



用地表重力能否推求地球内部的密度分布

——对“统一引力场表示理论”的看法

张赤军^{①*}, 骆鸣津^②

① 中国科学院测量与地球物理研究所, 武汉 430077;

② 河南省地震局, 郑州 450000

* E-mail: iggzhangcj@sohu.com

收稿日期: 2008-02-19; 接受日期: 2008-11-17

国家自然科学基金(批准号: 40674013 和 90814009)和国家高技术研究发展计划(编号: 2006AA09Z153)资助

摘要 “统一引力场表示理论”的作者指出, 这是一种新的理论. 该理论认为, 扰动位能满足重调和方程, 亦即异常(扰动)密度能够满足调和方程, 这样就可以用边界上的值唯一确定地球内部异常密度的分布, 从而用牛顿位公式统一了地球的内外引力场. 究竟能否用边界上的结果将地球的内外引力场进行统一, 这种异常密度能否满足调和方程, “统论”所定义的内部密度是否与真实地球内部密度有关, 本文对以上及有关问题提出了自己的看法.

关键词

统一引力场表示理论
边界条件
地球内部的异常密度
唯一性

近数十年来, 有不少学者根据地表面上的重力位或扰动位及其派生物, 在前人和已有的地球模型基础上, 对地球内部的密度分布作了许多大胆的探讨和有益的研究, 使人们对其在研究地球内部物理中的作用(辅助)及表征地球的等位椭球理论加深了认识^[1,2]. 但也有人认为似乎仅依赖于重力资料就可以对物探中的问题做出全面正确地解释. 还有人认为, 仅根据重力数据再加上一些人为规定的条件, 便可推求出地球内部的密度分布. 当然, 也有些人对上述观点表示异议, 例如 Skeels^[3]在“重力解释的多解性”中强调: “仅依据重力信息本身, 将重力图解释为地下质量的分布, 永远不可能取得唯一的解释, 尽管以往早就有人作了类似的表述, 但现今仍然有人声称发现了能够导致唯一解的某些方法; 甚至还有人认为如果对这一问题进行足够的思考, 似乎就能够找到问题的解决方法”. 又例如, 熊光楚^[4]在“变密度重力勘探反演的多解问题”的文中, 利用格林定理

作如下证明: “若已知某物体的形状、总质量和它不均匀、正的密度分布, 但从反演中得不到该物体的单一密度”. 在 Vanicek^[5]的“具有什么样的外部引力位才能告诉我们关于内部质量的分布”的论文中也指出: 若知道外部的引力位, 则存在无穷多个密度分布; 即在知道外部和内部密度具有调和性质的前提下, 可以推导出密度分布的表达式, 但他明确地承认: “该项工作在地球物理中没有什么实际意义”. 本文提及的“统一引力场表示理论”^[6](简称“统论”)可能也属此列.

1 用牛顿引力理论可以确定地球内外引力场

由于扰动引力位是真实地球引力位与地球(椭球)的正常引力位之差, 因此可以分别研究这两种引力位. 如果真实地球内部密度和正常(椭球)密度分布均为已知的话, 应用牛顿万有引力理论, 就可以确定地

球内部的引力场和外部的引力场, 而无需另建一套理论来统一. 因此, “统论”的真实含义是用边界条件将地球内外引力场统一起来, 而不是像该文说的那样, 是在牛顿万有引力理论基础上的统一. 实际上“统论”是用边界上给出的边界条件来求出地球内部的密度 ρ 或异常密度(亦称扰动密度) $d\rho$ (真实地球密度和正常椭球密度分布之差)分布, 再用牛顿万有引力公式计算内部引力场和外部引力场? 从而达到统一. 究竟能不能用边界条件来计算内部密度以确定内部引力场. 由重力学^[2]可知, 外部引力位可以由边界条件来确定, 因为它满足Laplace方程, 而内部引力位不能由边界条件来确定, 因为它并不满足Laplace方程, 只满足Poisson方程, 而Poisson方程的边值问题是多解的, 即有任意多的密度分布都能满足同一个边界条件.

