

## 结合梯度投影稀疏重构和复数小波的图像重构

高彦彦\*, 李莉, 张晶, 贾英茜

(石家庄学院 机电学院, 石家庄 050035)

(\* 通信作者电子邮箱 gaoyanyan4468@aliyun.com)

**摘要:** 压缩感知主要包括随机投影和重构两部分。针对迭代收缩算法收敛速度较慢, 普通二维小波变换缺少方向性表示的缺点, 利用置乱离散余弦变换(PDCT)实现随机投影, 重构时采用梯度投影算法, 在简化计算的基础上, 通过迭代的方式完善图像在双树复数小波域的变换系数, 最后经反变换后得到重构图像。在同一重构算法下, 比较了利用双树复数小波变换和双正交小波变换的重构结果, 结果表明前者重构后的图像在细节和平滑度上优于后者, 在峰值信噪比(PSNR)上平均高出约 1.5 dB; 同一稀疏域中, 梯度投影算法的收敛速度优于迭代收缩算法; 相同稀疏域和重构算法下, PDCT 与结构随机矩阵相比在 PSNR 上略高。

**关键词:** 压缩感知; 图像重构; 随机投影; 稀疏表示; 双树复数小波; 置乱离散余弦变换; 梯度投影

**中图分类号:** TP391.4      **文献标志码:** A

### Image reconstruction based on gradient projection for sparse representation and complex wavelet

GAO Yanyan\*, LI Li, ZHANG Jing, JIA Yingqian

(College of Mechanical and Electrical Engineering, Shijiazhuang University, Shijiazhuang Hebei 050035, China)

**Abstract:** Compressed sensing mainly contains random projection and reconstruction. Because of lower convergence speed of iterative shrinkage algorithm and the lacking of direction of traditional 2-dimensional wavelet transform, random projection was implemented by using Permute Discrete Cosine Transform (PDCT), and the gradient projection was used for reconstruction. Based on the simplification of computation complexity, the transformation coefficients in the dual-tree complex wavelet domain were improved by iteration. Finally, the reconstructed image was obtained by the inverse transform. In the experiments, the reconstruction results of DT CWT (Dual-Tree Complex Wavelet Transform) and bi-orthogonal wavelet were compared with the same reconstruction algorithm, and the former is better than the latter in image detail and smoothness with higher Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) of 1.5 dB. In the same sparse domain, gradient projection converges faster than iterative shrinkage algorithm. And in the same sparse domain and random projection, PDCT has a slightly higher PSNR than the structural random matrix.

**Key words:** compressed sensing; image reconstruction; random projection; sparse representation; dual-tree complex wavelet; Permute Discrete Cosine Transform (PDCT); gradient projection

## 0 引言

近些年被人们广泛关注的图像压缩感知是由 David L. Donoho 在稀疏表示和优化理论的基础上提出的一种成像理论<sup>[1]</sup>, 其本质就是在对信号进行随机投影得到维数远小于原始信号的观测值后, 利用信号在某一变换域的稀疏性, 通过求解一系列的线性或者非线性的解码模型, 得到原始信号的逼近。这种成像方法在数据采集端实现了采样与压缩的同步进行, 因而极大地缓解了采集端的压力。这样就可以利用少量的传感器或传感器阵列采集信息, 通过复杂的重构算法重建高分辨率图像, 已应用在诸多方面<sup>[2-5]</sup>, 图像重构是典型应用之一。

基于压缩感知的图像重构有多种算法<sup>[6-7]</sup>, 这些算法主要是利用信号在某一表示域的稀疏性, 通过解决不同形式的优化问题来得到信号的最优逼近, 文献[8-9]对压缩感知中涉及的相关内容进行了综述。

信号在某一变换域的稀疏度是指变换系数中非零元素的个数, 这可以用系数的  $l_0$  范数表示。一般来说由于自然信号的稀疏性或是可压缩性, 使得信号在某一变换域存在稀疏解或近似的稀疏解, 因而压缩感知重构的目的就可以看成是寻找信号的最小稀疏解的过程, 即: 最小化系数的  $l_0$  范数的过程。但是这是一个 NP-hard 问题, 不易求解, 因而可以将  $l_0$  范数转化为其他函数的最小化问题。文献[10]中将  $l_0$  范数转化

