中国科学 : 数学　2012 年　第 42 卷　第 4 期 : 279 ～ 294
www.springerlink.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一类量子 Koszul 代数的 Hochschild 上同调

章超①②，徐运阁①*

① 湖北大学数学与计算机科学学院数学系, 武汉 430062;
② 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190
E-mail: zhangchao198658@yahoo.com.cn, xuy@hubu.edu.cn

收稿日期: 2011-05-31; 接受日期: 2012-02-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10971206, 11171325) 与湖北省教育厅重点基金 (批准号: D20101003) 资助项目

摘要　本文利用组合的方法, 详细地计算了一类量子 Koszul 代数 $\Lambda_q\,(q\in k\setminus\{0\})$ 的各阶 Hochschild 上同调空间的维数, 清晰地刻划了代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调的 cup 积, 确定了代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调环 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 模去幂零元生成的理想 $\mathcal{N}$ 的结构, 证明了当 q 为单位根时, $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的, 从而为 Snashall-Solberg 猜想 (即 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}$ 作为代数是有限生成的) 提供了更多反例.

关键词　Koszul 代数　Hochschild 上同调　cup 积　Snashall-Solberg 猜想
MSC (2010) 主题分类　16E40, 16E10, 16G10

1　引言

令 k 是一个域, Λ 是一个有限维含幺结合 k- 代数. 记 $\Lambda^e=\Lambda\otimes_k\Lambda^{\mathrm{op}}$, 代数 Λ 的第 n 阶 Hochschild 上同调群定义为

$$\mathrm{HH}^n(\Lambda):=\mathrm{HH}^n(\Lambda,\Lambda)=\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda,\Lambda).$$

它在有限维代数的表示理论中起着十分重要的作用, 例如, Hochschild 上同调群与代数的单连通性、可分性及形变理论有重要联系 [1–3]. Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{HH}^n(\Lambda)$ 在 cup 积 (或 Yoneda 积) [4]

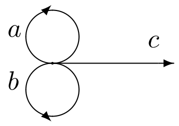
$$\sqcup:\mathrm{HH}^n(\Lambda)\times\mathrm{HH}^m(\Lambda)\to\mathrm{HH}^{n+m}(\Lambda)$$

下成为分次交换代数, 即对任意的齐次元 $\eta\in\mathrm{HH}^m(\Lambda)$, $\theta\in\mathrm{HH}^n(\Lambda)$, $\eta\sqcup\theta=(-1)^{mn}\theta\sqcup\eta$. 因而当 $\mathrm{char}k\neq 2$ 时, $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 中的奇数次齐次元的平方 (关于 cup 积) 必然为零. 若令 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 中由齐次幂零元生成的 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 的理想, 则当 $\mathrm{char}k\neq 2$ 时, 对任意 $i\geqslant 0$, $\mathrm{HH}^{2i+1}(\Lambda)\subseteq\mathcal{N}$; 故 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}$ 总是交换 k- 代数. 注意到 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 的分次交换性蕴含着 $\mathcal{N}$ 包含在 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 的任一极大理想中, 所以它们有相同的极大谱, 即 $\mathrm{MaxSpecHH}^*(\Lambda)=\mathrm{MaxSpecHH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}$. 基于此, Snashall 和 Solberg 在文献 [5] 中对有限维 k- 代数上的有限生成模 M 引入了支撑簇 (support variety)

$$V_{HH^*(\Lambda)}(M)=\{\mathrm{m}\in\mathrm{MaxSpecHH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}\mid \mathrm{Ann}_{HH^*(\Lambda)}\mathrm{Ext}^*_\Lambda(M,M)\subseteq\mathrm{m}'\},$$

英文引用格式: Zhang C, Xu Y G. Hochschild cohomology of a class of quantized Koszul algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(4): 279–294, doi: 10.1360/012011-397

其中 m' 是 m 在 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$ 中的原象, 并猜想对任意的有限维 k- 代数 Λ, $\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}$ 作为代数总是有限生成的 (而 $\mathrm{HH}^*(\Lambda)/\mathcal{N}$ 的有限性条件在支撑簇理论的研究中扮演者着重要的角色). 此猜想被证明对很多代数类都是成立的, 例如, 整体维数有限的有限维代数 [1], 代数闭域上的有限表示型的有限维自入射代数 [6], 有限维零关系代数 [7,8] 等等. 然而, Xu 在文献 [9] 中构造了一个七维的 Koszul 代数 $\Lambda_{-1} = kQ/I_{-1}$, 其中 Q 与 I_{-1} 分别为



