q -Schur 超代数

献给刘绍学教授 90 华诞

杜杰¹, 顾海霞^{2*}

1. School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales (UNSW), Sydney 2052, Australia;

2. 湖州师范学院理学院数学系, 湖州 313000

E-mail: j.du@unsw.edu.au, ghx@zjhu.edu.cn

收稿日期: 2017-12-25; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2018-10-29; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501197 和 11671234) 资助项目

摘要 本文总结了近期在 q -Schur 超代数、量子一般线性超群和它们的典范基以及不可约 (多项式) 表示方面的研究. 首先给出了 q -Schur 超代数在三种不同背景下的定义和相应的基, 并且刻画了这三组基之间的关系, 接着描述了 q -Schur 超代数中的某些乘法公式及其在量子一般线性超群的新实现、 q -Schur 超代数的正则表示和量子一般线性超群的正部分的典范基的构造中的应用, 同时给出了 q -Schur 超代数的半单性的判别条件. 通过对 Alperin 的权猜想和 Scott 的置换表示理论的推广, 本文得到了 q -Schur 超代数的不可约模分类. 本文最后提到了在不引入量子坐标代数情形下构造无穷小和小 q -Schur 超代数的新方法.

关键词 q -Schur 超代数 Hecke 代数 量子一般线性超群

MSC (2010) 主题分类 20C08, 20G42, 20G43

1 引言

自 20 世纪 70 年代至今, 对有限维代数表示的研究经历了几个突破性的发展阶段. 首先是箭图 (quiver) 方法的引入, 代表性研究成果有 Gabriel 定理及 Ringel-Dlab 的推广工作等. 这一方法后来被 Kac 推广到无限维李代数. 然后, 在 20 世纪 80 年代后期, Ringel 找到了 Ringel-Hall 代数同量子群的联系. 这一突破性的发现启发了 Lusztig 用几何方法研究量子群及其典范基. 北京的刘绍学教授和上海的曹锡华教授带领他们的学生也在该方面进行了非常深入的研究, 并取得了重要成果. 本文将对一类有限维超代数的研究进行系统的介绍.

超代数 $\mathcal{A}$ 是具有 $\mathbb{Z}_2$ -阶化结构的代数, 即 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, 其中 $\mathcal{A}_0$ 称为是 $\mathcal{A}$ 的偶部分, $\mathcal{A}_1$ 称为是 $\mathcal{A}$ 的奇部分. 如果一个超代数没有非平凡的双边理想, 那么称为单超代数. 对于有限维超代数, 根据超的 Wedderburn 定理得出, 复数域 $\mathbb{C}$ 上的有限维单超代数 (具有 $\mathbb{Z}_2$ -阶化的代数) 同构于以下两类代数:

英文引用格式: Du J, Gu H X. q -Schur superalgebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1571–1594, doi: 10.1360/N012017-00265

(1) 全矩阵代数 $\mathcal{M} = M_{m+n}(\mathbb{C})$, 其中

$$\mathcal{M}_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} \middle| A \in M_m(\mathbb{C}), D \in M_n(\mathbb{C}) \right\},$$

$$\mathcal{M}_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix} \middle| B \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), C \in M_{n \times m}(\mathbb{C}) \right\}.$$

(2) Queer 矩阵超代数

$$\mathcal{Q}_n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \middle| A, B \in M_n(\mathbb{C}) \right\},$$

其中

$$\mathcal{Q}_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \middle| A \in M_n(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathcal{Q}_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} O & B \\ B & O \end{pmatrix} \middle| B \in M_n(\mathbb{C}) \right\}.$$

设 $\mathcal{A}$ 是一个超代数, 对于任意的 $z \in \mathcal{A}$, $\hat{z}$ 表示元素 z 在 $\mathbb{Z}_2$ 阶化下的次数, 我们可以赋予 $\mathcal{A}$ 一个交换算子乘法

$$[x, y] := xy - (-1)^{\hat{x}\hat{y}}yx,$$

其中 x 和 y 是 $\mathcal{A}$ 中的齐次元素, 使得 $\mathcal{A}$ 成为一个 Lie 超代数.

对于单超代数 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{Q}$, 赋予它们上述交换算子乘法后, 分别得到两类 Lie 超代数: 一般线性 Lie 超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 和 Queer Lie 超代数 $\mathfrak{q}_n$.

本文针对一般线性 Lie 超代数 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的量子包络代数, 即量子一般线性超群, 以及相关的有限维 q -Schur 超代数, 总结了作者及其合作者近期的一些研究成果. 全文共分为 8 节, 逐次介绍了以下内容. 第 2 节介绍了 q -Schur 超代数三种不同背景下的定义及相应的基元素之间的关系. 第 3 节介绍了 q -Schur 超代数关于相对范 (relative norm) 基及其正规化基的一些乘法公式和该代数的正则表示. 第 4 节介绍了量子一般线性超群的定义, 并通过 q -Schur 超代数将它实现为若干个 q -Schur 超代数的直积的子代数, 即量子一般线性超群的实现, 在此过程中, 还列出了量子一般线性超群的一组单项式基和一组 PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) 基. 第 5 节推广了非超情形下量子一般线性超群上的对合, 定义了量子一般线性超群的一个对合, 并讨论了该代数的正部分和负部分在该对合作用下不变的一组基, 在非超情形, 称之为典范基, q -Schur 超代数是量子一般线性超群的同态像, 在此我们还讨论了这些典范基的基元素在满同态下的像, 其中不为 0 的像构成了 q -Schur 超代数的正部分或负部分的一组典范基. 第 6 节总结了文献 [1] 中关于 q -Schur 超代数的半单性的讨论. 第 7 节结合文献 [2, 3] 中的研究成果, 综合讨论了在特征不等于 2 的代数闭域上当量子参数是非平凡单位根时, q -Schur 超代数的不可约模分类. 第 8 节将无穷小和小 q -Schur 代数推广到超的情形, 定义了无穷小和小 q -Schur 超代数.

2 q -Schur 超代数

设 $\mathfrak{S}_r$ 是由 $1, 2, \dots, r$ 的所有置换构成的对称群, 集合 $S = \{s_k \mid 1 \leq k < r\}$ 是单反射的全体, 其中 $s_k = (k, k+1)$, 与 S 相关的 $\mathfrak{S}_r$ 上的长度函数记为 $\ell: \mathfrak{S}_r \rightarrow \mathbb{N}$.

设 $\mathcal{R}$ 是含有单位元的交换环, $q \in \mathcal{R}^\times$. 定义 $\mathcal{R}$ 上的 Hecke 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{S}_r)$ 为一个自由 $\mathcal{R}$ -模, 集合 $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_r\}$ 是它的一组基, 其上的乘法由如下公式定义: 对任意的 $s \in S$, $w \in \mathfrak{S}_r$, 有

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws}, & \text{如果 } \ell(ws) > \ell(w), \\ (q-1)T_w + qT_{ws}, & \text{其他情形.} \end{cases} \quad (2.1)$$

特别地, 当 $\mathcal{R}$ 为 Laurent 多项式环 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 时, 设 $q = v^2$, Hecke 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}(\mathfrak{S}_r)$ 简记为 $\mathcal{H}$.

记 r 的具有 N 个分量的组合 (composition) 全体为

$$\Lambda(N, r) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{N}^N \mid |\lambda| = \sum_i \lambda_i = r \right\}.$$

关于 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \Lambda(N, r)$ 的 $\mathfrak{S}_r$ 的抛物子群记为 $\mathfrak{S}_\lambda$, 它是由保持整数集合

$$\{1, 2, \dots, \lambda_1\}, \{\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2\}, \{\lambda_1 + \lambda_2 + 1, \lambda_1 + \lambda_2 + 2, \dots\}, \dots$$

不变的置换全体组成. $\mathfrak{S}_\lambda$ 在 $\mathfrak{S}_r$ 中的右陪集中的长度最短的代表元的集合简记为 $\mathcal{D}_\lambda$, 即 $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{D}_{\mathfrak{S}_\lambda}$. 若 μ 为一个 r -组合, 则 $\mathfrak{S}_\lambda$ 和 $\mathfrak{S}_\mu$ 在 $\mathfrak{S}_r$ 中的双陪集中的长度最短的代表元的集合记为 $\mathcal{D}_{\lambda\mu} = \mathcal{D}_\lambda \cap \mathcal{D}_\mu^{-1}$. 对于 $\lambda, \mu \in \Lambda(N, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}$, 子群 $\mathfrak{S}_\lambda^d \cap \mathfrak{S}_\mu = d^{-1}\mathfrak{S}_\lambda d \cap \mathfrak{S}_\mu$ 是一个抛物子群, 把它对应的组合记为 $\lambda d \cap \mu$, 换句话说讲, $\mathfrak{S}_{\lambda d \cap \mu} = \mathfrak{S}_\lambda^d \cap \mathfrak{S}_\mu$. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{N \times N}$, 其中 $a_{ij} = |R_i^\lambda \cap d(R_j^\mu)|$, $\nu^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{Nj})$, 则有

$$\lambda d \cap \mu = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots, \nu^{(N)}).$$

定义 $\mathcal{J}(\lambda, d, \mu) = (|R_i^\lambda \cap d(R_j^\mu)|)_{ij} = A$, 可以得到一一映射

$$\mathcal{J} : \{(\lambda, d, \mu) \mid \lambda, \mu \in \Lambda(N, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}\} \rightarrow M(N, r),$$

其中 $M(N, r) = \{A = (a_{ij})_{N \times N} \in M_N(\mathbb{N}) \mid |A| = \sum_{i,j} a_{ij} = r\}$.

若矩阵 $A \in M(N, r)$, 且 $\mathcal{J}^{-1}(A) = (\lambda, d, \mu)$, 则 $\lambda, \mu \in \Lambda(N, r)$, 其中

$$\lambda = \text{ro}(A) := \left(\sum_{j=1}^N a_{1,j}, \sum_{j=1}^N a_{2,j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{N,j} \right), \quad \mu = \text{co}(A) = \left(\sum_{i=1}^N a_{i,1}, \sum_{i=1}^N a_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^N a_{i,N} \right).$$

设 m 和 n 为两个不同时为 0 的非负整数, 接下来将讨论与 m 、 n 和 r 相关的 q -Schur 超代数分别在 Hecke 代数、超空间和量子矩阵超代数背景下的定义和相应的基. 首先介绍 q -Schur 超代数在 Hecke 代数背景下的定义. 令 $[1, m+n] := \{1, 2, \dots, m+n\}$, 定义该集合上的分次函数为映射 $\hat{\cdot} : [1, m+n] \rightarrow \{0, 1\}$, 其中

$$\hat{h} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } 1 \leq h \leq m, \\ 1, & \text{如果 } m+1 \leq h \leq m+n. \end{cases} \quad (2.2)$$

对任意 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}) \in \Lambda(m+n, r)$, 为了标识它的奇偶部分, 通常把该组合重新写为

$$\lambda = (\lambda^{(0)} \mid \lambda^{(1)}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+n}),$$

其中 $\lambda^{(0)} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\lambda^{(1)} = (\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{m+n})$. 同时将 $\Lambda(m+n, r)$ 记为 $\Lambda(m \mid n, r)$, 即 $\Lambda(m \mid n, r) := \Lambda(m+n, r)$.

设 $\lambda = (\lambda^{(0)} \mid \lambda^{(1)}) \in \Lambda(m \mid n, r)$, 则相关的抛物子群

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda^{(0)}} \mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}} = \mathfrak{S}_{\lambda^{(0)}} \times \mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}},$$

其中 $\mathfrak{S}_{\lambda^{(0)}} \leq \mathfrak{S}_{\{1, 2, \dots, |\lambda^{(0)}|\}}$ 和 $\mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}} \leq \mathfrak{S}_{\{|\lambda^{(0)}|+1, |\lambda^{(0)}|+2, \dots, r\}}$ 分别是 $\mathfrak{S}_\lambda$ 的奇部分和偶部分, 该子群对应的 Hecke 代数记为 $\mathcal{H}_\lambda$, 它是由 $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_\lambda\}$ 中的元素张成. 令

$$x_{\lambda^{(i)}} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{\lambda^{(i)}}} T_w, y_{\lambda^{(i)}} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_{\lambda^{(i)}}} (-q)^{-\ell(w)} T_w, \quad i = 0, 1,$$

记

$$[xy]_\lambda := x_{\lambda^{(0)}} y_{\lambda^{(1)}}, \quad [yx]_\lambda := y_{\lambda^{(0)}} x_{\lambda^{(1)}},$$

$$\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(m \mid n, r)} [xy]_\lambda \mathcal{H}_\mathcal{R}.$$

$\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 是 $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ -超模, 其上的 $\mathbb{Z}_2$ -阶化结构为

$$\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r)_i = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \Lambda(m \mid n, r) \\ |\lambda^{(1)}| \equiv i \pmod{2}}} x_{\lambda^{(0)}} y_{\lambda^{(1)}} \mathcal{H}_\mathcal{R} \quad (i = 0, 1).$$

根据文献 [4], 定义 $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ -模自同态代数 $\mathcal{S}_\mathcal{R}(m \mid n, r) = \text{End}_{\mathcal{H}_\mathcal{R}}(\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r))$ 为 q -Schur 超代数, 该代数上的 $\mathbb{Z}_2$ 结构是由 $\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 上的 $\mathbb{Z}_2$ 阶化结构诱导的. 特别地, $\mathcal{Z}$ 上的 v^2 -Schur 超代数记为 $\mathcal{S}(m \mid n, r)$.

接下来要刻画 $\mathcal{S}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 上的一组与 $\mathcal{R}$ 的特征无关的基.

设 $\lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r)$, 记 $\mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ = \{d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu} \mid \mathfrak{S}_{\lambda^{(0)}}^d \cap \mathfrak{S}_{\mu^{(1)}} = 1, \mathfrak{S}_{\lambda^{(1)}}^d \cap \mathfrak{S}_{\mu^{(0)}} = 1\}$. 与非超情形不同, 在超形式下, 我们将会用该集合代替 $\mathcal{D}_{\lambda\mu}$.