收稿日期: 2019-09-18; 修回日期: 2019-10-14; 录用日期: 2019-10-24。

基金项目: 河北省高等学校科学技术研究项目(QN2017411); 河北省重点研发计划自筹项目(18210910)。

作者简介: 高彦彦(1984—), 女, 河北石家庄人, 讲师, 博士, 主要研究方向: 图像处理、模式识别; 李莉(1979—), 女, 河北石家庄人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 信号处理、智能信息处理; 张晶(1981—), 女, 河北沧州人, 讲师, 硕士, 主要研究方向: 图像处理、信号处理; 贾英茜(1976—), 女, 河北衡水人, 副教授, 博士, 主要研究方向: 信号处理、微电子技术。

为  $l_1$  范数最小化后,利用基追踪进一步将其转化为线性规划问题进行求解;也可以根据文献[11]提出的迭代收缩算法,利用前一估计值和变化域的阈值处理得到迭代更新值,进而逼近最优解;匹配追踪<sup>[12]</sup>是一种常用的贪婪算法,主要就是在每一步迭代中寻找投影字典中最匹配的原子,从而缩小剩余量,这种算法的计算量过大,对于图像压缩感知不是很好;文献[13]中利用图像的全变差(梯度稀疏性,变换系数的稀疏性)可以看成是梯度的一种跳变)结合凸集投影和小波阈值处理完成了图像的压缩感知重构。在以上介绍的这些方法中,均需要对投影矩阵  $A$  进行准确处理,而文献[14]针对稀疏重构提出的梯度投影(Gradient Projection for Sparse Reconstruction, GPSR)算法则不需要对投影矩阵  $A$  进行准确的处理,只需要计算  $A$  与  $A^T$  的内积,简化了算法。

压缩感知中变换域的选择目前常用的是正交小波,但正交小波存在一些不可避免的缺点:振荡、平移变性、方向选择性差。Kingsbury<sup>[15]</sup>提出的双树复数小波变换(Dual-Tree Complex Wavelet Transform, DT CWT)克服了这些缺点,具有平移不变性和良好的方向选择性。为了提高压缩感知重构算法的有效性,本文在利用置乱离散余弦变换(Permute Discrete Cosine Transform, PDCT)得到观测值后,利用图像在双树复数小波域的稀疏性,结合 GPSR 算法完成了图像压缩感知重构,并通过实验验证了该算法的有效性。

## 1 压缩感知

原始信号  $s \in \mathbb{R}^n$ , 随机投影过程表示为  $y = \Phi s$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  定义为随机投影矩阵,  $y \in \mathbb{R}^m$  ( $n \gg m$ )。压缩感知重构的目的是利用信号在某一变换域(用  $\Psi$  表示)的稀疏性,从远少于  $n$  的  $m$  个观测值中恢复原始信号。对于这一问题需要保证  $\Phi$  满足 Candes 等提出的限制等容性,并且  $\Phi$  与  $\Psi$  不相关<sup>[16]</sup>。

对于一维信号,随机矩阵  $\Phi$  通常情况下选择高斯随机阵<sup>[17]</sup>,但是对于二维图像,这种随机矩阵是不可取的,本文选择 PDCT(将图像进行一维置乱,再转为二维图像进行离散余弦变换),从得到的变换系数中选择一定数量的数值作为观测值  $y$ 。

压缩感知的重构主要就是利用图像变换系数的稀疏性来进行的,需要找到最稀疏的变换系数。矩阵的稀疏性可以用其  $l_0$  表示,但是对  $l_0$  问题的求解并不易得到,因而可以将其转为  $l_1$  问题:

$$\min \|\alpha\|_0 \rightarrow \min \|\alpha\|_1 \quad (1)$$

s. t.  $y = \Phi s$

其中,  $\alpha$  是图像的变换系数,用  $\alpha = \Psi s$  表示。对于式(1)所述优化问题,通常情况下考虑:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \Phi s\|_2^2 + \tau \|\alpha\|_1 \quad (2)$$

其中参数  $\tau$  为非负值,用于平衡式(2)中的前后两部分的比重。由于  $\alpha = \Psi s$ , 将  $s = \Psi^T \alpha$  代入式(2),得到:

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{2} \|y - \Phi \Psi^T \alpha\|_2^2 + \tau \|\alpha\|_1 \quad (3)$$

