三分角問題

華羅庚

一、引言

這一年來我答覆了將近二三十封關於三分角的信，這使我覺得有總結一下的必要，因爲此項研究的發展，會使聰明才智白白地浪費了！同時這類信件還繼續接到，我相信有些人現在還在研究這個問題。所以我做一簡單的報告來總結一下。在我所收到的信中仔細分析一下，可以看出以下幾種情況：

1. 受了不正確的領導；
2. 未了解在何種情況之下三分角是"不可能"的；與不能分辨"不可能"和"未解决"的不同；
3. 未學習或不肯學習别人已得的結果；
4. 當然除掉以上三種基本的誤解，還有數學技術性的錯誤。

我現在先把何謂三分角問題，敘述清楚：

"已與一角，其度數是A，我們能否用圓規及直尺作出$\frac{1}{3}$ A角度的角"。

當然有時是可能的，如 $A=90°$ 就是可能的。但若 $A=60°$ 就不可能。但如果不用圓規及直尺，而用其他高次曲線，則並非不可能。

二、"不可能"和"未解决"

在數學中"不可能"和"未解决"有牠們一定的意義，先讓我來打一個譬喻。

"上月亮去"是一個"未解决"的問題。但"步行上月亮去"是一個"不可能"的問題。

有許多來信常說："從前認爲不可能的事，現在有些是可能了！所以不可能的說法僅僅是阻礙進步，我們不可爲不可能三字而限制了我們的前進，限制了我們的發明。"有些朋友，更進一步地說："在蔣介石政權下很多不可能的事，今天都可能了，所以用圓規及直尺三分角的問題，也並不是絕對不可能的。"此說前一半是對的，如取消"用圓規及直尺"六字則後一半也對。因爲這六個字和"在蔣政權下"是相當的：即在某種條件下是不可能的。

切實說：用圓規及直尺三分任意角就如步行上月亮一樣是不可能的，而不是未解决的。

三、一個不公平的訟案

在很多來信上，自以爲解决了三分角問題的朋友進一步要求，請指出錯誤來，誠然，我所經手的，我都做了這一工作。但這是一件十分無聊和繁雜的工作，爲了說清楚我的觀點，請發明人站在公正的立場上，判斷下列的事實，我們來共同處理這一件糾紛。

甲造說："用圓規及直尺三分任意角是不可能的，世界上的大數學家，都可以替我作證。"

乙造說："我發明了用圓規及直尺三分任意角的方法，我本人就是證人。如果你說我不對，請指出我的錯誤來！"但他却不肯自已屈尊降貴去閱讀甲造的文件，去指出甲造的錯誤來。這是一件不公平事情，爲什麼甲造已經根本地總括一切地解决了乙造的問題，而乙造可以不讀甲造文件，反要甲造去指出乙造個別的特殊的但沒有超出甲造所指的範圍以外的錯誤呢？同時這也是不負責任的態度，要知道"不入虎穴，焉得虎子"如果能把甲造的錯誤看出來，那我們就可以在思想上廓淸"不可能"三字的障礙，這也才是乙造學說成立的第一步。假使乙造讀了而認爲甲造說法不錯的話，就請乙造放棄自已的意見。

更有些朋友連基本的實踐都忘記了！他並不畫個圖試一試，就貿然地提出來。我建議乙造：請

照他的方法，用大紙細筆精繪三分六十度，用量角器量一下，看看是否有些像，不然乾脆不必提出來。

當然也有一些做三分角問題的人，受條件限制，他完全不知道甲造意見，而不是自已不虛心，這種情形是可以原諒的。

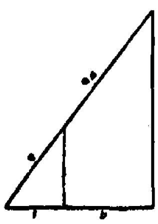
一般地講，做這問題的人往往是受不正確的思想領導，受書本上或口頭上影響，只知道三分角問題是古代沒有解決的三大著名問題之一，而不知道這個問題到現在早已解決了。(這解決的答案，就是本文所要介紹的。) 我建議傳授幾何問題的人，如要談到三分角問題，就必須把它交代淸楚(即使不能嚴格證明)以免引人走入岐路。