令

$$M(m \mid n) = \{A = (a_{i,j})_{m+n} \in M_{m+n}(\mathbb{N}) \mid a_{i,j} \in \{0, 1\}, \forall \hat{i} + \hat{j} = 1\},$$

$$M(m \mid n, r) = \{A = (a_{ij})_{m+n} \in M(m \mid n) \mid |A| = r\}.$$

对于 $\lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ$, 根据文献 [4, (5.3.2)], 有

$$T_{\mathfrak{S}_\lambda d \mathfrak{S}_\mu}^\pm := \sum_{\substack{w_0 w_1 \in \mathfrak{S}_\mu \cap \mathcal{D}_\nu, \\ w_0 \in \mathfrak{S}_{\mu^{(0)}}, w_1 \in \mathfrak{S}_{\mu^{(1)}}}} (-q)^{-\ell(w_1)} x_{\lambda^{(0)}} y_{\lambda^{(1)}} T_d T_{w_0} T_{w_1},$$

其中 $\nu = \lambda d \cap \mu$. 该元素用于定义 $\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 上的 $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ -模同态 $\psi_{\lambda\mu}^d$.

定义 2.1 设 $\lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ$, 存在 $\mathfrak{T}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 上的映射 $\psi_{\lambda\mu}^d$, 使得

$$\psi_{\lambda\mu}^d([xy]_\alpha h) = \delta_{\mu, \alpha} T_{\mathfrak{S}_\lambda d \mathfrak{S}_\mu}^\pm h, \quad \forall \alpha \in \Lambda(m \mid n, r), \quad h \in \mathcal{H}_\mathcal{R}. \quad (2.3)$$

该映射是一个 $\mathcal{H}_\mathcal{R}$ -模同态. 若 $A = \mathcal{J}(\lambda, d, \mu)$, 记 $\psi_A := \psi_{\lambda\mu}^d$.

引理 2.1 (参见文献 [4, 定理 5.8]) $\{\psi_A \mid A \in M(m \mid n, r)\}$ 构成了 $\mathcal{S}_\mathcal{R}(m \mid n, r)$ 一组 $\mathcal{R}$ -基, 且

$$\mathcal{S}_\mathcal{R}(m \mid n, r) \cong \mathcal{S}(m \mid n, r) \otimes_{\mathcal{Z}} \mathcal{R}.$$

接下来考虑 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 基于超空间的张量积上的定义, 在此过程中, 我们将会引入该代数的另一组基—相对范基, 同时给出相对范基与 ψ 基之间的关系.

设 $V_{\mathcal{R}}(m | n)$ 是秩为 $m+n$ 的自由 $\mathcal{R}$ -模. $v_1, v_2, \dots, v_{m+n}$ 是它的一组基, 若令 v_i 的次数为 $\hat{i}$, 则分次函数 $\hat{\cdot}$ 赋予 $V_{\mathcal{R}}(m | n)$ 一个 $\mathbb{Z}_2$ -阶化结构: $V_{\mathcal{R}}(m | n) = V_0 \oplus V_1$, 其中 V_0 是由 $v_1, \dots, v_m$ 张成的子模, V_1 是由 $v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$ 张成的子模, 于是, $V_{\mathcal{R}}(m | n)$ 就变成了一个“超空间”.

令

$$I(m | n, r) = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^r \mid 1 \leq i_j \leq m+n, \forall j\}.$$

对任意 $\lambda = (\lambda^{(0)} | \lambda^{(1)}) \in \Lambda(m | n, r)$, 设 $\mathbf{i}_{\lambda} \in I(m | n, r)$ 为

$$\mathbf{i}_{\lambda} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\lambda_1^{(0)}}, \dots, \underbrace{m, \dots, m}_{\lambda_m^{(0)}}, \underbrace{m+1, \dots, m+1}_{\lambda_1^{(1)}}, \dots, \underbrace{m+n, \dots, m+n}_{\lambda_n^{(1)}}).$$

为简化记号, 记 $v_{\lambda} := v_{\mathbf{i}_{\lambda}}$.

对称群 $\mathfrak{S}_r$ 可以通过位置置换右作用在 $I(m | n, r)$ 的元素上, 即对任意 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_r) \in I(m | n, r)$, 有 $\mathbf{i}w = (i_{w(1)}, i_{w(2)}, \dots, i_{w(r)}), \forall w \in \mathfrak{S}_r$.

对任意 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_r) \in I(m | n, r)$, 设 $v_{\mathbf{i}} = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_r} := v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}$. 定义 $v_{\mathbf{i}}$ 的权 $wt(v_{\mathbf{i}})$ 为 r -组合 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n})$, 其中 $\lambda_k = \#\{i_j \mid i_j = k, 1 \leq j \leq r\}$. 显然, $\{v_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in I(m | n, r)}$ 构成了张量空间 $V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r}$ 的一组基.

对任意 $w \in \mathfrak{S}_r$, 令 $T_w = v^{\ell(w)} \mathcal{T}_w$. 根据文献 [5, 定理 2.1], $V_{\mathcal{R}}(m | n, r)^{\otimes r}$ 在下面的作用下构成一个右 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ -模:

$$v_{\mathbf{i}} \mathcal{T}_{s_k} = \begin{cases} (-1)^{\widehat{i_k i_{k+1}}} v_{\mathbf{i} s_k}, & \text{如果 } i_k < i_{k+1}, \\ v v_{\mathbf{i}}, & \text{如果 } i_k = i_{k+1} \leq m, \\ (-v^{-1}) v_{\mathbf{i}}, & \text{如果 } i_k = i_{k+1} \geq m+1, \\ (-1)^{\widehat{i_k i_{k+1}}} v_{\mathbf{i} s_k} + (v - v^{-1}) v_{\mathbf{i}}, & \text{如果 } i_k > i_{k+1}, \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 $s_k = (k, k+1)$.

设 $\lambda \in \Lambda(m | n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda}$, 如果 $\mathbf{i}_{\lambda} d = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, 令

$$\hat{d} = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{k < l, i_k > i_l} \widehat{i_k i_l}. \quad (2.5)$$

引理 2.2 (参见文献 [4, 命题 8.3 和推论 8.4]) 存在如下右 $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ -模同构:

$$f: V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r} \longrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(m | n, r)} x_{\lambda^{(0)}} y_{\lambda^{(1)}} \mathcal{H}_{\mathcal{R}}, \quad (-1)^{\hat{d}} v_{\mathbf{i}_{\lambda} d} \longmapsto x_{\lambda^{(0)}} y_{\lambda^{(1)}} \mathcal{T}_d, \quad \forall \lambda \in \Lambda(m | n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda}.$$

而且, f 诱导了超代数同构

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r) \cong \text{End}_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}(V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r}), \quad g \rightarrow f g f^{-1}, \quad \forall g \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r).$$

定义 2.2 (1) 设 λ 和 μ 是两个 r -组合, 且 $\mathfrak{S}_{\lambda} \leq \mathfrak{S}_{\mu}$, M 是 $\mathcal{H}_{\mu}$ - $\mathcal{H}_{\lambda}$ -双模. M 上的相对范映射定义为

$$N_{\mathfrak{S}_{\mu}, \mathfrak{S}_{\lambda}}(b) = \sum_{w \in \mathcal{D}_{\lambda} \cap \mathfrak{S}_{\mu}} \mathcal{T}_{w^{-1}} b \mathcal{T}_w, \quad \forall b \in M.$$

(2) 设 M 是一个 $\mathcal{H}_{\lambda}$ - $\mathcal{H}_{\lambda}$ -双模, 定义 $Z_M(\mathcal{H}_{\lambda}) = \{m \in M \mid hm = mh, \forall h \in \mathcal{H}_{\lambda}\}$.

设 $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(m | n, r)$, 定义线性映射 $e_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} \in \text{End}_{\mathcal{R}}(V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r})$ 为

$$(v_{\mathbf{i}'})e_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = \begin{cases} v_{\mathbf{j}}, & \text{如果 } \mathbf{i}' = \mathbf{i}, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \quad (2.6)$$

特别地, 若 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}_{\mu}, \mathbf{i}_{\lambda}d)$, 其中 λ 和 μ 为 r -组合, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}$, 此时, $e_{\mathbf{i}_{\mu}, \mathbf{i}_{\lambda}d}$ 简记为 $e_{\mu, \lambda d}$.

根据引理 2.2, 我们可以将 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 与 $\text{End}_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}(V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r})$ 等同起来. 对任意的 $\lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\circ}$, 设 $N_{\mu\lambda}^d := N_{\mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_{\lambda d \cap \mu}}(e_{\mu, \lambda d})$. 根据文献 [2] 可知, $N_{\mu\lambda}^d \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$. 如果 $\mathcal{J}(\lambda, d, \mu) = A$, 也记 $N_A = N_{\mu\lambda}^d$.

定理 2.1 集合

$$\mathcal{B} = \{N_{\mu\lambda}^d \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\circ}\}$$

是 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的一组基.

称 $\mathcal{B}$ 为相对范基. 假设 $\mathcal{R} = F$ 是特征不为 2 的域, 且 $v \in F$. 下面引入 q -Schur 超代数在量子矩阵超代数背景下的定义 [6].

定义 2.3 域 F 上的量子矩阵超代数 $\mathcal{A}_q(m | n)$ 定义为由 x_{ij} ($1 \leq i, j \leq m+n$) 生成的满足以下关系式的超代数:

- (1) $x_{ij}^2 = 0$, 如果 $\hat{i} + \hat{j} = 1$;
- (2) $x_{ij}x_{ik} = (-1)^{(\hat{i}+\hat{j})(\hat{i}+\hat{k})}q^{(-1)^{\hat{i}+1}}x_{ik}x_{ij}$, 如果 $j < k$;
- (3) $x_{ij}x_{kj} = (-1)^{(\hat{i}+\hat{j})(\hat{k}+\hat{j})}q^{(-1)^{\hat{j}+1}}x_{kj}x_{ij}$, 如果 $i < k$;
- (4) $x_{ij}x_{kl} = (-1)^{(\hat{i}+\hat{j})(\hat{k}+\hat{l})}x_{kl}x_{ij}$, 如果 $i < k$ 且 $j > l$;
- (5) $x_{ij}x_{kl} = (-1)^{(\hat{i}+\hat{j})(\hat{k}+\hat{l})}x_{kl}x_{ij} + (-1)^{\hat{k}\hat{j}+\hat{k}\hat{l}+\hat{j}\hat{l}}(q^{-1} - q)x_{il}x_{kj}$, 如果 $i < k$ 且 $j < l$.

Manin [6] 证明了 $\mathcal{A}_q(m | n)$ 具有余代数结构, 其中余乘法定义为

$$\Delta : \mathcal{A}_q(m | n) \rightarrow \mathcal{A}_q(m | n) \otimes \mathcal{A}_q(m | n), \quad \Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{m+n} x_{ik} \otimes x_{kj};$$

余单位定义为

$$\varepsilon : \mathcal{A}_q(m | n) \rightarrow F, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m+n.$$

生成元 x_{ij} 的 $\mathbb{Z}_2$ 阶化次数为 $\hat{i} + \hat{j} \in \mathbb{Z}_2$. 因此, $\mathcal{A}_q(m | n)$ 是超双代数.

设 $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_r) \in I(m | n, r)$, 令

$$x_{\mathbf{i}, \mathbf{j}} = x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} \cdots x_{i_r j_r}.$$

特别地, 对于 $\lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\circ}$, 记 $x_{\mu, \lambda d} := x_{\mathbf{i}_{\mu}, \mathbf{i}_{\lambda}d}$. 如果 $\mathcal{J}(\lambda, d, \mu)$ 的转置矩阵 $\mathcal{J}(\lambda, d, \mu)^T = A$, 也记 $x^A := x_{\mathbf{i}_{\mu}, \mathbf{i}_{\lambda}d}$.

引理 2.3 (1) (参见文献 [6] 和 [4, 推论 9.3]) $\{x^A\}_{A \in M(m|n)}$ 构成了 $\mathcal{A}_q(m | n)$ 的一组基.

(2) (参见文献 [4, 命题 9.7]) 设 $\mathcal{A}_q(m | n, r)$ 是由

$$\mathcal{B}^{\vee} = \{x_{\mu, \lambda d} \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^{\circ}\} = \{x^A\}_{A \in M(m|n, r)}$$

中的元素张成的子空间, 那么 $\mathcal{A}_q(m | n, r)$ 是一个子余代数, 并且 $\mathcal{B}^{\vee}$ 是它的一组基, q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 同构于 $\mathcal{A}_q(m | n, r)$ 的对偶代数 $\mathcal{A}_q(m | n, r)^*$.

记 $x_{\mu, \lambda d} \in \mathcal{B}^\vee$ 对偶元素为 $x_{\mu, \lambda d}^*$, 集合 $\{x_{\mu, \lambda d}^* \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ\}$ 构成 $\mathcal{S}_F(m \mid n, r)$ 的一组基, 我们称之为 x -基.

下面的两个命题源于文献 [2], 它们刻画了 q -Schur 超代数的相对范基、 x -基和 ψ -基之间的关系.

定理 2.2 (参见文献 [2, 定理 8.3]) 若 $\lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ$, 且 $\nu = \lambda d \cap \mu$, 则

$$N_{\mu\lambda}^d = (-1)^{\sum_{1 \leq k < l \leq r} (\widehat{i_\lambda d})_k ((\widehat{i_\lambda d})_l + (\widehat{i_\mu})_l)} x_{\mu, \lambda d}^*.$$

定理 2.3 (参见文献 [2, 推论 8.4]) 若 $\lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\mu\lambda}^\circ$, 则

$$\psi_{\mu, \lambda}^d = q^{\ell(d)} (-1)^{\widehat{d}} (-1)^{\sum_{1 \leq k < l \leq r} (\widehat{i_\lambda d})_k ((\widehat{i_\lambda d})_l + (\widehat{i_\mu})_l)} x_{\mu, \lambda d}^*.$$

3 乘法公式和正则表示

本节将会介绍 q -Schur 超代数的关于相对范基及其正规化的乘法公式, 这些公式是将量子一般线性超群实现为 q -Schur 超代数的直积的子代数的关键. 应用这些公式, 我们可以刻画出 q -Schur 超代数的正则表示. 在第 6 和 8 节中, 我们还会应用 q -Schur 超代数的正则表示分别确定 q -Schur 超代数的半单性, 在不引入量子一般线性超群和量子坐标代数情形下, 构造出无穷下 q -Schur 超代数和小 q -Schur 超代数.