设  $A = \Phi \Psi^T$ ,  $x = \alpha$ , 则式(3)变为:

$$\hat{x} = \arg \min_x \frac{1}{2} \|y - Ax\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \quad (4)$$

## 2 针对稀疏表示的梯度追踪算法

GPSR 算法<sup>[15]</sup>首先将式(4)代表的问题转化为边界约束二次问题:

$$\min_{u,v} \frac{1}{2} \|y - A(u - v)\|_2^2 + \tau \mathbf{1}_n^T u + \tau \mathbf{1}_n^T v \quad (5)$$

s. t.  $u \geq 0, v \geq 0$

其中  $u, v$  分别表示  $x$  的正负两部分,即:

$$x = u - v; u \geq 0, v \geq 0 \quad (6)$$

则  $u_{i,j} = (x_{i,j})_+ = \max(0, x_{i,j})$ ,  $v_{i,j} = (-x_{i,j})_+ = \max(0, -x_{i,j})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。由此得到  $\|x\|_1 = \mathbf{1}_n^T u + \mathbf{1}_n^T v$ , 其中  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ 。

将式(5)进一步整理写成标准的边界约束二次问题形式:

$$\min_z c^T z + \frac{1}{2} z^T B z = F(z) \quad (7)$$

s. t.  $z \geq 0$

其中:  $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ,  $b = A^T y$ ,  $c = \tau \mathbf{1}_{2n} + \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} A^T A & -A^T A \\ -A^T A & A^T A \end{pmatrix}$ 。

对于给定的向量  $z = [u^T, v^T]^T$ , 存在:

$$Bz = B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A(u - v) \\ -A^T A(u - v) \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式(7)可得函数  $F(z)$  的梯度:

$$\nabla F(z) = c + Bz \quad (9)$$

式(9)又可以表示为  $\nabla F(z) = (\nabla u, \nabla v)^T$ , 根据式(5)可以得到:

$$\begin{cases} \nabla u = -A^T(y - Ax) + \tau \\ \nabla v = A^T(y - Ax) + \tau \end{cases} \quad (10)$$

梯度投影算法的主要步骤:

$$w^{(k)} = \left( z^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla F(z^{(k)}) \right)_+ \quad (11)$$

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \lambda^{(k)} (w^{(k)} - z^{(k)}) \quad (12)$$

进一步推导,将其转化为以  $u, v$  作变量的形式:

$$w^{(k)} = \begin{bmatrix} w_u^{(k)} \\ w_v^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( u^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla u^{(k)} \right)_+ \\ \left( v^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla v^{(k)} \right)_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(0, u^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla u^{(k)}) \\ \max(0, v^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla v^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$z^{(k+1)} = \begin{bmatrix} u^{(k+1)} \\ v^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(k)} + \lambda^{(k)} (w_u^{(k)} - u^{(k)}) \\ v^{(k)} + \lambda^{(k)} (w_v^{(k)} - v^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

GPSR-Basic 算法对应的是  $\lambda^{(k)} = 1$ , 此时式(12)变为:

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \lambda^{(k)} (w^{(k)} - z^{(k)}) = w^{(k)} \quad (15)$$

在 GPSR-Basic, 标量参数  $\alpha^{(k)}$  的初始值<sup>[8]</sup>设为:

$$\alpha_0 = \frac{(g^{(k)})^T g^{(k)}}{(g^{(k)})^T B g^{(k)}} \quad (16)$$

其中向量  $g^{(k)}$  具体表示为:

$$\mathbf{g}_i^{(k)} = \begin{cases} (\nabla F(\mathbf{z}^{(k)}))_i, & z_i^{(k)} > 0 \text{ 或 } (\nabla F(\mathbf{z}^{(k)}))_i < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (17)$$

GPSR-Basic 的具体步骤为:

1) 初始化: 设  $\mathbf{x}^{(0)}$  初始值为 0, 根据式 (6) 得到  $\mathbf{u}^{(0)}$  与  $\mathbf{v}^{(0)}$ , 并且由式 (5) 计算目标函数  $f^{(0)}$ 。

2) 根据式 (10) 计算得到  $\nabla \mathbf{u}^{(k)}$  与  $\nabla \mathbf{v}^{(k)}$ , 进而得到  $\nabla \mathbf{x}^{(k)} = \nabla \mathbf{u}^{(k)} - \nabla \mathbf{v}^{(k)}$ 。