“统论”实际上是在牛顿引力位理论上用了一个牛顿位算子, 将地球内外部引力位统一起来. 今设 V 为物体的引力位, ρ 为该物体的密度, G 为引力常数, r 为被吸引点到吸引点(体积元 dv)的距离, 则有

$$V = G \iiint \frac{\rho}{r} dv, \quad (1)$$

当 ρ 是以线性形式出现时, 则

$$V = N\rho, \quad (2)$$

式中的 N 即“统论”中定义的牛顿位算子. 在讨论扰动位 ϕ 时, 该文则用 ϕ 代替 V , 以 $d\rho$ 代表异常密度. 显然, 从式(2)可以看出, 如果已经知道物体(包括地球)内部密度的分布, 则完全可以用引力位公式把内外引力场统一起来, 这样就无需另建一种理论来进行统一.

我们认为, “统论”的本质是承认或假定了地球内部密度或扰动密度的分布函数呈调和结构, 如此可利用调重和方程从使Laplace方程与Poisson方程统一起来. 现在的问题是, 这种理想化的假设并不符合地球的真实情况. 众所周知, 地球内部密度或其扰动密度都不可能用调和函数来表征, 因为这不仅要求它(们)本身在全空间内连续而且要求它(们)的一阶二阶导数都是连续函数, 显然这种非常严格的条件对真实的地球而言, 是不可能得到满足的.

2 “统论”所定义的内部密度不是真实地球的密度

根据文献[8], 假定上述的 V 或 ϕ 在球内满足重调

和方程, 由此可以推得的密度 ρ 、或异常(扰动)密度 $d\rho$ 能够满足调和方程. 按调和方程性质, 球内的值: $\rho(r, \theta, \lambda)$ 可由球面上的 $\rho(R, \theta, \lambda)$ 来求定^[2], 这时

$$\rho(r, \theta, \lambda) = \sum \frac{r^n}{R^n} \rho_n(R, \theta, \lambda), \quad R > r, \quad (3)$$

对于 $d\rho$ 的表达式, 则与上式的形式一样, 这里就不列了. 现再由文献[6]中的[40]式, 即已知边界上的调和函数: $u_1(\theta)$ 及其导数: $\partial u_1(\theta)/\partial r$, 又可确定球内的另一 $\rho(r, \theta, \lambda)$ 值. 由此看出, 由于数学假设上的随意性, 可以导致内部密度的多解性. 此外, 如在文献[8]中若令球体密度 ρ 满足重调和方程, 据此又会得到另一类的地球内部密度分布. 从上述几个实例可知, 所求的球内密度 ρ 不是唯一的, 亦即因人们所用的不同数学假设而异. 况且现今最为重要的事实是: 地球内部的密度分布与满足某种数学方程求得的密度分布并不一致, 因为地球内部的密度分布并不能满足Laplace方程, 如地球内存在海洋、陆壳、地幔、地核(内、外)与地幔热柱等等密度不连续面或间断面, 这时 $\Delta\rho$ 不可能等于零. 既然“统论”求出的密度不能反映真实地球内部的密度, 那么由此算出的内部引力场也不是真实的内部引力场, 这种不能真实地得到统一的内外引力场的表示理论就没有存在的必要了.

