ $Y_6 = 6$	$F_{66} = F_{56} - 6$ $+ 1 = 7$	否		是

要证明的命题是: 如果在插补过程中刀具所处的 P_{ij} 点是所在平行直线上的最近点, 那么按最小误差法刀具下一步进给所到达的点也是最近点。

如图 6 所示, AB 线上与 P_{ij} 点紧近邻的两点为 P_a 和 P_b , 其偏差分别为:

$$\delta_a = [(X_i - 1)^2 + Y_i^2]^{1/2} - R$$

和

$$\delta_b = [(X_i + 1)^2 + Y_i^2]^{1/2} - R.$$

由于 P_{ij} 点是 AB 上的最近点, 无论 P_{ij} 点在圆外或圆内, 都应有

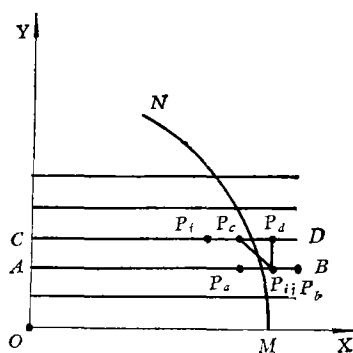


图 6

$$\delta_a + \delta_{ij} = [(X_i - 1)^2 + Y_j^2]^{1/2} + (X_i^2 + Y_j^2)^{1/2} - 2R < 0 \quad (20)$$

和

$$\delta_b + \delta_{ij} = [(X_i + 1)^2 + Y_j^2]^{1/2} + (X_i^2 + Y_j^2)^{1/2} - 2R \geq 0. \quad (21)$$

把上两不等式有理化后分别得与之等效的不等式

$$8R^2(2X_i^2 + 2Y_j^2 - 2X_i + 1 - 2R^2) < (2X_i - 1)^2$$

和

$$8R^2(2X_i^2 + 2Y_j^2 + 2X_i + 1 - 2R^2) \geq (2X_i + 1)^2.$$

考虑到所有的量取整数,最终可得与(20)和(21)式等效的两个不等式

$$X_i^2 + Y_j^2 - X_i - R^2 < 0 \quad (22)$$

和

$$X_i^2 + Y_j^2 + X_i - R^2 \geq 0. \quad (23)$$

当 $F_{ij} \geq 0$ 时,按最小误差法,处在 P_{ij} 点的刀具应走 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 到达 P_c 点。下面证明 P_c 点是下一平行线 CD 上最靠近圆弧的点。

首先把 CD 上 P_c 右边的点和 P_c 作比较。 P_c 点和 P_d 点的偏差分别为:

$$\delta_c = [(X_i - 1)^2 + (Y_j + 1)^2]^{1/2} - R$$

和

$$\delta_d = [X_i^2 + (Y_j + 1)^2]^{1/2} - R.$$

$$\delta_c + \delta_d = [(X_i - 1)^2 + (Y_j + 1)^2]^{1/2} + [X_i^2 + (Y_j + 1)^2]^{1/2} - 2R.$$

假设 $\delta_c + \delta_d \geq 0$, 经有理化并考虑到所有的量是数字量,可得和这不等式等效的另一不

表 6

象限	始点 F 值计算公式	$F_m \geq 0$		$F_m < 0$	
		进给	新点 F 值计算公式	进给	新点 F 值计算公式
1	$F_0 = X_e - Y_e $	$(+\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2 Y_e $	$(+\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m + 2 X_e $
2	$F_0 = X_e - Y_e $	$(-\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2 Y_e $	$(+\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m + 2 X_e $
3	$F_0 = X_e - Y_e $	$(-\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2 Y_e $	$(-\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m + 2 X_e $
4	$F_0 = X_e - Y_e $	$(+\Delta X)$	$F_{m+1} = F_m - 2 Y_e $	$(-\Delta Y)$	$F_{m+1} = F_m + 2 X_e $

表 7

象 限	始点 F 值计算公式	$F_{ij} \geq 0$			$F_{ij} < 0$		
		进给	新点坐标	新点 F 值计算公式	进给	新点坐标	新点 F 值计算公式
逆 圆	1	$F_{00} = Y_0 - X_0 $	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_i = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1}$	$(+\Delta Y)$	$X_i = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2Y_{j+1}$
	2	$F_{00} = X_0 - Y_0 $	$X_i = X_j$ $Y_{i+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{i+1}$	$(-\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1}$
	3	$F_{00} = Y_0 - X_0 $	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1}$	$(-\Delta Y)$	$X_i = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{j+1}$
	4	$F_{00} = X_0 - Y_0 $	$X_i = X_j$ $Y_{i+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2Y_{i+1}$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1}$
顺 圆	4	$F_{00} = Y_0 - X_0 $	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1}$	$(-\Delta Y)$	$X_i = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{j+1}$
	3	$F_{00} = X_0 - Y_0 $	$X_i = X_j$ $Y_{i+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2Y_{i+1}$	$(-\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i - 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2X_{i+1}$
	2	$F_{00} = Y_0 - X_0 $	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1}$	$(+\Delta Y)$	$X_i = X_j$ $Y_{j+1} = Y_j + 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2Y_{j+1}$
	1	$F_{00} = X_0 - Y_0 $	$X_i = X_j$ $Y_{i+1} = Y_j - 1$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} - 2Y_{i+1}$	$(+\Delta X)$	$X_{i+1} = X_i + 1$ $Y_j = Y_j$	$F_{(i+1)j} = F_{ij} + 2X_{i+1}$