3) 确定标量参数  $\alpha_0$ : 设  $\mathbf{g}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_u^{(k)} \\ \mathbf{g}_v^{(k)} \end{bmatrix}$ , 根据式 (16) 进一步推导出:  $\alpha_0 = \frac{\langle \mathbf{g}_u^{(k)}, \mathbf{g}_u^{(k)} \rangle + \langle \mathbf{g}_v^{(k)}, \mathbf{g}_v^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{A}(\mathbf{g}_u^{(k)} - \mathbf{g}_v^{(k)}), \mathbf{A}(\mathbf{g}_u^{(k)} - \mathbf{g}_v^{(k)}) \rangle}$ , 其中  $\mathbf{g}_u^{(k)}$  与  $\mathbf{g}_v^{(k)}$  可根据式 (17) 得到。

4)  $\alpha^{(k)} = \alpha_0$ 。

5) 根据式 (13)、(14) 得到  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  与  $\mathbf{v}^{(k+1)}$ , 从而得到  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k+1)}$ , 计算  $f(\mathbf{x}^{(k+1)})$ 。

6) 判断下式是否成立:

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(k)}) + \mu (\nabla \mathbf{u}^T \mathbf{w}_u^{(k)} + \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{w}_v^{(k)})$$

如果成立, 进入下一步; 否则  $\alpha^{(k)} = \beta \alpha^{(k)}$ , 返回步骤 5),  $\beta \in (0, 1)$ 。

7) 判断是否停止迭代: 根据目标函数的变化情况进行判断, 即:  $|f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)})| / f(\mathbf{x}^{(k)}) < \delta$  是否成立, 成立终止迭代, 否则返回步骤 2) 继续进行。

GPSR-Basic 与文献 [14] 中考虑 Barzilai-Borwein 梯度策略的算法 GPSR-BB 的不同之处在于标量参数  $\alpha^{(k)}$  与  $\lambda^k$  的设置, 后者的参数设定如下:

$$\lambda^k = \text{mid} \left\{ 0, \frac{(\delta^{(k)})^T \nabla F(\mathbf{z}^{(k)})}{(\delta^{(k)})^T \mathbf{B} \delta^{(k)}}, 1 \right\} \quad (18)$$

$$\alpha^{(k+1)} = \text{mid} \left\{ \alpha_{\min}, \frac{\|\delta^{(k)}\|_2^2}{(\delta^{(k)})^T \mathbf{B} \delta^{(k)}}, \alpha_{\max} \right\} \quad (19)$$

其中:  $\delta^{(k)} = (\mathbf{z}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla F(\mathbf{z}^{(k)}))_+ - \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{z}^{(k)}$ 。

### 3 图像重构的实现

本文压缩传感系统是利用图像在双树复数小波变换域的稀疏性, 并结合 GPSR 算法实现图像重构。

DT CWT 是利用四个普通的离散正交小波实现的, 其变换系数包括四个支路, 分别对应实部和虚部两部分, 每一部分又分为上下两个支路。DT CWT 克服了正交小波的缺点, 具

有近似的平移不变性和良好的方向选择性。如图 1(a) 所示, DT CWT 具有 6 个方向 ( $\pm 15^\circ, \pm 45^\circ, \pm 75^\circ$ ), 而普通的正交小波只具有 3 个方向 ( $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ ), 如图 1(b) 所示。由图 1 可以看出, 和普通正交小波相比, DT CWT 不具有振荡特性。

在基于压缩感知的图像重构系统中, 首先利用 PDCT 得到观测值  $\mathbf{y}$ , 然后利用 GPSR 算法得到式 (4) 中的最优解  $\hat{\alpha}$ 。对于图像  $\mathbf{x}$ , 根据图像大小  $N$  进行一维置乱后, 再将其还原为 2D 图像, 进行离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT), 再从此系数中选择  $M$  个元素作为观测值  $\mathbf{y}$ , 此时  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{s}$  ( $\Phi$  代表 PDCT)。在实验中设定必要的参数:  $\mathbf{A} = \Phi \Psi$ ,  $\mathbf{A}^T = \Psi^T \Phi^T$ , 其中:  $\Psi$  表示 DT CWT,  $\Phi^T$  表示 IPDCT,  $\Psi^T$  表示 DT CWT 的反变换; 根据 GPSR 算法设定式 (5) 中的参数  $\tau$ , 以及迭代终止值  $\delta$ ; 按照 GPSR 算法的具体步骤完成变换系数的重构, 得到  $\hat{\alpha}$ ; 最后利用逆变换得到重构图像  $\hat{\mathbf{x}} = \Psi^T \hat{\alpha}$ 。