3 满足调和方程的异常密度的假设不能成立

“统论”的作者认为: “两个非连续函数之差有可能连续”, 但要实现这一可能, 必须满足正常地球密度 ρ_u 与真实地球密度 ρ_w 的各个间断面都要相互吻合, 且 ρ_u 的其余部分都要求连续, 同时 ρ_u 还应满足地球重力的分异结构, 即由地表到地心的密度在逐渐增加, 还要基本上能符合液压平衡与地壳均衡补偿的原理. 只有在顾及以上各项条件后, 两者的密度分布才能接近, 至少可以认为两者的分布与经度相关, 而由 ρ_u 产生正常引力位也才能与经度相关, 可是这一结果与已有的规则不符. 换句话说, 若要正常引力位与经度无关, 则 ρ_u 的分布不能出现阶跃, 而且它与经度无关. 如此, 则异常密度只能是非连续函数. 今设异常密度: $d\rho = \rho_w - \rho_u$, 并有 $\rho_u = \rho_w - d\rho$, 当 $d\rho$ 满足 $\Delta d\rho = 0$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
 d\rho(r, \theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n^m \cos(m\lambda) + B_n^m \sin(m\lambda)) \\
 &\quad P_n^m(\cos \theta) \\
 &= F(r, \theta, \lambda) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n F_n(R, \theta, \lambda),
 \end{aligned} \tag{4}$$

式中

$$F_n(R, \theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos(m\lambda) + B_n^m \sin(m\lambda)) P_n^m(\cos \theta),$$

r 为一点在球坐标中的向径, θ, λ 分别为该点的余纬和经度, R 为球的半径, 对地球而言, 就是它的平均半径, ρ_u 是 ρ_w 与 $F(r, \theta, \lambda)$ 之差, 现分别进行讨论.

众所周知, 地球密度 ρ_w 的分布极为复杂, r 处的 ρ_w 分布, 可用该面上的面球谐函数来表达, 当 r 变化时, 面球谐函数也跟着变化; 函数 $F_n(r, \theta, \lambda)$ 的分布与 $F_n(R, \theta, \lambda)$ 的分布相似, 但前者的幅度随 r 的减小而变小, 且随 $(r/R)^n$ 中的 n 的增高而衰减. 对真实地球而言, 它的密度 ρ_w , 则随 r 的减小而增大. 但 $F_n(r, \theta, \lambda)$ 随 r 减小而减小, 直至为零. 因此对上式中的系数: A_n^m, B_n^m 无论怎么去选取, 仅凭表面上的 $F_n(r, \theta, \lambda)$ 和 $(r/R)^n$ 的数值, 也无法改变(抵消)球内 r 点处的密度 ρ_w 在经度方向上不均匀分布的状态. 这时也只有在这时(即在假设 $\Delta d\rho=0$ 的条件下), 才能得到正常密度在经度方向上存在着不均匀性的分布, 也才有正常引力位与经度相关的结论, 不过这与既有的规则或惯用的事实是不符的. 因此, $\Delta d\rho=0$ 的假设不能成立. 从以上的分析也可以看出, 基于正常引力位的分布与经度无关的事实, 就能推得: (1) $d\rho$ 不可能是连续函数; (2) $\Delta d\rho=0$ 的假设不能成立.

4 “统论”只是表示地球外部引力场的一种方法

该理论只适用于外部引力场, 不过在“统论”发表之前的各种理论已经解决, 只是多一种表示外部引力场的方法而已. 在表示外部扰动位时, 这种方法需要应用两种边界值: $u_1, \partial u_1 / \partial r$, 前者为物体表面上的扰动位, 后者为其径向梯度. 若将该法与人们通常用于求解第三边值问题的方法相比, 则该法有可能使问题的求解变得更为复杂.

5 “统论”的边界条件在实际中无法测得

文献[6]中的(16)式给出边界上的两种条件: 一为边界上的扰动位 ϕ , 另一为边界上 $\partial\phi / \partial n$, n 为界面 S 上的外法线. 故“统论”归结为解第一边值问题(狄里赫利)和第二边值问题(纽曼)^[8].

(1) 在地球表面能测出重力 g , 也能测出位差 $W-W_0$, 由位差可计算正常高 H_γ , 以 $R+H_\gamma$ 作为地球近似表面, 据此可以算出地球近似表面上的正常重力 γ .