对于整数 t ($0 \leq t \leq s$), 定义 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上的 Gauss 多项式

$$\left[\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right] = \frac{[s]!}{[t]! [s-t]!},$$

其中

$$[r]! := [1][2] \cdots [r], \quad [i] = 1 + q + \cdots + q^{i-1}.$$

令 $[i] = \frac{v^i - v^{-i}}{v - v^{-1}}$, 同上, 可以类似地定义 $\mathcal{Z}$ 中对称的 Gauss 多项式 $[r]!$ 和 $\left[\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right]$. 我们不难得到

$$\left[\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right] = v^{s(t-s)} \left[\begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \right].$$

接下来将讨论 $\mathcal{Z}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m \mid n, r)$ 上的乘法公式和正则表示, 此时令 $q = v^2$, $v_h = v^{(-1)^{\hat{h}}}$.

对任意矩阵 A , 其转置矩阵记为 A^T . 设 $A = (a_{i,j}) \in M(m \mid n, r)$, $h, k \in [1, m+n]$ 且 $h < m+n$, 令

$$f_k(q; A, h) = \begin{cases} q^{\sum_{j>k} a_{h,j}}, & \text{如果 } h < m, \\ (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i,j}} q^{-\sum_{j<k} a_{m+1,j}} q^{\sum_{j>k} a_{m,j}}, & \text{如果 } h = m, \\ (q^{-1})^{\sum_{j<k} a_{h+1,j}}, & \text{如果 } h > m, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$g_k(q; A, h+1) = \begin{cases} q^{\sum_{j<k} a_{h+1,j}}, & \text{如果 } h < m, \\ (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i,j}}, & \text{如果 } h = m, \\ (q^{-1})^{\sum_{j>k} a_{h,j}}, & \text{如果 } h > m. \end{cases} \quad (3.2)$$

引理 3.1 (参见文献 [7, 引理 3.1]) 设 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, $h \in [1, m+n)$, 令 $D = \text{diag}(\text{ro}(A))$, $B = D + E_{h,h+1} - E_{h+1,h+1}$, $C = D - E_{h,h} + E_{h+1,h}$, 则 $\mathcal{Z}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 具有下列乘法公式:

$$\begin{aligned} N_{A^T} N_{B^T} &= \sum_{k \in [1, m+n], a_{h+1,k} \geq 1} f_k(q; A, h) \llbracket a_{h,k} + 1 \rrbracket_{q_h} N_{(A+E_{h,k}-E_{h+1,k})^T}, \\ N_{A^T} N_{C^T} &= \sum_{k \in [1, m+n], a_{h,k} \geq 1} g_k(q; A, h+1) \llbracket a_{h+1,k} + 1 \rrbracket_{q_{h+1}} N_{(A-E_{h,k}+E_{h+1,k})^T}, \end{aligned}$$

其中, 当 $X \notin M(m | n, r)$ 时, 有 $N_X = 0$.

对 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, $h \in [1, m+n)$, $\nu \in \mathbb{N}^{m+n}$, 其中 $|\nu| = p \geq 2$, 定义

$$f_\nu(q; A, h) = \begin{cases} q^{\sum_{j>t} a_{h,j} \nu_t}, & \text{如果 } h < m, \\ 0, & \text{如果 } h = m, \\ q^{\sum_{l<t} \nu_l \nu_t (q^{-1})^{\sum_{j<t} a_{h+1,j} \nu_t}}, & \text{如果 } h > m \end{cases} \quad (3.3)$$

和

$$g_\nu(q; A, h+1) = \begin{cases} q^{\sum_{j<t} a_{h+1,j} \nu_t}, & \text{如果 } h < m, \\ 0, & \text{如果 } h = m, \\ q^{\sum_{l<t} \nu_l \nu_t (q^{-1})^{\sum_{j>t} a_{h,j} \nu_t}}, & \text{如果 } h > m. \end{cases} \quad (3.4)$$

注意到, 如果 $|\nu| = 1$ 且 $\nu_k = 1$, 令 $f_\nu(q; A, h) = f_k(q; A, h)$, $g_\nu(q; A, h+1) = g_k(q; A, h+1)$.

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}) \in \Lambda(m | n, r)$, $e_i \in \Lambda(m | n, 1)$, $1 \leq h < m+n$, 若 $0 \leq p < \lambda_{h+1}$, 令

$$\begin{aligned} U_p(h, \lambda) &= \text{diag}(\lambda - p e_{h+1}) + p E_{h,h+1}, \\ L_p(h, \lambda) &= \text{diag}(\lambda - p e_h) + p E_{h+1,h}. \end{aligned}$$

定理 3.1 (参见文献 [7, 定理 4.2]) 令 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, 假设 $1 \leq h < m+n$, 定义 $U_p = U_p(h, \text{ro}(A))$, $L_p = L_p(h, \text{ro}(A)) \in M(m | n, r)$. $\mathcal{Z}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 具有下列的乘法公式:

$$\begin{aligned} N_{A^T} N_{U_p^T} &= \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m|n,p) \\ \nu \leq \text{row}_{h+1}(A)}} f_\nu(q; A, h) \prod_{k=1}^{m+n} \llbracket \begin{smallmatrix} a_{h,k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \rrbracket_{q_h} N_{(A + \sum_l \nu_l (E_{h,l} - E_{h+1,l}))^T}, \\ N_{A^T} N_{L_p^T} &= \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m|n,p) \\ \nu \leq \text{row}_h(A)}} g_\nu(q; A, h+1) \prod_{k=1}^{m+n} \llbracket \begin{smallmatrix} a_{h+1,k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \rrbracket_{q_{h+1}} N_{(A - \sum_l \nu_l (E_{h,l} - E_{h+1,l}))^T}, \end{aligned}$$

其中对矩阵 $X \notin M(m | n, r)$, 令 $N_X = 0$.

若 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, 令

$$d(A) = \sum_{i>k, j<l} a_{i,j} a_{k,l} + \sum_{j<l} (-1)^{\hat{i}} a_{i,j} a_{i,l}, \quad \xi_A = q^{-d(A)} \tau(N_{A^T}), \quad (3.5)$$

其中 $\tau(N_A) = N_{A^T}$. 因为 τ 是 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 上的反自同构, 所以, $\{\xi_A\}_{A \in M(m|n,r)}$ 是它的一组基, 称为 ξ -基, 该组基是相对范基的正规化. 根据定理 3.1 可以推出 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 上的 ξ -基的乘法公式.

推论 3.1 ($h \neq m$, 参见文献 [7, 命题 4.4]) 令 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, 假设 $1 \leq h < m + n$, $h \neq m$, 令 $U_p = U_p(h, \text{ro}(A))$, $L_p = L_p(h, \text{ro}(A)) \in M(m | n, r)$, 则 $\mathcal{Z}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 具有下列乘法公式:

$$(1) \xi_{U_p} \xi_A = \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m|n,p) \\ \nu \leq \text{row}_{h+1}(A)}} v_h^{f_h(\nu, A)} \prod_{k=1}^{m+n} \overline{\left[\begin{smallmatrix} a_{h,k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \right]}_{v_h^2} \xi_{A + \sum_l \nu_l (E_{h,l} - E_{h+1,l})}, \text{ 其中}$$

$$f_h(\nu, A) = \sum_{j \geq t} a_{h,j} \nu_t - \sum_{j > t} a_{h+1,j} \nu_t + \sum_{t < t'} \nu_t \nu_{t'}; \quad (3.6)$$

$$(2) \xi_{L_p} \xi_A = \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m|n,p) \\ \nu \leq \text{row}_h(A)}} v_{h+1}^{f'_h(\nu, A)} \prod_{k=1}^{m+n} \overline{\left[\begin{smallmatrix} a_{h+1,k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \right]}_{v_{h+1}^2} \xi_{A - \sum_l \nu_l (E_{h,l} - E_{h+1,l})}, \text{ 其中}$$

$$f'_h(\nu, A) = \sum_{j \leq t} a_{h+1,j} \nu_t - \sum_{j < t} a_{h,j} \nu_t + \sum_{t < t'} \nu_t \nu_{t'}. \quad (3.7)$$

对于 $A \in M(m | n, r)$, 令

$$f_m(e_k, A) = \sum_{j \geq k} a_{m,j} + \sum_{j > k} a_{m+1,j},$$

$$f'_m(e_k, A) = \sum_{j \leq k} a_{m+1,j} + \sum_{j < k} a_{m,j}. \quad (3.8)$$

推论 3.2 ($h = m$, 参见文献 [7, 命题 4.5]) 设 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, 令 $U_1 = U_1(h, \text{ro}(A))$, $L_1 = L_1(h, \text{ro}(A)) \in M(m | n, r)$, 当 $h = m$ 时, $\mathcal{Z}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 具有下列乘法公式:

$$\xi_{U_1} \xi_A = \sum_{\substack{k \in [1, m+n] \\ a_{m+1,k} \geq 1}} (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i,j}} v_m^{f_m(e_k, A)} \overline{[a_{m,k} + 1]}_{v_m^2} \xi_{A + E_{m,k} - E_{m+1,k}},$$

$$\xi_{L_1} \xi_A = \sum_{\substack{k \in [1, m+n] \\ a_{m,k} \geq 1}} (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i,j}} v_{m+1}^{f'_m(e_k, A)} \overline{[a_{m+1,k} + 1]}_{v_{m+1}^2} \xi_{A - E_{m,k} + E_{m+1,k}}.$$

实际上, 上述乘法公式可以解释为 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 中与基 $\{\xi_A\}_{A \in M(m|n,r)}$ 相关的生成元的矩阵表示. 接下来将应用这些乘法公式来刻画 q -Schur 超代数在 $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上的正则表示.

对任意 $A \in M(m | n)$, 设

$$\bar{A} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m < i \leq m+n \\ m < j < l \leq m+n}} a_{ij} \overline{a_{kl}}.$$

令

$$M(m | n)^\pm = \{A = (a_{i,j}) \in M(m | n) \mid a_{i,i} = 0, 1 \leq i \leq m + n\}.$$

显然, 该集合中的矩阵主对角线上的元素都为 0. $M(m | n)^\pm$ 中的上三角矩阵和下三角矩阵的集合分别记为 $M(m | n)^+$ 和 $M(m | n)^-$.

设 $A \in M(m | n)^\pm$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_{m+n}) \in \mathbb{Z}^{m+n}$, 令

$$A(\mathbf{j}, r) = \begin{cases} \sum_{\lambda \in \Lambda(m|n, r-|\mathbf{j}|)} (-1)^{\overline{A+\lambda}} v^{\lambda \cdot \mathbf{j}} \xi_{A+\lambda}, & \text{如果 } |\mathbf{j}| \leq r, \\ 0, & \text{其他情形,} \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 $\cdot = \cdot_s$ 表示超的“内积”

$$\lambda \cdot j = \sum_{i=1}^{m+n} (-1)^i \lambda_i j_i = \lambda_1 j_1 + \cdots + \lambda_m j_m - \lambda_{m+1} j_{m+1} - \cdots - \lambda_{m+n} j_{m+n}. \quad (3.10)$$

对任意的 $\lambda \in \Lambda(m | n, r)$, 令 $\xi_\lambda := \xi_{\text{diag}(\lambda)}$, 因为它是子模 $[xy]_\lambda \mathcal{H}$ 上的单位映射, 所以也可以记 $1_\lambda = \xi_\lambda$. 对任意的 $A \in M(m | n, r)$, 有 $1_\lambda \xi_A = \delta_{\lambda, \text{ro}(A)} \xi_A$.

对于零矩阵 O 和 $e_i \in \Lambda(m | n, 1)$, 根据 (3.9), 有 $O(e_i, r) = \sum_{\lambda \in \Lambda(m | n, r)} v^{(-1)^i \lambda_i} \xi_\lambda$. 设

$$K_i = O(e_i, r), \quad E_h^{(p)} = (pE_{h, h+1})(0, r), \quad F_h^{(p)} = (pE_{h+1, h})(0, r).$$

根据推论 3.2 中的乘法公式, 不难得到 $E_m^2 = F_m^2 = 0$.

将 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 中由 $F_h^{(p)}$ 和 $E_h^{(p)}$ 生成的子超代数分别记为 $\mathcal{S}^-$ 和 $\mathcal{S}^+$, 其中 $1 \leq h < m+n$, $p \geq 1$. $\mathcal{S}^0$ 是由所有的 1_λ 张成的 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 的子超代数. 根据文献 [7, 推论 8.5], 在 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 中以下结论成立.