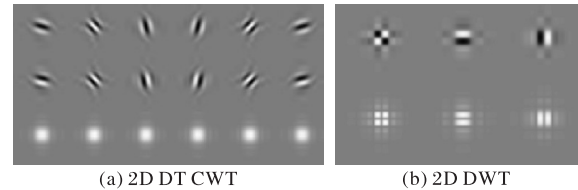


图 1 2D DT CWT 和 2D DWT 的方向小波及振幅变化  
Fig. 1 Directional wavelet and amplitude variation of 2D DT CWT and 2D DWT

### 4 实验比较与分析

本文利用三幅大小为  $512 \times 512$  的灰度图像完成相关实验, 如图 2 所示。

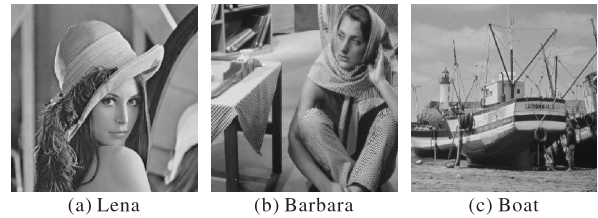


图 2 实验灰度图像原图

Fig. 2 Original grayscale images used in experiments

首先比较不同小波基下, 采用 GPSR-Basic 和 GPSR-BB 两种重构算法的差异。在实现过程中,  $\tau=2.0$ , 迭代终止条件为  $\delta=10^{-3}$ , 小波基包括 DT CWT 和 JPEG2000 中使用的小波基 CDF 9/7 (双正交小波)。表 1 给出了 3 幅图像在不同采样率 ( $M/N$ ) 下, 利用不同小波基得到的峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)。

表 1 不同采样率下利用 GPSR-Basic 和 GPSR-BB 在 DT CWT 和 CDF 9/7 小波基下重构图像的 PSNR 对比

单位: dB

Tab. 1 PSNR comparison of images reconstructed by GPSR-Basic and GPSR-BB based on DT CWT and CDF 9/7 with different sampling ratios

unit: dB

| M/N | Lena(512×512) |        |           |        | Barbara(512×512) |        |           |        | Boat(512×512) |        |           |        |
|-----|---------------|--------|-----------|--------|------------------|--------|-----------|--------|---------------|--------|-----------|--------|
|     | 9/7+Basic     | 9/7+BB | CWT+Basic | CWT+BB | 9/7+Basic        | 9/7+BB | CWT+Basic | CWT+BB | 9/7+Basic     | 9/7+BB | CWT+Basic | CWT+BB |
| 0.1 | 24.11         | 23.96  | 26.02     | 25.79  | 20.34            | 19.66  | 21.60     | 21.49  | 21.60         | 21.28  | 23.83     | 23.26  |
| 0.2 | 28.06         | 27.81  | 29.78     | 29.57  | 22.64            | 22.42  | 24.17     | 24.18  | 25.72         | 24.83  | 26.84     | 26.68  |
| 0.3 | 30.82         | 30.76  | 32.45     | 32.35  | 25.09            | 24.65  | 27.08     | 26.93  | 27.84         | 27.87  | 29.39     | 29.44  |
| 0.4 | 33.00         | 33.04  | 34.26     | 34.33  | 26.85            | 26.80  | 29.55     | 29.58  | 30.41         | 30.15  | 31.78     | 31.74  |
| 0.5 | 35.20         | 35.11  | 36.01     | 35.87  | 29.59            | 29.46  | 32.34     | 32.17  | 32.62         | 32.71  | 33.94     | 33.90  |