由于 g 和 γ 不在同一面上, 故应在 γ 上减去 $\zeta(\partial\gamma / \partial r)$, 如此可使它归化到与 g 相同的点位上, 这时得出的纯重力异常可表示为

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = g - \left(\gamma - \zeta \frac{\partial\gamma}{\partial r} \right), \tag{5}$$

式中 ζ 为地球表面到地球近似表面间的距离, 且有

$$\zeta \frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{\phi}{\gamma} \frac{\partial\gamma}{\partial r} = \phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{GM}{r^2} = -2 \frac{\phi}{r}, \tag{6}$$

由此得到大地重力学的基本微分方程:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} + 2 \frac{\phi}{r} \right)_{r=r_s} = g - \gamma, \tag{7}$$

式中 $g-\gamma$ 为混合重力异常, 它是可以测得的, 我们将这一边界值放到地球近似表面上求解, 地球近似表面可以测出, 即为已知, 故可求解. 由此看来, 大地重力学的主要任务是求解第三边值问题, 而不是“统论”的第一、第二边值问题.

(2) “统论”以 n 为界面 s 的外法线方向, 对以地表为 s 面来说, 边界条件 $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_s = f_2$ 是无法得到的, 因地表山谷纵横, 外法线千变万化, 如果要能应用, 只有将重力归算到大地水准面上, 以大地水准面为边界面, 大地水准面外法线方向变化比地表为小, 即使这样也得不到纯重力异常的边界条件, 因为正常重力是在水准椭球面上求得, 它不在大地水准面上.

(3) 由于地表到大地水准面间的物质分布人们还不清楚, 故重力归算很不精确, 更为主要的是大地水准面在大陆上不构成外边界面, 为避免上述的缺陷, 从而出现了研究真实地球形状的莫洛金斯基理论. 此外, 为了解算地表的第三边值问题还可以采用等效内球、并与高程相联系的解析延拓的方法, 也

可以采用等效球, 单层面密度法等, 详见文献[9~11].

前已说明以地表为边界面, “统论”的边界条件 $(\partial/\partial n)\phi = (\partial/\partial n)W - (\partial/\partial n)U$ 中 $(\partial/\partial n)W \neq g$, 因为 n 是 s 面的外法线, 即使大胆改动, 将 n 变为 r (应为铅垂方向, r 只是近似), 使 $(\partial/\partial n)W = (\partial/\partial r)W = g$, 也得不到地表上的 $(\partial/\partial n)U = (\partial/\partial r)U = \gamma$ 值. 同时“统论”还要求边界上的 $W-U$ 值, 地表上 W 值可以由水准、重力测量得到, 但在边界面上的 U 值是无法得到的.

总之不论是以大地水准面为边界面, 还是以地表为边界面, “统论”要求的边界条件 ϕ_s 和 $(\partial\phi/\partial n)|_s$ 是无法得到的, 因此“统论”是无法应用的.

在 GPS 测高的情形下才可解出第一, 第二边值问题.

6 用“统论”的边界条件无法求出地球内部的扰动质量分布

从表面上看来, “统论”是可以边界条件来计算地球内部扰动质量分布的, “统论”作者也在实际中予以应用, 例如在文献[12]中写道: 本文提出的理论对中国大陆岩石圈异常密度研究应用, 并利用 DQM84D 地球重力模型计算了地区岩石圈深部的密度异常分布……. 不过在这里有几点需要指出:

(i) 前已证明: “统论”求出的密度并不代表真实的地球密度.

(ii) 满足边界面上的重力值等于正常重力值的正常地球密度分布不是唯一的, 它是不定的. “统论”中所指的异常(扰动)质量是相对哪一种正常地球密度的分布仍不明确. 事实上, 正常椭球的内部密度也是无法确定的, 在以往的一些文章中也只能人为地用地壳的平均密度 $2670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 代替岩石层密度, 例如文献[13]中就是这样, 但这不尽合理.

(iii) 文献[12]认为扰动(异常)质量的密度是由两

部分组成, 并且认为其中的第二部分仅与扰动位的系数相对应, 这样做似不合理. 而我们则认为只有上述两种密度之和才能与之相对应, 况且所得结果与文献[14]的也不一致, 即在青藏地区岩石层的异常密度并非正值.