定理 3.2 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 是由 K_i 、 1_λ 、 $E_h^{(p)}$ 和 $F_h^{(p)}$ 生成的代数, 其中 $1 \leq h, i \leq m+n$, $h \neq m+n$, $\lambda \in \Lambda(m | n, r)$, $1 \leq p \leq r$, 并且 $\mathcal{S}(m | n, r) = \mathcal{S}^- \mathcal{S}^0 \mathcal{S}^+$. 这些生成元具有下列与基 $\{\xi_A\}_{A \in M(m | n, r)}$ 相关的矩阵表示:

$$\begin{aligned} (0) \quad & K_i \xi_A = v^{(-1)^{i \text{ro}(A)_i}} \xi_A, \quad 1_\lambda \xi_A = \delta_{\lambda, \text{ro}(A)} \xi_A; \\ (1) \quad & E_h^{(p)} \xi_A = \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m | n, p) \\ \nu \leq \text{ro}_{h+1}(A)}} v_h^{f_h^+(\nu, A)} \prod_{k=1}^{m+n} \overline{\left[\begin{smallmatrix} a_{h, k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \right]}_{v_h^2} \xi_{A + \sum_l \nu_l (E_{h, l} - E_{h+1, l})} \quad (h \neq m); \\ (2) \quad & F_h^{(p)} \xi_A = \sum_{\substack{\nu \in \Lambda(m | n, p) \\ \nu \leq \text{ro}_h(A)}} v_{h+1}^{f_{h+1}^-(\nu, A)} \prod_{k=1}^{m+n} \overline{\left[\begin{smallmatrix} a_{h+1, k} + \nu_k \\ \nu_k \end{smallmatrix} \right]}_{v_{h+1}^2} \xi_{A - \sum_l \nu_l (E_{h, l} - E_{h+1, l})} \quad (h \neq m); \\ (3) \quad & E_m \xi_A = \sum_{\substack{k \in [1, m+n] \\ a_{m+1, k} \geq 1}} (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i, j}} v_m^{f_m^+(e_k, A)} \overline{[a_{m, k} + 1]}_{v_m^2} \xi_{A + E_{m, k} - E_{m+1, k}}; \\ (4) \quad & F_m \xi_A = \sum_{\substack{k \in [1, m+n] \\ a_{m, k} \geq 1}} (-1)^{\sum_{i>m, j<k} a_{i, j}} v_{m+1}^{f_{m+1}^-(e_k, A)} \overline{[a_{m+1, k} + 1]}_{v_{m+1}^2} \xi_A - E_{m, k} + E_{m+1, k}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_h^+(\nu, A) &= \sum_{j \geq t} a_{h, j} \nu_t - \sum_{j > t} a_{h+1, j} \nu_t + \sum_{t < t'} \nu_t \nu_{t'}, \\ f_h^-(\nu, A) &= \sum_{j \leq t} a_{h+1, j} \nu_t - \sum_{j < t} a_{h, j} \nu_t + \sum_{t < t'} \nu_t \nu_{t'}, \\ f_m^+(e_k, A) &= \sum_{j \geq k} a_{m, j} + \sum_{j > k} a_{m+1, j}, \\ f_m^-(e_k, A) &= \sum_{j \leq k} a_{m+1, j} + \sum_{j < k} a_{m, j}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

对于交换环 $\mathcal{R}$, 如果存在可逆参数 $v \in \mathcal{R}$ 或 $q = v^2$, 通过环同态 $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{R}$, $v \mapsto v$ 进行基变换, 由 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 上的乘法公式可以得到 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 上类似的乘法公式, 而 q -Schur 超代数在 $\mathcal{R}$ 上的正则表示可以通过对 $\mathcal{S}(m | n, r)$ 的正则表示施行上述基环变换得到.

4 量子一般线性超群的实现

在本节中, 设 $\mathcal{R} = \mathbb{Q}(v)$. 首先介绍量子一般线性超群的定义, 根据文献 [7], 可以将文献 [8] 的一些结论进行推广, 把量子一般线性超群 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 实现为 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 的直积的子代数.

定义 4.1 量子一般线性超群 $U(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 是 $\mathbb{Q}(v)$ 上由 $K_a, K_a^{-1}, E_{h,h+1}$ 和 $E_{h+1,h}$ ($1 \leq a, b \leq m+n$, $1 \leq h < m+n$) 生成的满足如下关系式的超代数:

$$(QS1) \quad K_a K_a^{-1} = 1, K_a K_b = K_b K_a;$$

$$(QS2) \quad K_a E_{h,h+1} = v_a^{\delta_{a,h} - \delta_{a,h+1}} E_{h,h+1} K_a, K_a E_{h+1,h} = v_a^{-\delta_{a,h} + \delta_{a,h+1}} E_{h+1,h} K_a;$$

$$(QS3) \quad [E_{h,h+1}, E_{k+1,k}] = \delta_{h,k} \frac{K_h K_{h+1}^{-1} - K_h^{-1} K_{h+1}}{v_h - v_h^{-1}};$$

$$(QS4) \quad E_{h,h+1} E_{k,k+1} = E_{k,k+1} E_{h,h+1}, E_{h+1,h} E_{k+1,k} = E_{k+1,k} E_{h+1,h}, \text{ 其中 } |k-h| > 1;$$

$$(QS5) \quad \text{若 } h \neq m, \text{ 则}$$

$$E_{h,h+1}^2 E_{h+1,h+2} - (v_h + v_h^{-1}) E_{h,h+1} E_{h+1,h+2} E_{h,h+1} + E_{h+1,h+2} E_{h,h+1}^2 = 0,$$

$$E_{h,h+1}^2 E_{h-1,h} - (v_h + v_h^{-1}) E_{h,h+1} E_{h-1,h} E_{h,h+1} + E_{h-1,h} E_{h,h+1}^2 = 0,$$

$$E_{h+1,h}^2 E_{h+2,h+1} - (v_h + v_h^{-1}) E_{h+1,h} E_{h+2,h+1} E_{h+1,h} + E_{h+2,h+1} E_{h+1,h}^2 = 0,$$

$$E_{h+1,h}^2 E_{h,h-1} - (v_h + v_h^{-1}) E_{h+1,h} E_{h,h-1} E_{h+1,h} + E_{h,h-1} E_{h+1,h}^2 = 0;$$

$$(QS6) \quad E_{m,m+1}^2 = E_{m+1,m}^2 = 0, [E_{m,m+1}, E_{m-1,m+2}] = [E_{m+1,m}, E_{m+2,m-1}] = 0,$$

其中 $E_{m,m+1}$ 和 $E_{m+1,m}$ 是奇生成元, 其他的生成元为偶生成元. 设 $a, b \in [1, m+n]$, $|a-b| > 1$, 量子根向量 $E_{a,b}$ 由如下的递归公式定义:

$$E_{a,b} = \begin{cases} E_{a,c} E_{c,b} - v_c E_{c,b} E_{a,c}, & \text{如果 } a > b, \\ E_{a,c} E_{c,b} - v_c^{-1} E_{c,b} E_{a,c}, & \text{如果 } a < b, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 c 是严格介于 a 与 b 之间的正整数, $E_{a,b}$ 的次数为 $\hat{E}_{a,b} := \hat{a} + \hat{b}$.

根据文献 [7, (5.3.1)], 定义

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n) := \prod_{r \geq 0} \mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r), \quad (4.2)$$

$$\mathfrak{A}(m | n) := \text{span}\{A(\mathbf{j}) \mid A \in M(m | n)^\pm, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^{m+n}\},$$

其中

$$A(\mathbf{j}) := \sum_{r \geq 0} A(\mathbf{j}, r) \in \mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n).$$

设 $\hat{A} = \sum_{i+\hat{j}=1} a_{ij}$, 注意到, 如果令 $A(\mathbf{j})$ 的次数为 $\hat{A}$, 那么 $\mathfrak{A}(m | n)$ 是一个超空间.

根据文献 [7] 可知, 要想得到量子一般线性超群的实现, 首先要证明 $\{A(\mathbf{j}, r) \mid A \in M(m | n)^\pm, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n\}$ 是 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 的张成集.

命题 4.1 (参见文献 [7, 命题 5.2]) 设 $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in \mathbb{Z}^{m+n}$, $A = (a_{k,l}) \in M(m | n)^\pm$, 在 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 中下列公式成立:

$$(1) \quad O(\mathbf{j}, r) A(\mathbf{j}', r) = v^{\text{ro}(A) \cdot \mathbf{j}} A(\mathbf{j} + \mathbf{j}', r);$$

$$(2) \quad A(\mathbf{j}', r) O(\mathbf{j}, r) = v^{\text{co}(A) \cdot \mathbf{j}} A(\mathbf{j} + \mathbf{j}', r).$$

命题 4.2 (参见文献 [7, 推论 5.3]) 对任意的 $r \geq 0$, 集合 $\mathcal{L}_r = \{A(\mathbf{j}, r) \mid A \in M(m | n)^\pm, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^{m+n}\}$ 张成了 $\mathbb{Q}(v)$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$.

命题 4.3 (参见文献 [7, 命题 5.5]) 设 $\mathbf{j}, \mathbf{j}' \in \mathbb{Z}^{m+n}$, $A = (a_{k,l}) \in M(m | n)^\pm$, 在 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n)$ 中下列公式成立:

$$(1) \quad O(\mathbf{j}) A(\mathbf{j}') = v^{\text{ro}(A) \cdot \mathbf{j}} A(\mathbf{j} + \mathbf{j}');$$

$$(2) A(\mathbf{j}')O(\mathbf{j}) = v^{\text{co}(A) \cdot \mathbf{j}} A(\mathbf{j} + \mathbf{j}').$$

特别地, $\mathfrak{A}(m | n)$ 中元素在乘以 $O(\mathbf{j})$ 的作用下封闭.

对给定的 h 和 k , 其中 $1 \leq h, k < m + n$, 设 $A \in M(m | n)$, 令

$$\begin{aligned} \alpha_h &= \mathbf{e}_h - \mathbf{e}_{h+1}, \\ \beta_h &= -\mathbf{e}_h - \mathbf{e}_{h+1}, \\ f(k) &= f_h(\mathbf{e}_k, A) = \sum_{j \geq k} a_{h,j} - (-1)^\varepsilon \sum_{j > k} a_{h+1,j}, \\ f'(k) &= f'_h(\mathbf{e}_k, A) = \sum_{j \leq k} a_{h+1,j} - (-1)^\varepsilon \sum_{j < k} a_{h,j}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中

$$\varepsilon = \varepsilon_{h,h+1} = \widehat{h} + \widehat{h+1} \in \{0, 1\}.$$

对任意 $A \in M(m | n)$, $k \in [1, m + n]$, 定义

$$\sigma(k) = \sigma(k, A) = \begin{cases} \sum_{i > m, j < k} a_{i,j}, & \text{如果 } k \leq m, \\ \sum_{i \leq m, j > k} a_{i,j} + \sum_{i > m, j \leq m} a_{i,j}, & \text{如果 } k \geq m + 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

命题 4.4 (参见文献 [7, 命题 5.6]) 对给定的 $h \in [1, m + n]$, 设 $A = (a_{k,l}) \in M(m | n)^\pm$, 对任意的 $r \geq 0$, 在 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 中下列乘法公式成立:

$$\begin{aligned} E_{h,h+1}(\mathbf{0}, r)A(\mathbf{j}, r) &= \sum_{k < h, a_{h+1,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon \sigma(k)} v_h^{f(k)} \overline{\llbracket a_{h,k} + 1 \rrbracket}_{v_h^2} (A + E_{h,k} - E_{h+1,k})(\mathbf{j} + \alpha_h, r) \\ &+ \sum_{k > h+1, a_{h+1,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon \sigma(k)} v_h^{f(k)} \overline{\llbracket a_{h,k} + 1 \rrbracket}_{v_h^2} (A + E_{h,k} - E_{h+1,k})(\mathbf{j}, r) \\ &+ (-1)^{\varepsilon \sigma(h+1)} v_h^{f(h+1) + (-1)^\varepsilon j_{h+1}} \overline{\llbracket a_{h,h+1} + 1 \rrbracket}_{v_h^2} (A + E_{h,h+1})(\mathbf{j}, r) \\ &+ (-1)^{\varepsilon \sigma(h)} v_h^{f(h) - j_h - 1} \frac{(A - E_{h+1,h})(\mathbf{j} + \alpha_h, r) - (A - E_{h+1,h})(\mathbf{j} + \beta_h, r)}{1 - v_h^{-2}}, \\ E_{h+1,h}(\mathbf{0}, r)A(\mathbf{j}, r) &= \sum_{k < h, a_{h,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon \sigma(k)} v_{h+1}^{f'(k)} \overline{\llbracket a_{h+1,k} + 1 \rrbracket}_{v_{h+1}^2} (A - E_{h,k} + E_{h+1,k})(\mathbf{j}, r) \\ &+ \sum_{i > h+1, a_{h,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon \sigma(k)} v_{h+1}^{f'(k)} \overline{\llbracket a_{h+1,k} + 1 \rrbracket}_{v_{h+1}^2} (A - E_{h,k} + E_{h+1,k})(\mathbf{j} - \alpha_h, r) \\ &+ (-1)^{\varepsilon \sigma(h)} v_{h+1}^{f'(h) + (-1)^\varepsilon j_h} \overline{\llbracket a_{h+1,h} + 1 \rrbracket}_{v_{h+1}^2} (A + E_{h+1,h})(\mathbf{j}, r) \\ &+ (-1)^{\varepsilon \sigma(h+1)} v_{h+1}^{f'(h+1) - j_{h+1} - 1} \frac{(A - E_{h,h+1})(\mathbf{j} - \alpha_h, r) - (A - E_{h,h+1})(\mathbf{j} + \beta_h, r)}{1 - v_{h+1}^{-2}}. \end{aligned}$$

将所有的 $r \geq 0$ 的项加起来, 我们就得到了 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n)$ 中的乘法公式. 特别地, $\mathfrak{A}(m | n)$ 中元素在左乘 $E_{h,h+1}(\mathbf{0})$ 和 $E_{h+1,h}(\mathbf{0})$ 的作用下是封闭的.