由表1可以看出,对于给定的采样率(0.1~0.5),利用GPSR-Basic算法实现重构的图像的PSNR值在多数情况下大于GPSR-BB实现的图像的PSNR值,但是差值小于1 dB,从视觉上不能直观分辨。在同一种重构算法下,采用DT CWT小波基得到的重构结果均优于CDF。从PSNR上来看,Lena和Boat图像差值在1.5 dB左右,Barbara图像的差值是2 dB左右。图3是Lena图像在采样率 $M/N=0.2$ 时,在不同小波基表示下,利用GPSR-Basic重构的结果及其局部放大图像,并将其与原始图像进行了比较。重构后的图像与原始图像相比,PSNR在数值上相差1.72 dB,图3中有肉眼可见的改善,由局部细节可以看出利用DT CWT小波基重构的图像比较清晰,噪点明显减少。从表1中的PSNR数值来看,Lena和Boat图像差值在1.5 dB左右,Barbara图像的差值是2 dB左右。由图2的原始图中可以看出,Barbara图像中含有较多的纹理区域,对小波的方向性要求较高,最终的实验结果也表明DT CWT小波基在方向选择性和细节上优于CDF 9/7小波基。



图3 原始图像与DT CWT、CDF 9/7重构图像的比较( $M/N=0.2$ )

Fig. 3 Comparison of original image and images reconstructed by DT CWT and CDF 9/7 ( $M/N=0.2$ )

本文在选择DT CWT小波基的基础上,将GPSR算法与迭代阈值收缩(Iteration Shrinkage Threshold, IST)方法进行了比较,图4是对Lena图像利用三种方法实现重构时目标函数随时间的变化情况。随机投影部分选择的是PDCT,目标函数中的参数 $\tau=2.0$ ,迭代终止条件为 $\delta=10^{-3}$ ,采样率为0.2。从运行时间和收敛情况上看,初始阶段IST的下降速度比GPSR-Basic略快,但是后续收敛变慢,达到终止的用时最久;GPSR-BB的收敛速度最快,达到终止条件用时最少。

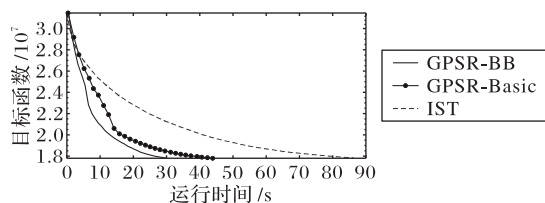


图4 不同重构算法下目标函数的变化

Fig. 4 Changes of objective function with different reconstruction algorithms

利用结构随机矩阵(Structurally Random Matrices, SRM)<sup>[18]</sup>对信号 $\mathbf{x}$ 的处理过程可定义为 $\mathbf{y}=\mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})$ ,其中: $\mathbf{P}$ 表示对原始信号进行随机投影,可以随机置乱信号次序或者将信号符号随机置乱; $\mathbf{F}$ 表示正交变换矩阵,可选择快速傅里叶变换、离散余弦变换或沃尔什哈达玛变换,为了与前文的PDCT相比较,本文选择的是DCT; $\mathbf{D}$ 表示根据采样率随机抽取数据,最终得到观测值 $\mathbf{y}$ 。

表2给出了SRM和PDCT两种不同观测矩阵,在CDF9/7

和DT CWT两种小波基下,利用GPSR-BB对Lena图像重构结果的PSNR。由表2可以看出,在CDF 9/7和DT CWT小波基下,利用PDCT的结果均优于SRM;同一种随机观测矩阵下,DT CWT的结果优于CDF 9/7。

表2 不同随机投影方式的重构结果的PSNR 单位:dB

Tab. 2 PSNR of reconstructed results of

different random projection methods

unit: dB

| 采样率 | CWT+SRM | CWT+PDCT | CDF+SRM | CDF+PDCT |
|-----|---------|----------|---------|----------|
| 0.1 | 25.80   | 25.79    | 23.39   | 23.96    |
| 0.2 | 29.00   | 29.57    | 27.16   | 27.81    |
| 0.3 | 31.35   | 32.35    | 29.82   | 30.76    |
| 0.4 | 33.34   | 34.33    | 32.00   | 33.04    |
| 0.5 | 35.05   | 35.87    | 33.88   | 35.11    |