$$, \quad I_{-1} = \langle a^2, b^2, ab - ba, ac\rangle,$$

并计算了在 $\mathrm{char}k = 2$ 情形下的 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1})/\mathcal{N}$, 得到 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1})/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的, 从而给出了此猜想的一个反例. 近一步地, Snashall 在文献 [10] 中详细地研究了此代数在任意特征基域上的 Hochschild 上同调环, 通过计算代数 Λ_{-1} 的 Koszul 对偶 $E(\Lambda_{-1})$ 的分次中心 $Z_{gr}(E(\Lambda_{-1}))$, 利用环同态 $\Lambda_{-1}/\mathrm{r} \otimes_{\Lambda_{-1}} - : \mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1}) \to E(\Lambda_{-1})$ 所诱导的同构 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1})/\mathcal{N} \cong Z_{gr}(E(\Lambda_{-1}))/\mathcal{N}_{gr}$, 证明了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1})/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的, 其中 $\mathcal{N}_{gr}$ 为 $Z_{gr}(E(\Lambda_{-1}))$ 的齐次幂零元生成的理想, r 为代数 Λ_{-1} 的 Jacobson 根. 然而, 对此代数的 Hochschild 上同调环的结构却仍知之甚少. 而且, 尽管 Snashall-Solberg 猜想存在反例, 但探究 Snashall-Solberg 猜想成立的充要条件对支撑簇理论的研究仍是十分重要的.

本文主要研究上述代数的量子化代数 $\Lambda_q = kQ/I_q$ 的 Hochschild 上同调环, 其中箭图 Q 如上, $I_q = \langle a^2, b^2, ab + qba, ac\rangle$, $q \in k \setminus \{0\}$. 代数 Λ_q 可看作二元量子外代数 $\Gamma_q = k\langle a, b\rangle/\langle a^2, b^2, ab + qba\rangle$ 的单点余扩张, 而 Γ_q 是一类性质较为 "病态" 的代数, 为很多猜想提供了反例 [11−13], 如 Happel 猜想 (即对代数闭域上的有限维代数 Λ, 整体维数 $\mathrm{gl.dim}\Lambda < \infty$ 当且仅当 Hochschild 上同调维数 $\mathrm{hch.dim}\Lambda = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \dim \mathrm{HH}^i(\Lambda) = 0, i > n\} < \infty$) [1] 对代数 Γ_q (q 非零且非单位根时) 不成立, 但是 Γ_q 却不能为上述 Snashall-Solberg 猜想提供反例. 有趣的是, 本文通过探讨 Λ_q 的 Hochschild 上同调发现, Λ_q 作为 Γ_q 的单点余扩张, 对 Happel 猜想是成立的, 却为 Snashall-Solberg 猜想提供了反例.

Hochschild 上同调的 cup 积最初是利用代数 Λ 的标准 bar 分解定义的, Siegel 和 Witherspoon 在文献 [14] 中证明了 cup 积也可以利用代数的任意投射双模分解来定义. 利用这种方法, 许多类代数的 Hochschild 上同调的 cup 积都得到了清晰的描述, 例如, 根方零代数 [15], 外代数 [16], 截面箭图代数 [17], Fibonacci 代数 [18], 以及 Koszul 与 d-Koszul 代数 [19−21] 等等. 本文将利用代数 Λ_q 的极小投射双模分解来清晰地描述它的 Hochschild 上同调的 cup 积, 具体结构如下: 在第 2 节中, 我们构造了代数 $\Lambda_q = kQ/I_q$ 的极小投射双模分解, 用组合的方法清晰地计算了代数 Λ_q 的各阶 Hochschild 上同调空间的维数; 在第 3 节, 我们首先用平行路的语言, 证明了代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 的 cup 积本质上是平行路的毗连. 其次, 利用 cup 积确定了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的结构, 直接地证明了当 q 为单位根时 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的, 从而为 Snashall-Solberg 猜想提供了更多反例. 值得注意的是, 我们的计算不仅刻划了代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调环 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 以及 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的乘法结构, 也揭示了当 q 为单位根时 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的根本原因在于平行路 (g_0^n, e_1) 不是 n 阶上循环 (n-cocycle), 详见注 3.7.

2 代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调群

本节的主要目的是研究 Koszul 代数 $\Lambda_q = kQ/I_q$ 的 Hochschild 上同调群. 首先, 我们基于 Green

等人在文献 [22] 中对 Koszul 代数的极小投射双模分解的细致分析, 构造了代数 $\Lambda_q = kQ/I_q$ 的极小投射双模分解 $(\mathbb{P}, d)$. 其次, 我们利用组合的方法, 计算了代数 Λ_q 的各阶 Hochschild 上同调空间的维数.