四、爲什麽用圓規及直尺三分任意角不可能？

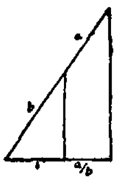
在說明這理由之前，先讓我來叙述一個原則(了解這一段需要解析幾何的知識，同時這不是嚴正的證明，而僅是大致的說明)。圓和直線的交點的坐標一定是二次方程式的根，如果所求的線段不是由已知線段用若干次加減乘除開平方得出來的，一定不能用圓規及直尺做出來。反之，是可能由圓規及直尺做出來的。我們現在詳細說明這一事實。

1.如果某一線段的長(某一點的座標)是由已知的線段的長(或已知點的坐標)經有限次的加減乘除及開平方(指開正數的平方)後得出來的，則此線段(或此點)一定可以用圓規及直尺做出來。

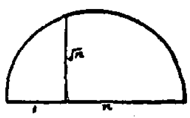
證：二線段的和及差毋待討論，乘除開方可由下列三圖知之：



圖一



圖二



圖三

例如：單位圓內接正五邊形的邊長$\frac{5}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$是可以圓規及直尺做出的。換言之，用圓規及直尺做圓內接正五邊形是可能的。

2.如果一線段(或一點)可以用圓規及直尺做出來，則此線段的長度(或此點的坐標)必可由已知線段的長度(或已知點底座標)的有限次加減乘除和開平方表出來。

因爲如果一線段可以用圓規及直尺做出來，則此線段(或點)是從原來所予的點或線段爲基礎而以之做直線或圓，並經過線與線，線與圓及圓與圓的相交之交點而定出來。因爲坐標可以隨意選擇，可以假定做圖時所用的直線都不平行於 y 軸，於是所有的直線的方程式都是如下形式。

(1)　$y=mx+b$.

$y=mx+b$ 與 $y=m'x+b'$ 之交點是(x_1, y_1)

$$x_1=\frac{b'-b}{m-m'},\quad y_1=\frac{mb'-m'b}{m-m'},$$

是該二直線的係數的有理函數。

假定(1)與圓$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 相交，其交點的橫坐標 x 由方程式

$$(x-c)^2+(mx-d+b)^2=r^2$$

決定這方程式的係數是 m, b, c, d, r 之有理函數，故 x 可由 m, b, c, d, r 經有限次加減乘除與開平方得之。

至於二圓相交，則可由其一圓及兩圓之公弦相交算出其交點，這與以上所說的相同。

3.利用這些結果，可以證明

若一有理係數的三次方程式，$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (α, β, γ 都是有理數) 的一個根 x，可用圓規及直尺做出，則此三次方程式一定有一有理根。

證：先介紹一個名詞，如$\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 這種式子是經過兩層開方的手續得來的，我們就稱它爲二層根式。這樣三層根式，四層根式和 n 層根式的意義都是很明顯的。

如果X_1 本身是一個有理數就沒有可說的了，要不然X_1 一定可以表成一些根式的有理函數如

$$\left(a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\sqrt{\alpha}+c\sqrt{\gamma}}\right)$$

$$\div\sqrt{c+\sqrt{d+e\sqrt{\beta}}},$$

其中 a, b, c, d, e, 都是有理數。我們可以假定在x_1中出現的每個根式都不能表成x_1中其餘層數和它相等或比它低的根式的帶有理係數的有理函數。現在假定在 x_1 中出現的一個最高層根式 $\sqrt{K}$：

$x_1=\dfrac{a+b\sqrt{K}}{c+d\sqrt{K}}$ a, b, c, d 都不包含$\sqrt{K}$。則將分子分母同乘以 $c-d\sqrt{K}$ 後, x_1 可寫成 $x_1=e+f\sqrt{K}$ 其中 e, f 都不含 $\sqrt{K}$。