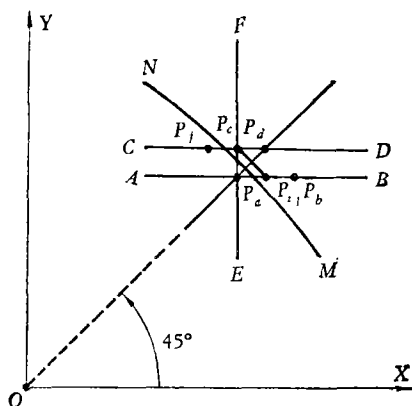


图 7

等式

$$X_i^2 + Y_i^2 - X_i + 2Y_i + 1 - R^2 \geq 0.$$

上面不等式正是 $F_{ij} \geq 0$, 按当初的假定这是成立的, 所以的确有不等式 $\delta_c + \delta_d \geq 0$, 这说明 CD 上的 P_d 点在圆外且比 P_c 点距圆弧更远, P_d 右边的点距圆弧就更远了。

再把 P_c 点和 CD 上 P_c 左边的点比较。 P_i 点的偏差为:

$$\delta_i = [(X_i - 2)^2 + (Y_i + 1)^2]^{1/2} - R,$$

$$\delta_c + \delta_i = [(X_i - 2)^2 + (Y_i + 1)^2]^{1/2} + [(X_i - 1)^2 + (Y_i + 1)^2]^{1/2} - 2R.$$

先假设 $\delta_i + \delta_c < 0$, 再证明其的确成立。

和它等效的不等式为:

$$A = X_i^2 + Y_i^2 - 3X_i + 2Y_i - R^2 + 3 < 0. \quad (24)$$

下面证明 (24) 式的确成立。有两种情况:

(1) 当 $X_i \geq Y_i + 2$, 即刀具离 45° 直线在 Y 方向上还差两步和两步以上的时候, (24) 式可写成

$$A = X_i^2 + Y_i^2 - X_i - R^2 - 2[X_i^2 - (Y_i + 2)] - 1.$$

考虑到 (22) 式, 上式的确小于 0, 从而 (24) 式成立, 故 $\delta_i + \delta_c < 0$ 的确成立。因此 CD 上的 P_i 点在圆内且比 P_c 点距圆更远, P_i 左边的点距圆弧就更远了。因此 P_c 点是 CD 线上的最近点。

(2) 当 $X_i = Y_i + 1$ 时, 即刀具在 Y 方向上还差一步就到 45° 直线时。这时 P_a 点的坐标应为 $(X_i - 1 = Y_i; Y_i)$, 故 P_a 点在 45° 直线上。而刀具走下一步 $(-\Delta X, +\Delta Y)$ 所到达的 P_c 点的坐标为 $(X_{i+1} = X_i - 1, Y_{i+1} = Y_i + 1 = X_i)$, 所以 P_c 点已处于 h_2 区域内, 因此不能再作判断。这时 P_c 点是否是最靠近圆弧的点应与垂直线 EF 上各点作比较。由图 7 不难看出 P_c 点是以 45° 线为对称轴的 P_{ij} 点的对称点。而按最初的假设, P_{ij} 点是 AB 上的最近点, 故 P_c 点是 EF 线上的最近点。

以上证明了处在 P_{ij} 点的刀具按最小误差法当 $F_{ij} \geq 0$ 而走到 P_c 点时, P_c 点确是一个最近点。

当 $F_{ij} < 0$ 时, 按最小误差法处在 P_{ij} 点的刀具应走 $(+\Delta Y)$ 到 P_d 点 (见图 6)。利用

(23) 式, 仿上同样可证明这时 P_d 点是 CD 线上的最近点。

以上证明了前述命题。

由于刀具最初的位置是在圆弧的起点上, 或最接近圆弧, 所以按最小误差法进行圆弧插补时, 轨迹上每步的端点都是最近点。从而保证了该轨迹的最大偏差在所有可能的加工轨迹中是最小的, 各端点偏差的平方和是最小的, 各端点偏差绝对值的和也是最小的。

四、单步进给方式时的插补

若刀具每步只能沿 X 方向或 Y 方向进给而不能同时进给时, 完全仿照前述的思想和方法, 可得各个象限内的直线插补和圆弧插补公式, 如表 6 和表 7 所示。由表可见, 当最小误差法用于单步进给方式时, 其递推公式和进给规则形同于单步追踪法^[8]。但仅形同而实不同, 一则我们在这里得出的公式和规则完全是采用不同的思想方法, 从而两者判别式全不同(如圆弧逆圆插补判别式为 $F_{i,j} = X_i^2 + Y_j^2 - X_i + Y_j - R^2$); 再则, 更主要的是当始点不在圆弧上时, 单步追踪法和最小误差法 F 的初值必不同(最小误差法 F 的初值为 $F_{00} = X_0^2 + Y_0^2 - R^2 - X_0 + Y_0$), 这使以后的 F 值也不同, 从而两者的插补轨迹必不同。

单步进给时, 各有一直线插补和圆弧插补的例子分别示于图 2(c) 和图 5(c) 中。

仿前不难证明单步进给方式时的最小误差法的插补误差在所有单步进给插补法中也是最小的。

最小误差法保证了加工轨迹上每步的端点相对于加工曲线来说都是最近点, 这就是最小误差法误差最小的根本含义。

参 考 文 献

- [1] 袁超廷, 科技资料(79), 重庆建筑工程学院科技情报组, 1978, 8.
- [2] 张岫云, 上海机械学院学报, 1980, 2: 43—59.
- [3] 李恩林, 中国科学, 1981, 10: 1289—1298.
- [4] 袁亦祥, 上海机床, 1982, 1: 13—17.
- [5] 梁宗岳, 中国科学 A 辑, 1983, 1: 81—88.
- [6] 齐从谦, 机床, 1983, 7: 25—28.
- [7] 李恩林, 插补原理, 机械工业出版社, 1984, 81—101.
- [8] 清华大学, 机床数字控制讲义, 第一册, 1978.