令 $e_1 < e_2 < a < b < c$, 则长度 - 左字典序给出了集合 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, a, b, c, ba, bc\}$ 的一个允许 (admissible) 序, 且集合 $R = \{a^2, b^2, ab + qba, ac\}$ 构成了理想 $I_q = \langle a^2, b^2, ab + qba, ac\rangle$ 的一个非交换的二次约化 Gröbner 基 [23], 所以代数 Λ_q 是一个 Koszul 代数 [24], 也参见文献 [10].

我们不难将 Snashall 在文献 [10] 中构造的 Λ_{-1} 的极小投射双模分解推广到代数 Λ_q 上. 令

$$
\begin{aligned}
&g^0 = \{g_0^0 = e_1, g_1^0 = e_2\},\\
&g^1 = \{g_0^1 = a, g_1^1 = b, g_2^1 = c\},\\
&g^2 = \{g_0^2 = a^2, g_1^2 = ab + qba, g_2^2 = b^2, g_3^2 = ac\}.
\end{aligned}
$$

当 $n \geqslant 3$ 时,

$$
\begin{aligned}
&g_r^n = ag_r^{n-1} + q^{n-r}bg_{r-1}^{n-1}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,\\
&g_n^n = bg_{n-1}^{n-1}, \quad g_{n+1}^n = ag_n^{n-1} = a^{n-1}c,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

其中 $g_{-1}^n = 0$. 不难验证, 对任意的 $n \geqslant 1$,

$$
g_r^n = g_{r-1}^{n-1}b + q^r g_r^{n-1}a, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1, \quad g_n^n = g_{n-1}^{n-1}b, \quad g_{n+1}^n = g_0^{n-1}c. \tag{2.2}
$$

记 $\otimes := \otimes_E$, 其中 $E = \Lambda_q/\mathrm{r}$, r 为 Λ_q 的 Jacobson 根. 令 $P_n = \Lambda_q \otimes kg^n \otimes \Lambda_q, n \geqslant 0, \widetilde{g}_r^n = 1 \otimes g_r^n \otimes 1$. 定义 $d_n : P_n \to P_{n-1}$, $d_1(c) = -\widetilde{e_1}c + c\widetilde{e_2}$; 当 $n \geqslant 2$ 时,

$$
\begin{aligned}
&d_n(\widetilde{g}_r^n) = a\widetilde{g}_r^{n-1} + q^{n-r}b\widetilde{g}_{r-1}^{n-1} + (-1)^n\widetilde{g}_{r-1}^{n-1}b + (-1)^n q^r \widetilde{g}_r^{n-1}a, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,\\
&d_n(\widetilde{g}_n^n) = b\widetilde{g}_{n-1}^{n-1} + (-1)^n\widetilde{g}_{n-1}^{n-1}b,\\
&d_n(\widetilde{g}_{n+1}^n) = (-1)^n\widetilde{g}_0^{n-1}c + a\widetilde{g}_n^{n-1}.
\end{aligned}
$$

定理 2.1 复形 $(\mathbb{P}, d)$

$$
\cdots \longrightarrow P_{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} P_m \xrightarrow{d_m} \cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0
$$

是代数 Λ_q 的极小投射双模分解.

证明 设 $X = k\{a, b, c\}$. 由于代数 Λ_q 是 Koszul 代数, 由文献 [25], 只需证明集合 g^n 是 k- 向量空间 $K_n := \bigcap_{s+t=n-2} X^s R X^t$ 的一组 k- 基. 其中 $R = k\{a^2, b^2, ab + qba, ac\}, n \geqslant 2$.

我们首先归纳地证明 $g^n \subseteq K_n$. 当 $n = 2$ 时显然成立. 假设对 $n-1$ 成立, 我们证明 n 的情形. 由归纳假设及公式 (2.1)、(2.2) 知, $g_i^n \in XK_{n-1} \cap K_{n-1}X$, 从而 $g^n \subseteq X^{n-2}R \cap RX^{n-2}$, 故 $g^n \subseteq X^{n-2}R \cap RX^{n-2} \cap XK_{n-1} \cap K_{n-1}X = K_n$.

其次, 由于集合 g^n 的元素是齐次多项式且 $g_i^n\,(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ 中 b, c 个数互不相同, 故集合 g^n 是 k- 线性无关的, 而且, Λ_q 的 Koszul 对偶 $E(\Lambda_q)$ 同构于它的二次对偶 $\Lambda_q^! = kQ^{\mathrm{op}}/I^{\perp}$, 其中 $I^{\perp} = \langle a^o b^o - q^{-1} b^o a^o, b^o c^o\rangle$. 因此 Λ_q 的极小投射双模分解的 Betti 数为 $\{b_n = n+2\}_{n \geqslant 0}$, 故 $\dim_k K_n = n+2$, 所以集合 g^n 是 k- 向量空间 K_n 的一组 k- 基.