以 $x_1=e+f\sqrt{K}$ 代入 $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$

中得 $(e+f\sqrt{K})^3+\alpha(e+f\sqrt{K})^2$

$+\beta(e+f\sqrt{K})+\gamma=A+B\sqrt{K}=0$

若 $B\neq 0$ 則 $\sqrt{K}=-\dfrac{A}{B}$是與假設予盾

故 $B=0$, $A=0$。

因此 $e-f\sqrt{K}$ 也是方程式的一個根(因以 $e-f\sqrt{K}$ 代入 $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 的結果是$A-B\sqrt{K}$)。

故 $x_3=-\alpha-(e+f\sqrt{K})-(e-f\sqrt{K})=-\alpha-2e$ 也是方程式的一個根。

如果 e 是一個有理數則定理就證明了,現在證明 e 不可能是一個無理數。要不然,假設$\sqrt{s}$是出現在 e 中的一個最高層根式。

則 $e=e'+f'\sqrt{s}$, e' f' 不包含 $\sqrt{s}$。

$x_3=g+h\sqrt{s}$, 且 $h\neq 0$

由上面同樣的推理知道 $g-h\sqrt{s}$ 也是方程的一個根,並且不可能等於 x_3 所以 $g-h\sqrt{s}=\pm f\sqrt{K}+e$ 但出現在 g 和 h 中的根式都出現在 e 中,所以$\pm\sqrt{K}=(-e+g-h\sqrt{s})/f$可表成出現在 e 和 f 中的根式的帶有理係數的有理函數,這是不可能的。

4.現在可以看一看三分角的問題了。

由 $\cos A=4\cos^3\dfrac{A}{3}-3\cos\dfrac{A}{3}$ 得 $(2\cos\dfrac{A}{3})^3$

$-3(2\cos\dfrac{A}{3})-2\cos A=0$.

故三分角的問題一變而爲求$x^3-3x-2\cos A=0$的根問題。

取 $A=120°$, 方程式便變爲

$$X^3-3X+1=0.$$

這個方程式沒有理根,所以 $\cos 40°$ 不能用圓規和直尺作出。因之,40° 角不能用圓規和直尺作出,也就是說,120°不能用圓規和直尺三等分。

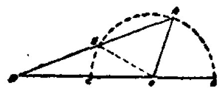
我們可以附帶的解决另一個出名的初等幾何作圖問題。就是要作一個立方體使它的體積等於已知立方體的體積的二倍。讀者可以用同樣方法解决。

另外一個問題就是要作一個正方形使它的面積等於一個已知圓的面積。這也可以證明用圓規和直尺是辦不到的,不過需要用到一點別的知識.不在這兒多談了。

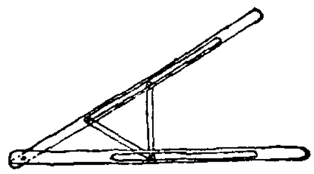
五、三分角的另一面

只用圓規和直尺去三等分一個角是不可能的,可是用別的作圖器械和別的曲線去三等分一個角却是可能的。

例一: 設所要三等分的角爲∠AOB (圖四)



圖四



圖五

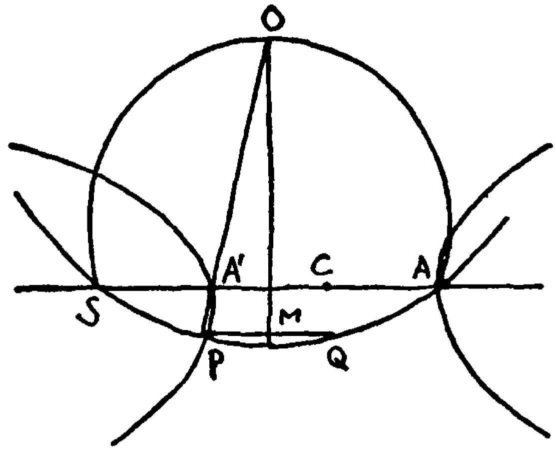
以 O爲中心,OA爲半徑作一半圓 $\overparen{BAC}$,

自 BC 上取一點 D,使 AD 交 $\overparen{BAC}$ 於E,且

$DE=EO$, 於是則 $\angle D=\dfrac{1}{3}\angle AOB$

現在的問題就是 D 這個點怎樣求。

用圓規和直尺是做不出來的。但我們可以根據這個原理來作一個三分角器如圖。至於怎樣使用這個三分角器讀者可以看圖自明(圖五)