(iv) 当今人们对地球内部的探测正在得到前所未有的发展^[15], 对内部结构的认识已从过去径向分布圈层之间的间断面, 发展到横向分布的大小板块、深大断裂、地裂缝、地幔柱体等间断体, 在这些界面上都表征着密度的间断, 更不会有什么连续、调和的密度分布可言, 因此由引力场并经数学加工而推得的理论和假论, 都要经受以上客观实际的检验.

7 结论

(1) 人类对地球内部密度分布研究已有多年历史, 研究方法和资料主要来自于地震波和地球的自由振荡, 而地球表面的重力和地球的质量、转动惯量一样, 在总体上只能起到约束的作用. 本文进一步证明单纯由重力资料不可能唯一地反演物体内部密度的分布.

(2) 在加入人为条件(地球内部异常密度分布函数呈调和结构)后的反演结果与实际的情况也不相符, 至于用地震波等资料加以制约, 则另当别论. 地球内部密度的分布, 首先是个物理问题, 因此在研究中, 必须以客观事实为基础. 时至今日, 人们已经认识到, 地球内部有多个间断面, 其径向侧向密度是不连续的, 而对地球正常椭球密度的分布的认识仍然知之甚少, 即使人们把它们两者的内部密度视为非连续函数, 也不能像“统论”的结语中那样, 把“两个非连续函数之差有可能连续”当作现实, 把它变为讨论或研究地球内部问题的出发点或依据.

致谢 在本文的审稿过程中得到了审稿人的热情耐心的帮助, 并且严格认真地指出需要修改的问题, 雷湘鄂、周江存两位博士的宝贵意见和大力支持, 特在此谨致诚恳的谢意.

参考文献

- 1 H. 莫里茨, 著. 陈俊勇, 左传惠, 译. 地球形状-理论大地测量学和地球内部物理学. 北京: 测绘出版社出版, 1991
- 2 Marchenko A N. Simplest Solutions of Clairaut's Equation and the Earth's density model. In: Grafrand E, Kiomm F W, Schwarze V,

- eds. Geodesy. Berlin: Springer Press, 2003. 441—446
- 3 Skeels D C. Ambiguity in gravity interpretation. *Geophysics*, 1947, 12(1): 43—56[[doi](#)]
 - 4 熊光楚. 变密度重力勘探反演的多解问题. *地球物理学报*, 1982, 25(6): 549—553
 - 5 Vanicek A K. What an external gravitational potential can really tell us about mass distribution. *Bollettino Geofis Teorica Appl*, 1985, 27(108): 242—250
 - 6 朱灼文. 统一引力场表示理论. *中国科学 B 辑*, 1987, 12: 1348—1356
 - 7 李瑞浩. 重力学引论. 北京: 地震出版社, 1988
 - 8 李斐. 大地重力学反问题. 博士学位论文. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 1988
 - 9 许厚泽, 朱灼文. 地球上部重力场的虚拟单层密度表示. *中国科学 B 辑*, 1984, 14(6): 575—580
 - 10 Bierhammer A. A new theory of geodetic gravity. *Trans Roy Inst Tech*, 1964
 - 11 骆鸣津. 用球函数法解算重力测量基本微分方程. *测量与地球物理集刊*, 1965, (2): 7—26
 - 12 朱灼文, 操华胜. 重力学内部边值问题及其应用. *中国科学 B 辑*, 1990, 20(2): 208—217
 - 13 张赤军, 操华胜, 罗少聪. 由地面卫星重力资料研究岩石层密度. *地球物理学报*, 1988, 31(6): 664—672
 - 14 许厚泽. 青藏高原的大地测量研究. 武汉: 湖北科技出版社, 2001
 - 15 陈颢, 朱日祥. 地下明灯研究计划的建议. *地球科学进展*, 2005, 20(5): 485—489