引理 4.1 (参见文献 [7, 引理 6.2]) 设 $1 \leq h < m + n$, 令 $\varepsilon = \widehat{h} + \widehat{h+1}$, $A^+ = (a_{i,j}) \in M(m | n)^+$, $A^- = (a_{i,j}) \in M(m | n)^-$, $\sigma^+(k) := \sigma(k, A^+) = \sum_{i \leq m, j > k} a_{i,j}$, $\sigma^-(k) = \sigma(k, A^-) = \sum_{i \geq m+1, j < k} a_{i,j}$. 在

$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n)$ 中有下列乘法公式成立:

$$\begin{aligned} E_{h,h+1}(\mathbf{0})A^+(\mathbf{0}) &= (-1)^{\varepsilon\sigma^+(h+1)}v_h^{f(h+1)}\overline{\llbracket a_{h,h+1}+1 \rrbracket}_{v_h^2}(A^+ + E_{h,h+1})(\mathbf{0}) \\ &\quad + \sum_{k>h+1, a_{h+1,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon\sigma^+(k)}v_h^{f(k)}\overline{\llbracket a_{h,k}+1 \rrbracket}_{v_h^2}(A^+ + E_{h,k} - E_{h+1,k})(\mathbf{0}), \\ E_{h+1,h}(\mathbf{0})A^-(\mathbf{0}) &= (-1)^{\varepsilon\sigma^-(h)}v_{h+1}^{f'(h)}\overline{\llbracket a_{h+1,h}+1 \rrbracket}_{v_{h+1}^2}(A^- + E_{h+1,h})(\mathbf{0}) \\ &\quad + \sum_{k<h, a_{h,k} \geq 1} (-1)^{\varepsilon\sigma^-(k)}v_{h+1}^{f'(k)}\overline{\llbracket a_{h+1,k}+1 \rrbracket}_{v_{h+1}^2}(A^- - E_{h,k} + E_{h+1,k})(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

特别地, 对于 $k \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} E_{h,h+1}(\mathbf{0})^k &= [k]_{v_h}^! (kE_{h,h+1})(\mathbf{0}), \quad E_{h+1,h}(\mathbf{0})^k = [k]_{v_{h+1}}^! (kE_{h+1,h})(\mathbf{0}), \quad \text{如果 } h \neq m, \\ E_{m,m+1}(\mathbf{0})^k &= 0, \quad E_{m+1,m}(\mathbf{0})^k = 0, \quad \text{如果 } k > 1. \end{aligned}$$

令

$$K_i = O(e_i), \quad K_i^{-1} = O(-e_i), \quad E_h = E_{h,h+1}(\mathbf{0}), \quad F_h = E_{h+1,h}(\mathbf{0}).$$

定理 4.1 (参见文献 [7, 定理 6.3]) 存在 $\mathbb{Q}(v)$ -代数同态

$$\eta : \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n)$$

使得

$$\eta(E_{h,h+1}) = E_h, \quad \eta(E_{h+1,h}) = F_h, \quad \eta(K_a^{\pm 1}) = K_a^{\pm 1}.$$

推论 4.1 (参见文献 [7, 推论 6.4]) 存在 $\mathbb{Q}(v)$ -超代数同态

$$\eta_r : \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$$

使得

$$\eta_r(E_{h,h+1}) = E_{h,h+1}(\mathbf{0}, r), \quad \eta_r(E_{h+1,h}) = F_{h+1,h}(\mathbf{0}, r), \quad \eta_r(K_a^{\pm 1}) = O(\pm e_a, r).$$

根据文献 [7], $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 在 η 下的像为 $\mathfrak{A}(m | n)$, 且 $\mathfrak{A}(m | n)$ 同构于 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$. 接下来将介绍得到此代数同构的一些关键性命题.

设

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(m+n) = \{(i, h, j) \mid 1 \leq i \leq h < j \leq m+n\}.$$

$\mathfrak{T}$ 存在两个全序, 记为 $\leq_i$ ($i = 1, 2$), 它们的定义如下 (参见文献 [9, 第 562 页]):

$$\begin{aligned} (i, h, j) \leq_1 (i', h', j') &\iff \text{至少满足如下三个条件之一:} \\ &\quad \text{(i) } j > j', \text{ (ii) } j = j', i > i', \text{ (iii) } j = j', i = i', h \leq h', \\ (i, h, j) \leq_2 (i', h', j') &\iff \text{至少满足如下三个条件之一:} \\ &\quad \text{(i) } i < i', \text{ (ii) } i = i', j < j', \text{ (iii) } j = j', i = i', h \geq h'. \end{aligned} \tag{4.5}$$

例如, 在全序 $\leq_1$ 下, $\mathfrak{T}(3) = \{(2, 2, 3), (1, 1, 3), (1, 2, 3), (1, 1, 2)\}$. 一般地,

$$(\mathfrak{T}, \leq_1) = (\mathfrak{T}_{m+n}, \dots, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_2), \quad (\mathfrak{T}, \leq_2) = (\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{T}'_2, \dots, \mathfrak{T}'_{m+n-1}), \tag{4.6}$$

其中, 对任意的 j ($m+n \geq j \geq 2$) 和 l ($1 \leq l < m+n$), $\mathfrak{T}_j$ 是以下序列:

$$\underbrace{j-1}_{(j-1,*,j)} \quad \underbrace{j-2,j-1}_{(j-2,*,j)} \quad \dots \quad \underbrace{i,i+1,\dots,j-1}_{(i,*,j)} \quad \dots \quad \underbrace{1,2,\dots,j-1}_{(1,*,j)}, \quad (4.7)$$

$\mathfrak{T}_l'$ 是以下序列:

$$\underbrace{l}_{(l,*,l+1)} \quad \dots \quad \underbrace{l+k-1,\dots,l+1,l}_{(l,*,l+k)} \quad \dots \quad \underbrace{m+n-1,\dots,l+1,l}_{(l,*,m+n)}. \quad (4.8)$$

定理 4.2 (参见文献 [7, 定理 7.4]) 设 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n, r)$, $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 中存在以下乘法公式:

$$\Psi_A := \prod_{(i,h,j) \in (\mathfrak{T}, \leq_2)} \xi_{F_{i,h,j}^{(A)}} \cdot \prod_{(i,h,j) \in (\mathfrak{T}, \leq_1)} \xi_{E_{i,h,j}^{(A)}} = (-1)^{\bar{A}} \xi_A + \sum_{B \prec A} f_{B,A} \xi_B, \quad (4.9)$$

其中, 因子按照 (4.6) 中的序排列, $\prec$ 是 Bruhat 序, $f_{B,A} \in \mathbb{Q}(v)$. 特别地, $\{\Psi_A\}_{A \in M(m|n,r)}$ 构成了 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r)$ 的一组基.

称上面的定理中的公式 (4.9) 是三角乘法公式, 根据文献 [7], 它是得到量子一般线性超群实现的关键性公式.

定理 4.3 (参见文献 [7, 定理 8.1]) 代数 $\mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n)$ 的子超代数 $\mathfrak{A}(m | n)$ 是由下列生成元生成的超代数:

$$E_h = E_{h,h+1}(\mathbf{0}), \quad F_h = E_{h+1,h}(\mathbf{0}), \quad K_i^{\pm 1} = O(\pm e_i),$$

其中 $1 \leq h < m+n$, $1 \leq i \leq m+n$.

设 $A = (a_{i,j}) \in M(m | n)$, $j \in \mathbb{Z}^{m+n}$, 令

$$M_{A,j} := \prod_{(i,h,j) \in \mathfrak{T}}^{(\leq_2)} (a_{j,i} E_{h+1,h})(\mathbf{0}) \cdot O(j) \cdot \prod_{(i,h,j) \in \mathfrak{T}}^{(\leq_1)} (a_{i,j} E_{h,h+1})(\mathbf{0}).$$

推论 4.2 (参见文献 [7, 推论 8.2]) (1) $\overline{\mathfrak{M}} = \{M_{A,j} | A \in M(m | n)^{\pm}, j \in \mathbb{Z}^{m+n}\}$ 是 $\mathfrak{A}(m | n)$ 的一组由齐次元素构成的基;

(2) $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 在定理 4.1 中态射 η 下的像是代数 $\mathfrak{A}(m | n)$.

定理 4.4 (参见文献 [7, 定理 8.4]) 量子一般线性超群 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 同构于超代数 $\mathfrak{A}(m | n)$. 特别地, $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 可以认为是由 $\{A(j) | A \in M(m | n)^{\pm}, j \in \mathbb{Z}^{m+n}\}$ 张成的 $\mathbb{Q}(v)$ 上的超代数, 并且其乘法公式可以由命题 4.3 和 4.4 给出.

5 典范基的计算

本节将介绍量子一般线性超群 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的正 (或负) 部分的一组在某个对合下不变的基. 在非超情形, 这组基称为典范基. 在超的情形下, 我们也称之为典范基. 需要说明的是, 在 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 的正根的特定序下, 这组基与文献 [10] 中的伪 (pseudo)- 典范基是等价的.

首先引入量子一般线性超群 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 上的对合.

定义 5.1 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 上的对合定义为

$$\bar{\cdot} : \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n}), \quad \text{其中 } \bar{v} = v^{-1}, \quad \bar{E}_h = E_h, \quad \bar{F}_h = F_h, \quad \bar{K}_i^{\pm} = K_i^{\mp}. \quad (5.1)$$

令 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+ = \mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 是由 $\mathbf{E}_h^{(l)} := \frac{\mathbf{E}_h^l}{[l]!}$ 生成的 $\mathcal{Z}$ -子代数, $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^- = \mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^-(\mathfrak{gl}_{m|n})$ 是由 $\mathbf{F}_h^{(l)} := \frac{\mathbf{F}_h^l}{[l]!}$ 生成的 $\mathcal{Z}$ -子代数, 其中当 $h \neq m$ 时, $l \geq 1$; 当 $h = m$ 时, $l = 1$. 根据文献 [7], 我们可以得到如下 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的实现.

定理 5.1 (参见文献 [11, 定理 4.2]) 设 $\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}}^+$ 是由

$$\mathfrak{B} = \{A(\mathbf{0}) \mid A \in M(m|n)^+\}$$

中的元素张成的 $\mathcal{Z}$ -子模. 该子模是一个子超代数, 并且同构于 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$. 特别地, $\eta(\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+) = \mathfrak{A}_{\mathcal{Z}}^+$.

根据上述定理, 我们可以把 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 同 $\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}}^+$ 等同起来. 对于任意的 $A = (a_{i,j}) \in M(m|n)^{\pm}$, $j \in \mathbb{Z}^{m+n}$, 在 $\mathbb{Q}(v)$ -代数 $\mathfrak{A}(m|n)$ 中有三角乘法公式

$$\prod_{i,h,j}^{(\leq 2)} (a_{j,i} E_{h+1,h})(\mathbf{0}) \cdot \prod_{i,h,j}^{(\leq 1)} (a_{i,j} E_{h,h+1})(\mathbf{0}) = A(\mathbf{0}) + \sum_{\substack{B \in M(m|n)^{\pm}, j \in \mathbb{Z}^{m+n} \\ B \prec A}} g_{B,A,j} B(j),$$

其中 i, h 和 j 满足条件 $1 \leq i \leq h < j \leq m+n$, 乘积中的因子按照 (4.6) 中定义的序 $\leq_i$ 来排列. 特别地, 单项式

$$\mathbf{m}_A^+ := \prod_{1 \leq i \leq h < j \leq m+n}^{(\leq 1)} (a_{i,j} E_{h,h+1})(\mathbf{0}) = A(\mathbf{0}) + \sum_{B \in M(m|n)^+, B \prec A} g_{B,A} B(\mathbf{0}), \quad (5.2)$$

其中 $g_{B,A} \in \mathcal{Z}$.

推论 5.1 (参见文献 [11, 推论 4.4]) $\{\mathbf{m}_A^+ \mid A \in M(m|n)^+\}$ 构成了 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的一组 $\mathcal{Z}$ -基, 称为 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的单项式基.

设 $k < l$, $p > 0$, 对于根向量 $\mathbf{E}_{k,l}$, 若 $\mathbf{E}_{k,l}^p \neq 0$, 则记 $\mathbf{E}_{k,l}^{(p)} = \frac{\mathbf{E}_{k,l}^p}{[p]!_{v_k}}$.

下列条件定义了该集合

$$\mathcal{J}' = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq m+n\}$$

上的一个全序, 记为 $<_3$: 设 $(i, j), (i', j') \in \mathcal{J}'$, $(i, j) <_3 (i', j')$ 当且仅当 $j > j'$, 或者 $j = j'$, $i > i'$, 或者 $j = j'$, $i > i'$. 对于任意 $A = (a_{i,j}) \in M(m|n)^+$, 设

$$\mathbf{E}_A = \prod_{(i,j) \in \mathcal{J}'}^{<_3} \mathbf{E}_{i,j}^{(a_{i,j})}. \quad (5.3)$$

根据文献 [12, (29)] 可知, $\{\mathbf{E}_A \mid A \in M(m|n)^+\}$ 中的元素构成了 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的一组 PBW 基. 下面的定理给出了 $\mathbf{E}_A$ 同 $A(\mathbf{0})$ 之间的关系.

设 $A \in M(m|n)$, 令

$$\|A\| = \sum_{1 \leq i < j \leq m+n} \frac{(j-i)(j-i+1)}{2} (a_{i,j} + a_{j,i}).$$

根据文献 [9, 引理 13.21], 对于 $A, B \in M(m|n)$, 有

$$B \prec A \Rightarrow \|B\| < \|A\|, \quad B \preceq A \Rightarrow \|B\| \leq \|A\|.$$

通过对 $\|A\|$ 进行归纳, 可以得到如下基元素 $A(\mathbf{0})$ 与 PBW 基元素 $\mathbf{E}_A$ 之间的关系.

定理 5.2 (参见文献 [11, 定理 4.5]) 对于任意的 $A \in M(m | n)^+$, 有 $E_A = A(\mathbf{0})$. 在定理 4.1 中给出的同构 η 下, 有 $\eta(E_A) = A(\mathbf{0})$.

根据定义 5.1, $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 上的单项式基元素 $\mathbf{m}_A^+$ 在对合 $-$ 的作用下是不变的. 由定理 5.2 可得, $\{A(\mathbf{0}) | A \in M(m | n)^+\}$ 是 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的一组 PBW 基. $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 上的三角乘法公式 (5.2) 中显示出的 $\mathbf{m}_A^+$ 与 $A(\mathbf{0})$ 之间的关系, 决定了 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 存在一组关于基 $\{A(\mathbf{0}) | A \in M(m | n)^+\}$ 和偏序 $\preceq$ 的在对合 $-$ 的作用下不变的基, 即该代数的典范基存在.