圖六

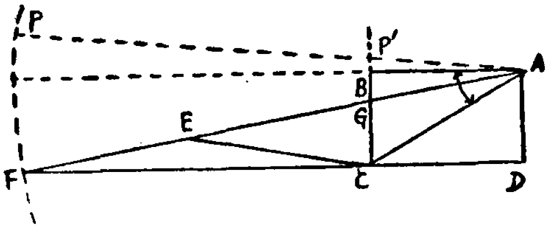
例二: 雙曲線法: 作離心率等於 2 的雙曲線中心是C, 頂點是 A 及 A' 延長 CA' 至 S, 使 A'S=C A' 於AS 上作包含等於欲三等分之角之圓弧, 命 AS 之垂直二等分線與此圓弧之交點爲 O 以O爲中心,OA(=OS)作半徑作圓交以A'爲頂點之雙曲線之一枝於P.則$\angle SOP\dfrac{1}{3}\angle SOA$ (圖六)

因離心率等於2，故S爲雙曲線之焦點，AS之垂二直等分線爲準線。而自P至此垂直二等分線之距離PM之二倍等於PS。以PM之延長線與圓弧APS之交點爲Q，則PQ爲PM之二倍，同時AQ等於SP。

故$SP=PQ=QA$

∴ $\angle SOP=\angle POQ=\angle QOA$.

例三，用蚌線法。（圖七）



圖七

以角BAC爲欲三等分之任意角作矩形ABCD以A爲定點，BC爲定線，並從A作諸射線，與BC相交於P'。令PP'等於AC之二倍。

則P點之軌跡爲一蚌線，延長DC與此蚌線相交於F。聯AF。

則 $\angle AFC=\angle BAG=\frac{1}{3}\angle BAC$.

因聯C及GF之中點E. 則$FE=EC=AC$.

故 $\angle BAG=\angle AFC=\frac{1}{2}\angle AEC$

$=\frac{1}{2}\angle FAC$ 因明以上結果。

參考書:

1. 克萊因著余介石譯：幾何三大問題（商務）
2. 林鶴一著：任誠，陳懷書，趙仁壽譯：初等幾何學作圖不能問題。（商務）
3. 狄克遜著黃新鐸譯：初級方程式論，（商務：）以上各書的任意一種都可。

蘇聯科學家們對於國際天文學協會執委會的無理决定表示憤慨

蘇聯科學家們抗議國際天文學協會執行委員會無理决定將原定於本年八月間在列寧格勒舉行的該會第八屆代表大會無限期延期的措施。

科學院院士奧巴林對塔斯社記者說：科學家們的國際代表大會，對於世界科學的進步具有極大重要性。這些代表大會在促進各國人民的文化交流方面，以及在維護全世界和平方面，都會發揮極大作用。蘇聯科學家們積極參加各種國際科學團體的會議和代表大會。蘇維埃國家曾爲國際生理學家代表大會準備過講壇。1945年舉行的蘇聯科學院220週年慶祝大典，實際上已變成了差不多世界各國的科學家們都曾參加的一個國際代表大會了。

蘇聯科學家們曾派代表出席去年在瑞典舉行的國際植物學者代表大會。在哥本哈根舉行的國際生理學家代表大會上，曾討論蘇聯科學的成就。蘇聯科學院熱烈歡迎西方的科學家們，並願使他們明瞭蘇聯科學院的種種科學成就。蘇聯科學院的各科學研究所和實驗所，常有各人民民主國家的和其他國家的科學家前來訪問。

蘇聯科學家對於有人企圖阻撓國際天文學家代表大會在蘇聯舉行一事表示憤慨。

（新華社稿5月4日）