## 5 结语

本文利用图像在DT CWT小波域的稀疏性,通过GPSR算法实现了图像重构。实验在同一重构方法前提下比较了不同的稀疏表示域的PSNR值,结果表明2D DT CWT相比双正交小波(CDF 9/7)在重构细节上具有一定的优势,特别是在纹理较多的图像上优势明显;PDCT的随机投影方式较SRM也有提升;并且GPSR的两种重构算法与IST相比在收敛速度上提升明显。虽然DT CWT在重构结果上有明显的提升,但由于其方向小波数量较多,重构的速度较之CDF 9/7有所降低。对图像的稀疏表示仍在进一步研究中,可以考虑将其应用到模式表示的其他领域。

## 参考文献(References)

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] 彭向东,张华,刘继忠. 基于过完备字典的体域网压缩感知心电图重构[J]. 自动化学报, 2014, 40(7): 1421-1432. (PENG X D, ZHANG H, LIU J Z. ECG reconstruction of body sensor network using compressed sensing based on overcomplete dictionary [J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(7): 1421-1432.)
- [3] WEI J, HUANG Y, LU K, et al. Nonlocal low-rank-based compressed sensing for remote sensing image reconstruction [J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2016, 13(10): 1557-1561.
- [4] 杨学峰,程耀瑜,王高. 基于小波域压缩感知的遥感图像超分辨率算法[J]. 计算机应用, 2017, 37(5): 1430-1433, 1444. (YANG X F, CHENG Y Y, WANG G. Super-resolution algorithm for remote sensing images based on compressive sensing in wavelet domain [J]. Journal of Computer Applications, 2017, 37(5): 1430-1433, 1444.)
- [5] 宋子晖,李卓,陈昕. 基于压缩感知的移动群智感知任务分发机制[J]. 计算机应用, 2019, 39(1): 21-27. (SONG Z H, LI Z, CHEN X. Mobile crowdsensing task distribution mechanism based on compressed sensing [J]. Journal of Computer Applications, 2019, 39(1): 15-21.)
- [6] 和志杰,杨春玲,汤瑞东. 视频压缩感知中基于结构相似的帧间组稀疏表示重构算法研究[J]. 电子学报, 2018, 46(3): 544-553. (HE Z J, YANG C L, TANG R D. Research on structural

- similarity based inter-frame group sparse representation for compressed video sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(3): 544-553. )
- [7] 沈燕飞,李锦涛,朱珍民,等. 基于非局部相似模型的压缩感知图像恢复算法[J]. *自动化学报*, 2015, 41(2): 261-272. (SHEN Y F, LI J T, ZHU Z M, et al. Image reconstruction algorithm of compressed sensing based on nonlocal similarity model[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(2): 261-272. )
- [8] 任越美,张艳宁,李映. 压缩感知及其图像处理应用研究进展与展望[J]. *自动化学报*, 2014, 40(8): 1563-1575. (REN Y M, ZHANG Y N, LI Y. Advances and perspective on compressed sensing and application on image processing[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2014, 40(8): 1563-1575. )
- [9] 刘芳,武娇,杨淑媛,等. 结构化压缩感知研究进展[J]. *自动化学报*, 2013, 39(12): 1980-1995. (LIU F, WU J, YANG S Y, et al. Research advances on structured compressive sensing[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(12): 1980-1995. )
- [10] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129-159.
- [11] DAUBECHIES I, DEFRISE M, MOL C D. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, 57(11): 1413-1457.
- [12] TROPP J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [13] CANDÈS E J, ROMBERG J K, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [14] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586-597.
- [15] KINGSBURY N. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement [C]// *Proceedings of the 9th European Signal Processing Conference*. Piscataway: IEEE, 1998: 1-4.
- [16] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.
- [17] CANDÈS E J, TAO T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [18] DO T T, GAN L, NGUYEN N H, et al. Fast and efficient compressive sensing using structurally random matrices [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(1): 139-154.

This work is partially supported by the Science and Technology Research Project of Hebei Higher Education (QN2017411), the Self-financing Project of Key Research and Development Plan in Hebei Province (18210910).

**GAO Yanyan**, born in 1984, Ph. D., lecturer. Her research interests include image processing, pattern recognition.

**LI Li**, born in 1979, Ph. D., associate professor. Her research interests include signal processing, intelligent information processing.

**ZHANG Jing**, born in 1981, M. S., lecturer. Her research interests include image processing, signal processing.

**JIA Yingqian**, born in 1976, Ph. D., associate professor. Her research interests include signal processing, microelectronics.