定理 5.3 (参见文献 [11, 定理 5.2]) PBW 基 $\{A(\mathbf{0})\}_{A \in M(m | n)^+}$ 、对合 $-$ 和偏序 $\preceq$ 唯一确定了 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ 的典范基 $\mathfrak{C}^+ = \{C_A | A \in M(m | n)^+\}$, 换句话讲, 元素 C_A 由条件 $\bar{C}_A = C_A$ 唯一确定, 并且

$$C_A - A(\mathbf{0}) \in \sum_{B \in M(m | n)^+, B \prec A} v^{-1} \mathbb{Z}[v^{-1}] B(\mathbf{0}).$$

类似地可以定义 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^-$ 上的典范基 $\mathfrak{C}^-$.

根据文献 [7, 推论 6.4], 存在 $\mathbb{Q}(v)$ -超代数满同态

$$\eta_r : \mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n}) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{Q}(v)}(m | n, r) \quad (5.4)$$

使得

$$\eta_r(E_h) = E_{h,h+1}(\mathbf{0}, r), \quad \eta_r(F_h) = F_{h+1,h}(\mathbf{0}, r), \quad \eta_r(K^{\pm 1}) = O(\pm \mathbf{e}_i, r).$$

令 $\mathcal{S}^+(m | n, r) = \eta_r(U_{\mathcal{Z}}^+)$, $\mathcal{S}^-(m | n, r) = \eta_r(U_{\mathcal{Z}}^-)$, 则 $\mathcal{S}^+(m | n, r)$ ($\mathcal{S}^-(m | n, r)$) 有基

$$\mathfrak{B}_r^+ = \{A(\mathbf{0}, r) | A \in M(m | n)_{\leq r}^+\} \quad (\mathfrak{B}_r^- = \{A(\mathbf{0}, r) | A \in M(m | n)_{\leq r}^-\}),$$

其中 $M(m | n)_{\leq r}^* = \{A \in M(m | n)^*, |A| \leq r\}$, $*$ = +, -.

考虑 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^+$ (或 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^-$) 的典范基在满同态 η_r 下的像, 我们将得到 $\mathcal{S}^+(m | n, r)$ (或 $\mathcal{S}^-(m | n, r)$) 的典范基.

推论 5.2 对任意 $r > 0$ 及所有的 $A \in M(m | n)_{\leq r}^+$, 设 $\mathbf{c}_A = \eta_r(C_A)$, 则 $\{\mathbf{c}_A\}_{A \in M(m | n)_{\leq r}^+}$ 构成了 $\mathcal{S}^+(m | n, r)$ 的一组满足如下性质的基:

$$\bar{\mathbf{c}}_A = \mathbf{c}_A \quad \text{且} \quad \mathbf{c}_A - A(\mathbf{0}, r) \in \sum_{B \prec A} v^{-1} \mathbb{Z}[v^{-1}] B(\mathbf{0}, r).$$

换句话讲, 这是一组由基 $\mathfrak{B}_r^+$ 、对合 $-$ 和偏序 $\preceq$ 唯一确定的典范基, 并且有

$$\eta_r(C_A) = \begin{cases} \mathbf{c}_A, & \text{如果 } A \in M(m | n)_{\leq r}^+, \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \quad (5.5)$$

类似地, 考虑 $\mathbf{U}_{\mathcal{Z}}^-$ 的典范基在 η_r 作用下的像, 我们得到 $\mathcal{S}^-(m | n, r)$ 的一组典范基.

在本节的最后, 我们将会讨论量子一般线性超群的负部分的典范基在其表示论中的应用. 根据文献 [11], 当 $n = 1$ 时, 量子一般线性超群 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的负部分的典范基可以诱导出它的不可约多项式表示的一组基, Clark^[13] 称之为不可约多项式表示的典范基.

设 M 是 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的有限维模, $\lambda \in \mathbb{Z}^{m+1}$, 令

$$M_\lambda = \{x \in M | K_i x = v_i^{\lambda_i} x, 1 \leq i \leq m+1\}.$$

如果 $M_\lambda \neq 0$, 那么 M_λ 称为是 M 的权 λ 的权空间. 若 $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$, 则称 M 是一个整权模. M 的所有权的集合记为 $\text{wt}(M)$. 如果 $\text{wt}(M) \subset \mathbb{N}^{m+1}$, 那么称 M 为 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的多项式表示. 显然, 多项式表示的张量积还是多项式表示. 特别地, $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的自然表示的张量积 $V^{\otimes r}$ 是多项式表示.

根据文献 [4], 在特征为 0 的代数闭域上, 若量子参数 q 不是单位根, 则 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的不可约多项式表示的同构类可由下面的集合指标化:

$$\Pi(r)_{m|1} = \{\pi \in \Pi(r) \mid \pi_{m+1} \leq 1\},$$

其中 $\Pi(r)$ 是 r 的所有划分的集合. $\Pi(r)_{m|1}$ 也称为 r 的 $(m, 1)$ -Hook 划分的集合.

定理 5.4 (参见文献 [11, 推论 7.12]) 设 $L(\mu)$ 是 $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的最高权为 μ 且最高权向量为 v_μ 的不可约多项式表示, $\mathfrak{C}^- = \{C_A \mid A \in M(m|1)^-\}$ 是定理 5.3 中给出的 $\mathbf{U}_{\bar{\mathbb{Z}}}(\mathfrak{gl}_{m|1})$ 的典范基, 则

$$\{C_A \cdot v_\mu \mid A \in M(m|1)^-\} \setminus \{0\}$$

构成 $L(\mu)$ 的一组基.

6 半单 q -Schur 超代数

通过上一节的介绍可知, q -Schur 超代数上的乘法公式一个很好的应用就是实现量子一般线性群和量子一般线性超群. 本节将会利用这些乘法公式来构造 q -Schur 超代数的某些特殊的模, 通过分析这些模的特点, 可以得到关于 q -Schur 超代数的半单性的判别条件.

设 F 是一个域, 且特征为不等于 2 的素数, $v \in F$, $q = v^2$. 因为每一个单 $\mathcal{S}_F(m|n, r)$ -超模也是单 $\mathcal{S}_F(m|n, r)$ -模, 为了简便起见, 在涉及单超模的命题中将会直接省去“超”字.

首先确定 $\mathcal{S}_F(m|n, r)$ 的半单性, 接下来的这个命题是文献 [14, 15] 中命题的量子化版本.

引理 6.1 (参见文献 [1, 引理 5.1]) 假设 $q \neq 1$ 是 l 次本原单位根.

(1) 若 $l \nmid r$, 则 $\mathcal{S}_F(1|1, r)$ 是半单的, 并且正好具有 r 个互不同构的不可约模, 且这些不可约模的维数均为 2;

(2) 若 $l \mid r$, 则 $\mathcal{S}_F(1|1, r)$ 是非半单的, 并且正好具有 $r+1$ 个互不同构的不可约模, 且这些不可约模的维数均为 1.

引理 6.2 (参见文献 [1, 引理 5.3]) 同引理 6.1 的假设条件, 若 $r \geq l$, 则超代数 $\mathcal{S}_F(2|1, r)$ 和 $\mathcal{S}_F(1|2, r)$ 都不是半单的.

定理 6.1 (参见文献 [1, 定理 5.4]) 令 F 是包含 $q \neq 0, 1$ 的域, 并且 $v = \sqrt{q}$. 若 $m, n \geq 1$, 则 $\mathcal{S}_F(m|n, r)$ 是半单的当且仅当满足下列条件之一:

- (1) q 不是单位根;
- (2) q 是 l 次本原单位根, 且 $r < l$;
- (3) $m = n = 1$, q 是本原单位根, 且 $l \nmid r$.

7 q -Schur 超代数在单位根处不可约模分类

根据第 1 节的介绍, 我们可以将 $\mathcal{S}_R(m|n, r)$ 和 $\text{End}_{\mathcal{H}_R}(V_R(m|n)^{\otimes r})$ 等同起来.

设 $\lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ$, 令 $\mathcal{J}(\lambda, d, \mu) = A = (a_{ij})$, 则有

$$\hat{d} = \sum_{\substack{m < k < i \leq m+n, \\ 1 \leq j < l \leq m+n}} a_{ij} a_{kl},$$

这里的 $\hat{d}$ 与第 2 节中的 $\hat{d}$ 关于 2 同余, 根据文献中对 $\hat{d}$ 的应用, 我们可以用同一记号表示.

下面的定理给出了第 2 节中 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的基元素 $\psi_{\mu\lambda}^d$ 与 $N_{\mu\lambda}^d$ 之间的关系. 根据引理 2.2 中的同构映射 f , 我们把 $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}(m | n, r) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda(m | n, r)} x_{\lambda(0)} y_{\lambda(1)} \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ 与 $V_{\mathcal{R}}(m | n)^{\otimes r}$ 等同起来.

定理 7.1 对于任意的 $\lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r)$, $d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ$, $\nu = \lambda d \cap \mu$, 有

$$N_{\mathfrak{S}_r, \mathfrak{S}_\nu}(e_{\mu, \lambda d}) = (q^{-1})^{\ell(d)} (-1)^{\hat{d}} \psi_{\mu\lambda}^d. \quad (7.1)$$

在本节中接下来的内容里, 设 q 是 l 次本原单位根, $\mathcal{R}$ 是特征为 p 的环. 当 $p > 0$ 时, 假定 $p > 2$ 且与 l 互素. 首先讨论在该背景下 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的结构. 为讨论方便, 当 $p = 0$ 时, 令 $p^0 = 1$.

设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 是一个 r -组合, 称抛物子群 $\mathfrak{S}_\lambda$ 为 (l, p) -抛物子群, 如果 λ_i 为 0, 1 或 $p^t l$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 特别地, 当 $p = 0$ 时, 称抛物子群 $\mathfrak{S}_\lambda$ 为 l -抛物子群.

设 $l_i = lp^i$, $i = 1, 2, \dots$, 令

$$\mathcal{N}_r = \{(\eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t) \mid t \geq -1, \eta_i \in \mathbb{N}, \eta_t \neq 0, \eta_{-1} + \eta_0 l_0 + \eta_1 l_1 + \dots + \eta_t l_t = r\}.$$

对于每一个 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 设 $P_{\vec{\eta}} := W_{\theta_{\vec{\eta}}}$ 是组合

$$\theta_{\vec{\eta}} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\eta_{-1}}, \underbrace{l_0, \dots, l_0}_{\eta_0}, \underbrace{l_1, \dots, l_1}_{\eta_1}, \dots, \underbrace{l_t, \dots, l_t}_{\eta_t}) = (1^{\eta_{-1}}, l_0^{\eta_0}, \dots, l_t^{\eta_t}) \quad (7.2)$$

所对应的抛物子群. $P_{\vec{\eta}}$ 称为是标准的 (l, p) -抛物子群.

对于正整数 r , 设 $r = r_{-1} + r_0 l_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + \dots$ 是 r 的 (l, p) -进展开式, 于是有 $0 \leq r_{-1} < l$, $0 \leq r_j < p$ ($j \geq 0$). 令 $\vec{r} = (r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \dots)$, 共轭于 $P_{\vec{r}}$ 的 $\mathfrak{S}_r$ 的抛物子群称为是 $\mathfrak{S}_r$ 的极大 (l, p) -抛物子群.

设

$$\lambda_i = \lambda_{i,-1} + \lambda_{i,0} l_0 + \lambda_{i,1} l_1 + \lambda_{i,2} l_2 + \dots$$

为 λ_i 的 (l, p) -进展开式, 令

$$\vec{\lambda}_i = (\lambda_{i,-1}, \lambda_{i,0}, \lambda_{i,1}, \dots),$$

则 $\mathfrak{S}_\lambda$ 的共轭于 (l, p) -抛物子群

$$P_\lambda := P_{\vec{\lambda}_1} \times P_{\vec{\lambda}_2} \times \dots \times P_{\vec{\lambda}_N}$$

的子群称为是 $\mathfrak{S}_\lambda$ 的极大 (l, p) -抛物子群.

引理 7.1 (参见文献 [3, 引理 4.2]) 对于 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的基元素 $N_{\mu\lambda}^d, N_{\lambda\rho}^{d'} \in \mathcal{B}$, 设

$$N_{\mu\lambda}^d N_{\lambda\rho}^{d'} = \sum_{y \in \mathcal{D}_{\rho\mu}^\circ} a_y N_{\mu\rho}^y,$$

其中 $a_y \in \mathcal{R}$. 若 $a_y \neq 0$, 则

$$P_{\rho y \cap \mu} \leq_{\mathfrak{S}_r} P_{\lambda d \cap \mu}, \quad P_{\rho y \cap \mu} \leq_{\mathfrak{S}_r} P_{\rho d' \cap \lambda}.$$

设 P 为 $\mathfrak{S}_r$ 的 (l, p) - 抛物子群, 令

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{R}}(P, r) = \{N_{\lambda\mu}^d \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ, L_{\lambda d \cap \mu} \leq_{\mathfrak{S}_r} P\}.$$

由引理 7.1 知, $\mathfrak{I}_{\mathcal{R}}(P, r)$ 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m \mid n, r)$ 的理想.

根据文献 [2], $\mathfrak{S}_r$ 中的每一个 l - 抛物子群都共轭于某一个子群 $L_a := \mathfrak{S}_{(1^{r-al}, l^a)}$, 其中 $r - al \geq 0$. 将 $\mathfrak{S}_\lambda$ 的极大 l - 抛物子群记为 L_λ , 并且定义

$$I_{\mathcal{R}}(L_k, r) = \{N_{\lambda\mu}^d \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m \mid n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda\mu}^\circ, L_{\lambda d \cap \mu} \leq_{\mathfrak{S}_r} L_k\}.$$

由引理 7.1 不难推出 $I_{\mathcal{R}}(L_k, r)$ 是 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m \mid n, r)$ 的理想.

命题 7.1 (参见文献 [3, 推论 4.6]) 如果 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 且 $\sum_{i=0}^t \eta_i p^i = k$, 那么,

$$I_{\mathcal{R}}(L_0, r) \subseteq \mathfrak{I}_{\mathcal{R}}(P_{\vec{\eta}}, r) \subseteq I_{\mathcal{R}}(L_k, r).$$

由命题 7.1, 若 $r = r'l + s$ ($0 \leq s < l$), 则 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_F(m \mid n, r)$ 中存在理想链:

$$0 \subseteq I_{\mathcal{R}}(L_0, r) \subseteq I_{\mathcal{R}}(L_1, r) \subseteq \dots \subseteq I_{\mathcal{R}}(L_{r'}, r).$$

设 $\mathcal{R} = F$ 是代数闭域, 接下来将会讨论 F 上 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_F(m \mid n, r)$ 的不可约模的分类.

令 $A(m \parallel n) \cong A(m) \otimes A(n)$, 其中 $A(m) = F[t_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m}$, $A(n) = F[t_{ij}]_{m+1 \leq i, j \leq m+n}$ 是多项式代数. 根据文献 [2, 命题 9.1], 对于 $1 \leq i, j \leq m$, $m+1 \leq i, j \leq m+n$, x_{ij}^l 是 $\mathcal{A}_q(m \mid n)$ 的中心元素.

令 $A(m \parallel n)_a := \sum_{s+t=a} A(m, s) \otimes A(n, t)$, 定义 t - 次 Frobenius 态射为

$$F^t : A(m \parallel n) \longrightarrow A(m \parallel n), \quad t_{ij} \mapsto t_{ij}^{p^t}. \quad (7.3)$$

定义 7.1 (参见文献 [3, 定义 5.2]) 设 $t \in \mathbb{N}$, 双代数态射

$$\mathcal{F}_{1,t} = \mathcal{F} \circ F^t : A(m \parallel n) \longrightarrow \mathcal{A}_q(m \mid n), \quad t_{i,j} \mapsto x_{i,j}^{lp^t},$$

其中 $1 \leq i, j \leq m$, $m+1 \leq i, j \leq m+n$, 称为是到 $\mathcal{A}_q(m \mid n)$ 上的 $(1, t)$ - 次 Frobenius 态射.

设 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 令

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{\eta}} &= (\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_t), \quad \text{其中 } \rho_{-1} = \eta_{-1}, \quad \rho_i = \eta_i l p^i \quad (0 \leq i \leq t), \\ \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_{\vec{\eta}}) &:= \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_{-1}) \otimes \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_0) \otimes \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_t), \\ \mathcal{A}_q(m \mid n, \vec{\eta}) &:= \mathcal{A}_q(m \mid n, \eta_{-1}) \otimes A(m \parallel n)_{\eta_0} \otimes A(m \parallel n)_{\eta_1} \otimes \dots \otimes A(m \parallel n)_{\eta_t}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

考虑余代数单态射

$$\mathcal{F}(\vec{\eta}, \rho_{\vec{\eta}}) := \text{id} \otimes \mathcal{F}_{1,0} \otimes \mathcal{F}_{1,1} \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{1,t} : \mathcal{A}_q(m \mid n, \vec{\eta}) \longrightarrow \mathcal{A}_q(m \mid n, \rho_{\vec{\eta}}).$$

将 $\mathcal{F}(\vec{\eta}, \rho_{\vec{\eta}})$ 同 $\mathcal{A}_q(m \mid n)$ 上的乘法 $\mu_{\mathcal{A}}$ 复合起来得到余代数同态

$$\mathcal{F}_{\vec{\eta}} := \mu_{\mathcal{A}}^{(t+1)} \circ \mathcal{F}(\vec{\eta}, \rho_{\vec{\eta}}) : \mathcal{A}_q(m \mid n, \vec{\eta}) \longrightarrow \mathcal{A}_q(m \mid n, r), \quad (7.5)$$

其中上标 $(t+1)$ 表示的是张量积 $\otimes$ 的重数.

根据文献 [4, 定理 9.8], 余代数 $\mathcal{A}_q(m | n, r)$ 的对偶 $\mathcal{A}_q(m | n, r)^*$ 是一个同构于 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的代数, 于是, 我们可以将 $\mathcal{A}_q(m | n, r)^*$ 与 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 等同起来. 已知经典 Schur 代数 $S(m, s) = A(m, s)^*$, $S(n, t) = A(n, t)^*$, 因此, 对偶代数 $\mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) := (\mathcal{A}_q(m | n, \vec{\eta}))^*$ 可以表示为一个 q -Schur 超代数和若干个 Schur 代数的张量积的直和, 即

$$\mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) \cong \mathcal{S}_F(m | n, \eta_{-1}) \otimes S(m \parallel n)_{\eta_0} \otimes \cdots \otimes S(m \parallel n)_{\eta_t}, \quad (7.6)$$

其中

$$S(m \parallel n)_{\eta_k} := A(m \parallel n)_{\eta_k}^* \cong \bigoplus_{i+j=\eta_k} S(m, i) \otimes S(n, j)$$

是经典的 Schur 代数的张量积的直和.

设 $\vec{\eta}_0 = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_t)$, 则有代数同构

$$S(m \parallel n)_{\eta_0} \otimes \cdots \otimes S(m \parallel n)_{\eta_t} \cong \bigoplus_{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0} S(m, \vec{a}) \otimes S(n, \vec{b}), \quad (7.7)$$

其中 $S(m, \vec{a}) = S(m, a_0) \otimes \cdots \otimes S(m, a_t)$, $S(n, \vec{b}) = S(n, b_0) \otimes \cdots \otimes S(n, b_t)$. 因此, (7.6) 可以写成

$$\mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) \cong \bigoplus_{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0} \mathcal{S}_F(m | n, \eta_{-1}) \otimes S(m, \vec{a}) \otimes S(n, \vec{b}). \quad (7.8)$$

定义 7.2 (参见文献 [2, 定义 9.4] 和 [3, 定义 5.3]) 设 $\vec{\eta} \in \mathcal{N}_r$, 与 $\vec{\eta}$ 相关的 Brauer 态射定义为

$$\phi_{\vec{\eta}} = (\mathcal{F}_{\vec{\eta}})^* : \mathcal{S}_F(m | n, r) = (\mathcal{A}_q(m | n, r))^* \longrightarrow \mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) = (\mathcal{A}_q(m | n, \vec{\eta}))^*,$$

该映射是余代数映射 $\mathcal{F}_{\vec{\eta}}$ 的对偶映射.

下面的命题刻画了 Brauer 态射的核.

命题 7.2 (参见文献 [2, 定理 9.6] 和 [3, 命题 5.5]) 设 $\vec{\eta} \in \mathcal{N}_r$, 则有

$$\ker(\phi_{\vec{\eta}}) = \{x_{\mu, \lambda d}^* \mid \lambda, \mu \in \Lambda(m | n, r), d \in \mathcal{D}_{\lambda \mu}^\circ, P_{\vec{\eta}} \not\prec_{\mathfrak{S}_r} \mathfrak{S}_\lambda^d \cap \mathfrak{S}_\mu\} = \sum_{P, P_{\vec{\eta}} \not\prec_{\mathfrak{S}_r} P} \mathcal{I}_F(P, r).$$

定义 7.3 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的本原幂等元 e 的亏群定义为使得 $e \in \mathcal{I}_F(P_{\vec{\eta}}, \mathfrak{S}_r)$ 的极小 (l, p) - 抛物子群 $P_{\vec{\eta}}$.

定理 7.2 (参见文献 [2, 定理 10.2]) 当 $p = 0$ 时, 如果 $e \in \mathcal{S}_F(m | n, r)$ 是本原幂等元, 那么, e 的亏群 $D(e)$ 是不可分解 $\mathcal{H}_F$ - 模 $V_F(m | n)^{\otimes r e}$ 的顶点.

定理 7.3 (参见文献 [2, 定理 10.7] 和 [3, 推论 6.6]) 设 e 和 e' 是 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的两个幂等元, $\vec{\eta} \in \mathcal{N}_r$, 如果 e 是本原幂等元, 且 $P_{\vec{\eta}} = \mathfrak{S}_r D(e)$, 那么,

$$\phi_{\vec{\eta}}(e \mathcal{S}_F(m | n, r) e') = \phi_{\vec{\eta}}(e) \mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) \phi_{\vec{\eta}}(e').$$

超空间 $V_F(m | n)$ 的偶部分和奇部分分别记为 V_0 和 V_1 . 对任意的 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 设 $\vec{\eta}_0 = (\eta_0, \dots, \eta_t)$, 令

$$(V_F(m | n)^{\otimes |\vec{\eta}_0|})_{\mathbb{L}} = \bigoplus_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}} (V_0)^{\otimes |\vec{a}|} \otimes (V_1)^{\otimes |\vec{b}|},$$

$$F(\mathfrak{S}_{|\vec{\eta}_0|})_{\mathbb{L}} = \bigoplus_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}} F[\mathfrak{S}_{a_0} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_t}] \otimes F[\mathfrak{S}_{b_0} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{b_t}].$$

位置置换诱导了一个 $(V_F(m | n)^{\otimes |\vec{\eta}_0|})_{\mathbb{L}}$ 上的 $F(\mathfrak{S}_{|\vec{\eta}_0|})_{\mathbb{L}}$ -模结构. 设

$$\begin{aligned} V_F(m | n)^{\boxtimes \vec{\eta}} &:= V_F(m | n)^{\otimes \eta-1} \otimes (V_F(m | n)^{\otimes |\vec{\eta}_0|})_{\mathbb{L}} \\ &= \bigoplus_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}} V_F(m | n)^{\otimes \eta-1} \otimes (V_0)^{\otimes |\vec{a}|} \otimes (V_1)^{\otimes |\vec{b}|}, \\ \mathcal{H}_{\vec{\eta}} &:= \bigoplus_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}, \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}} \mathcal{H}_F(\mathfrak{S}_{\eta-1}) \otimes F[\mathfrak{S}_{a_0} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_t}] \otimes F[\mathfrak{S}_{b_0} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{b_t}], \end{aligned}$$

我们得到了一个右 $\mathcal{H}_{\vec{\eta}}$ -模 $V_F(m | n)^{\boxtimes \vec{\eta}}$ 和代数同构 $\mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta}) \cong \text{End}_{\mathcal{H}_{\vec{\eta}}}(V_F(m | n)^{\boxtimes \vec{\eta}})$.

定理 7.4 (参见文献 [2, 引理 11.1] 和 [3, 定理 6.7]) (1) 设 e 和 e' 是 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的两个幂等元, e 是本原幂等元且 $P_{\vec{\eta}} = \mathfrak{S}_r \cdot D(e)$, 其中 $\vec{\eta} \in \mathcal{N}_r$, 则 $\phi_{\vec{\eta}}(e)$ 是本原幂等元, $D(\phi_{\vec{\eta}}(e)) = 1$, 且

$$V_F(m | n)^{\otimes r} e | V_F(m | n)^{\otimes r} e' \quad \text{当且仅当} \quad V_F(m | n)^{\boxtimes \vec{\eta}} \phi_{\vec{\eta}}(e) | V_F(m | n)^{\boxtimes \vec{\eta}} \phi_{\vec{\eta}}(e');$$

(2) 若 $\tilde{e} \in \mathcal{S}_F(m | n, \vec{\eta})$ 是亏群为平凡群的本原幂等元, 则存在一个本原幂等元 $e \in \mathcal{S}_F(m | n, r)$ 且 $D(e) = P_{\vec{\eta}}$, 使得 $\tilde{e}$ 等价于 $\phi_{\vec{\eta}}(e)$;

(3) 当 $p = 0$ 时, 设 e 是 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的本原幂等元, 如果 $D(e) = 1$, 那么, $V_F(m | n)^{\otimes r} e$ 是一个投射 $\mathcal{H}_F$ -模.

令 $\mathcal{E}^0(m | n, r)$ ($\mathcal{E}^0(N, r)$) 是 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ ($\mathcal{S}(N, r)$) 中亏群为平凡群的本原幂等元的集合.

推论 7.1 (参见文献 [2, 定理 11.2] 和 [3, 推论 6.8]) 存在 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的不可约模同构类集合与

$$\text{Irr}_F(m | n, r) = \bigcup_{\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r} \bigcup_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1} \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}} \left(\mathcal{E}^0(m | n, \eta_{-1}) \times \prod_{i=1}^t \mathcal{E}^0(m, a_i) \times \prod_{i=1}^t \mathcal{E}^0(n, b_i) \right)$$

之间的一一映射.

令 $\Lambda_{l\text{-res}}^+(r)$ ($\Lambda_{p\text{-res}}^+(N, r)$) 是 l -限制 (p -限制) r -划分的集合 (划分 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 称为是 x -限制的, 如果 $\lambda_i - \lambda_{i+1} < x$). 特别地, 当 $p = 0$ 时, $\Lambda_{p\text{-res}}^+(N, r) = \Lambda^+(N, r)$.

对每个 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 其中 $\sum_{i=0}^t \eta_i p^i = k$, 令

$$\mathcal{W}_{\vec{\eta}} = \bigcup_{\substack{\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1} \\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0}}^k \{(\lambda, \xi, \eta) \mid \lambda \in \Lambda_{l\text{-res}}^+(\eta_{-1}), \xi \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(m, \vec{a}), \eta \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(n, \vec{b})\}, \quad \mathcal{W}_r = \bigcup_{\vec{\eta} \in \mathcal{N}_r} \mathcal{W}_{\vec{\eta}}, \quad (7.9)$$

其中 $\Lambda_{p\text{-res}}^+(N, \vec{c}) = \Lambda_{p\text{-res}}^+(N, c_0) \times \cdots \times \Lambda_{p\text{-res}}^+(N, c_t)$, $\mu \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(N, \vec{c})$ 意味着 $\mu = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)})$, 且所有的 $\mu^{(i)} \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(N, c_i)$.

定理 7.5 (参见文献 [2, 定理 11.2] 和 [3, 定理 7.1]) 设 $m + n \geq r$, 存在一一映射 $\omega : \text{Irr}_F(m | n, r) \rightarrow \mathcal{W}_r$.

对于 $\vec{\eta} = (\eta_{-1}, \eta_0, \dots, \eta_t) \in \mathcal{N}_r$, 假设 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{N}^{t+1}$, 且 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{\eta}_0$,

$$\vec{\mu} = (\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(t)}) \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(m, \vec{a}), \quad \vec{\nu} = (\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(t)}) \in \Lambda_{p\text{-res}}^+(m, \vec{b}),$$

$L(\mu^{(i)}) \otimes L(\nu^{(i)})$ 是最高权为 $(\mu^{(i)}, \nu^{(i)})$ 的不可约 $S(m, a_i) \otimes S(n, b_i)$ -模, 记 $(L(\mu^{(i)}) \otimes L(\nu^{(i)}))^{[1, i]}$ 为 $L(\mu^{(i)}) \otimes L(\nu^{(i)})$ 通过映射 $\mathfrak{F}_{[1, i]}^*$ (参见文献 [3, (5.6.1)]) 提升的 $\mathcal{S}_F(m | n, \eta_i l p^i)$ 的不可约模.

根据推论 7.1, 不妨设与 $(\lambda, \xi, \nu) \in \text{Irr}_F(m | n, r)$ 对应的不可约模为 $L(\lambda, \xi, \nu)$. 结合定理 7.5 可得特征 p 的代数闭域 F 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的不可约模分类定理.

定理 7.6 (参见文献 [2, 推论 11.3] 和 [3, 推论 7.3]) 假设 $m + n \geq r$. 集合 $\{L(\lambda, \mu, \nu) | (\lambda, \xi, \eta) \in \mathcal{W}_r\}$ 构成了 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 的不可约模同构类的完全集. 如果本原幂元 $e \in \mathfrak{E}(m | n, r)$ 的亏群为 $P_{\vec{\eta}}$, 权为 (λ, μ, ν) , $\bar{L}(\lambda, \mu, \nu)^{[\phi_{\vec{\eta}}]}$ 表示不可约 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ -模通过 $\phi_{\vec{\eta}}$ 的提升, 则存在 $\mathcal{S}_F(m | n, r)$ 模同构

$$\begin{aligned} L(\lambda, \mu, \nu) &\cong \bar{L}(\lambda, \mu, \nu)^{[\phi_{\vec{\eta}}]} \\ &\cong L(\lambda) \otimes (L(\mu^{(0)}) \otimes L(\nu^{(0)}))^{[1, 0]} \otimes (L(\mu^{(1)}) \otimes L(\nu^{(1)}))^{[1, 1]} \otimes \cdots \otimes (L(\mu^{(t)}) \otimes L(\nu^{(t)}))^{[1, t]}. \end{aligned}$$

8 无穷小 q -Schur 超代数和小 q -Schur 超代数

在本节中, 假设 $\mathcal{R}$ 是一个交换环, $q = v^2 \in \mathcal{R}$ 是 l -次本原单位根. 我们将在不引入量子一般线性超群和量子坐标代数的情形下, 应用 q -Schur 超代数的乘法公式构造出无穷小 q -Schur 超代数和小 q -Schur 超代数.

首先需要构造 $\mathcal{R}$ 上的 q -Schur 超代数 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的某些子超代数.

令 $M(m | n, r)_l = \{(a_{i,j}) \in M(m | n, r) | a_{i,j} < l, \forall i \neq j\}$, 设 $\mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 为由 ξ_A 张成的 $\mathcal{R}$ 子模, 其中 $A \in M(m | n, r)_l$.

我们可以得到无穷小 q -Schur 代数的超版本.

定理 8.1 (参见文献 [1, 定理 6.1]) $\mathcal{R}$ -子模 $\mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 是由 $\mathbf{E}_h$ 、 $\mathbf{F}_h$ 和 1_λ 生成的一个子超代数, 其中 $1 \leq h < m + n$, $\lambda \in \Lambda(m | n, r)$.

证明 设 $\mathfrak{s}'_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 是由 $[aE_{h,h+1} + D]$ 和 $[bE_{h+1,h} + D']$ 张成的子代数, 其中 D 和 D' 是对角矩阵, 且 $aE_{h,h+1} + D, bE_{h+1,h} + D' \in M(m | n, r)_l$, $0 \leq a, b < l$. 注意到, 在乘法公式中, 如果 $A = (a_{ij}) \in M(m | n, r)_l$, 那么存在某些 D 和 D' , 使得

$$\mathbf{E}_h^{(a)} \xi_A = \xi_{aE_{h,h+1} + D} \xi_A, \quad \mathbf{F}_h^{(b)} \xi_A = \xi_{bE_{h+1,h} + D'} \xi_A,$$

它们都是 ξ_B ($B \in M(m | n, r)_l$) 的线性组合, 这就意味着 $\mathfrak{s}'_{\mathcal{R}}(m | n, r) \subseteq \mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$. 根据文献 [7, 定理 7.4] 中的三角乘法公式, 可得

$$\prod_{i \leq h < j}^{(\leq 2)} \xi_{(a_{j,i} E_{h+1,h} + D_{i,h,j})} \prod_{i \leq h < j}^{(\leq 1)} \xi_{(a_{i,j} E_{h,h+1} + D_{i,h,j})} = (-1)^{\bar{A}} \xi_A + \sum_{B, B \prec A} g_{A,B} \xi_B, \quad (8.1)$$

其中 $g_{A,B} \in F$. 对 $M(m | n, r)$ 上的 Bruhat 序进行归纳得到, 所有的 ξ_A 属于 $\mathfrak{s}'_{\mathcal{R}}(m | n, r)$, 其中 $A \in M(m | n, r)_l$. 因此, $\mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r) = \mathfrak{s}'_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 是一个子代数, 同时, 也是子超代数. 根据上面的讨论, 我们不难得出 $\mathbf{E}_h$ 、 $\mathbf{F}_h$ 和 1_λ 是生成元. $\square$

注 8.1 在文献 [16, 第 3 节] 中, 应用量子坐标超代数, 定义了无穷小 q -Schur 超代数, 根据文献 [2, 推论 8.4], $\mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 同构于该代数.

现在将构造子超代数 $\mathbf{u}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$. 令 $\mathbb{Z}_l := \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_l$ 是商映射, 将此映射扩展到 $M(m | n, r)$ 和 $\Lambda(m | n, r)$ 上面, 其中 $-$ 的作用是对集合中每一个元素的每一个分量用 $-$ 来作用. 因此, 我们可以

将像的集合 $\overline{M(m | n, r)}$ 等同于集合

$$\overline{M(m | n, r)} = \{A^\pm + \text{diag}(\bar{\partial}_A) \mid A \in M(m | n, r)_l\} = \overline{M(m | n, r)_l},$$

其中 $A^\pm$ 是指将矩阵 A 的主对角线元素全部用 “0” 取代后得到的矩阵, $\partial_A \in \mathbb{Z}^{m+n}$ 是 A 的主对角线元素构成的向量, 于是, $A = A^\pm + \text{diag}(\partial_A)$. 对于 $A = A^\pm + \text{diag}(\bar{\partial}_A) \in \overline{M(m | n, r)}$, 定义

$$\bar{\xi}_A = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda(m | n, r - |A^\pm|) \\ \bar{\lambda} = \bar{\partial}_A}} \xi_{A^\pm + \text{diag}(\lambda)} = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda(m | n, r - |A^\pm|) \\ \bar{\lambda} = \bar{\partial}_A}} \xi_{A^\pm + \text{diag}(\lambda)}.$$

令 $\bar{1}_\lambda = \bar{\xi}_{\text{diag}(\lambda)}$, 注意到所有的 $\bar{\xi}_A$ 都是 $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的超代数结构下的齐次元.

推论 8.1 (参见文献 [1, 推论 9.3]) 由 $\{\bar{\xi}_A\}_{A \in \overline{M(m | n, r)}}$ 张成的子超空间记为 $\mathfrak{u}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$, 它是 $\mathfrak{s}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 的子超代数, 它的单位元为 $\sum_{x \in \Lambda(m | n, r)} \bar{1}_{\text{diag}(x)}$ 并且该代数是由 $\mathbf{E}_h$ 、 $\mathbf{F}_h$ 和 $\bar{1}_\lambda$ 生成的代数, 其中 $1 \leq h < m + n$, $\lambda \in \Lambda(m | n, r)$.

证明 在此情形下, 同文献 [1, 定理 9.1] 的证明类似, 已知 $\mathfrak{u}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 是由 $\bar{\xi}_{aE_{h, h+1} + D}$ 和 $\bar{\xi}_{bE_{h+1, h} + D'}$ 生成的子代数, 其中 D 和 D' 是对角矩阵, 且 $aE_{h, h+1} + D, bE_{h+1, h} + D' \in \overline{M(m | n, r)}$. 取三角关系 (8.1) 中所有使得 $\bar{\lambda} = \bar{\partial}_A$ 的 $\xi_{A^\pm + \text{diag}(\lambda)}$ 的和, 于是得到 $\bar{\xi}_A$ 的三角关系.

最后一个结论是显然的, 因为所有的 $\bar{\xi}_{aE_{h, h+1} + D}$ 和 $\bar{\xi}_{bE_{h+1, h} + D'}$ 分别具有形式 $\mathbf{E}_h^{(a)} \bar{1}_\lambda$ 和 $\mathbf{F}_h^{(b)} \bar{1}_\lambda$. 同文献 [17] 类似, 称代数 $\mathfrak{u}_{\mathcal{R}}(m | n, r)$ 为小 q -Schur 超代数. $\square$

定理 8.2 (参见文献 [1, 定理 9.4]) 假设 $m, n \geq 1$, $\mathcal{R} = F$ 是特征不等于 2 的代数闭域. 超代数 $\mathfrak{s}_F(m | n, r)$ 或者 $\mathfrak{u}_F(m | n, r)$ 是半单的当且仅当满足下列条件之一:

- (1) $r < l$;
- (2) $m = n = 1$, $l \nmid r$.

致谢 作者对审稿人仔细校读本文初稿并提出很多修改意见致以衷心的感谢.

参考文献

- 1 Du J, Gu H, Zhou Z. Multiplication formulas and semisimplicity for q -Schur superalgebras. Nagoya Math J, 2018, 329: 1–29
- 2 Du J, Gu H, Wang J. Irreducible representations of q -Schur superalgebras at a root of unity. J Pure Appl Algebra, 2014, 218: 2012–2059
- 3 Du J, Gu H, Wang J. Representations of q -Schur superalgebras in positive characteristics. J Algebra, 2017, 481: 393–419
- 4 Du J, Rui H. Quantum Schur superalgebras and Kazhdan-Lusztig combinatorics. J Pure Appl Algebra, 2011, 215: 2715–2737
- 5 Mitsuhashi H. Schur-Weyl reciprocity between the quantum superalgebra and the Iwahori-Hecke algebra. Algebr Represent Theory, 2006, 9: 309–322
- 6 Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup. Comm Math Phys, 1989, 123: 163–175
- 7 Du J, Gu H. A realization of the quantum supergroup $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$. J Algebra, 2014, 404: 60–99
- 8 Beilinson A A, Lusztig G, MacPherson R. A geometric setting for the quantum deformation of GL_n . Duke Math J, 1990, 61: 655–677
- 9 Deng B, Du J, Parshall B, et al. Finite Dimensional Algebras and Quantum Groups. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 150. Providence: Amer Math Soc, 2008
- 10 Clark S, Hill D, Wang W. Quantum shuffles and quantum supergroups of basic type. Quantum Topol, 2016, 7: 553–638
- 11 Du J, Gu H. Canonical bases for the quantum supergroup $\mathbf{U}(\mathfrak{gl}_{m|n})$. Math Z, 2015, 281: 631–660
- 12 El Turkey H, Kujawa J. Presenting Schur superalgebras. Pacific J Math, 2013, 262: 285–316
- 13 Clark S. Canonical bases for the quantum enveloping algebra of $\mathfrak{gl}_{m|1}$ and its modules. ArXiv:1605.04266, 2016

- 14 Marko F, Zubkov A N. Schur superalgebras in characteristic p . *Algebr Represent Theory*, 2006, 9: 1–12
- 15 Marko F, Zubkov A N. Schur superalgebras in characteristic p , II. *Bull Lond Math Soc*, 2006, 38: 99–112
- 16 Chen X, Gu H, Wang J. Infinitesimal and little q -Schur superalgebras. *Comm Algebra*, 2018, 46: 516–543
- 17 Du J, Fu Q, Wang J. Infinitesimal quantum $\mathfrak{gl}_n$ and little q -Schur algebras. *J Algebra*, 2005, 287: 199–233

q -Schur superalgebras

Jie Du & Haixia Gu

Abstract This paper provides a survey on the latest developments of q -Schur superalgebras, quantum linear supergroups and their canonical bases and irreducible (polynomial) representations. We first introduce the definitions of q -Schur superalgebras in three different contexts and their associated bases, and describe the relationships between the three bases. We then move on to display certain multiplication formulas in q -Schur superalgebras and discuss their applications to the new realization of quantum linear supergroups and to the regular representation of a q -Schur superalgebra. We provide another application for the construction of canonical bases for the positive part of the quantum linear supergroup. As a by-product, a semi-simplicity criterion is given for q -Schur superalgebras. Moreover, by generalising the idea of Alperin’s weight conjecture and Scott’s permutation representation theory, we provide a classification of irreducible modules for a q -Schur superalgebra. We also mention a new approach to introduce infinitesimal and little q -Schur superalgebras without using quantum coordinate superalgebras.

Keywords q -Schur superalgebra, Hecke algebra, quantum linear supergroup

MSC(2010) 20C08, 20G42, 20G43

doi: 10.1360/N012017-00265