微分 d_* 由文献 [22, 25] 得到. 故复形 $(\mathbb{P}, d)$ 是代数 Λ_q 的极小投射双模分解. □

下面我们计算这类 Koszul 代数的各阶 Hochschild 上同调空间的维数. 我们需要介绍一些记号. 称 $\alpha \in kQ$ 是一致元, 若存在 $u, v \in Q_0$, 使得 $\alpha = u\alpha v$, 并称 u, v 为 α 的起点与终点. 称 $\alpha, \beta \in kQ$ 平行, 如果它们有相同的起点与终点, 记为 $\alpha//\beta$. 如果 X 和 Y 都是由 kQ 中的一致元素组成的集合, 则定义 $X//Y := \{(p, q) \in X \times Y \mid p//q\}$, 并且 $k(X//Y)$ 表示以集合 $X//Y$ 为基的 k- 向量空间. 参见文献 [26].

对 Λ_q 的极小投射双模分解 $\mathbb{P}$ 作用函子 $\mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(-, \Lambda_q)$, 我们可以得到上链复形 $C^*(\mathbb{P})$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(P_0, \Lambda_q) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^n} \mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(P_n, \Lambda_q) \xrightarrow{d^{n+1}} \mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(P_{n+1}, \Lambda_q) \xrightarrow{d^{n+2}} \cdots,$$

其中 $d^i := \mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(d_i, \Lambda_q),\ i = 1, 2, \ldots$

引理 2.2 [26] 设 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, a, b, c, ba, bc\}$, 则

(1) $\mathcal{B}$ 为代数 Λ_q 作为 k- 向量空间的一组 k- 基.

(2) 作为 k- 向量空间, $k(g^n//\mathcal{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(P_n, \Lambda_q)$, 且对应的同构映射为 $\phi : (g_i^n, x) \mapsto \zeta_{(g_i^n, x)}$, 其中 $x \in \mathcal{B}$, $\zeta_{(g_i^n, x)}(1 \otimes g_j^n \otimes 1) = \delta_{ij}x$, 这里 δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

(3) 上链复形 $(C^*(\mathbb{P}), d^*)$ 同构于复形 $(M^\bullet, \delta^\bullet)$, 其中 $M^n = k(g^n//\mathcal{B})$,

$$\delta^1(e_1, x) = (a, ax) + (b, bx) - (a, xa) - (b, xb) - (c, xc), \quad \delta^1(e_2, x) = (c, cx).$$

当 $n \geqslant 2$ 时,

$$\delta^n(g_r^{n-1}, x) = \begin{cases} (g_0^n, ax) + q^{n-1}(g_1^n, bx) + (-1)^n(g_0^n, xa) & \\ \quad +(-1)^n(g_1^n, xb) + (-1)^n(g_{n+1}^n, xc), & \text{若 } r = 0, \\ (g_r^n, ax) + q^{n-r-1}(g_{r+1}^n, bx) + (-1)^n q^r(g_r^n, xa) + (-1)^n(g_{r+1}^n, xb), & \text{若 } 1 \leqslant r \leqslant n-1, \\ (g_{n+1}^n, ax), & \text{若 } r = n. \end{cases}$$

由上述引理, 我们可以将复形 $C^*(\mathbb{P})$ 转化为如下的复形 $(M^\bullet, \delta^\bullet)$:

$$0 \to k(g^0//\mathcal{B}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \xrightarrow{\delta^n} k(g^n//\mathcal{B}) \xrightarrow{\delta^{n+1}} k(g^{n+1}//\mathcal{B}) \xrightarrow{\delta^{n+2}} \cdots,$$

由定义, $\mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \mathrm{Ker}\delta^{n+1}/\mathrm{Im}\delta^n$, 所以

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \dim_k \mathrm{Ker}\delta^{n+1} - \dim_k \mathrm{Im}\delta^n = \dim_k M^n - \dim_k \mathrm{Im}\delta^{n+1} - \dim_k \mathrm{Im}\delta^n.$$

由于集合 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, a, b, c, ba, bc\}$ 构成 Λ_q 的一组 k- 基, 因此当 $n = 0$ 时, 集合 $\{(g_0^0, e_1), (g_0^0, a), (g_0^0, b), (g_0^0, ba), (g_1^0, e_2)\}$ 构成 M^0 的一组 k- 基; 当 $n \geqslant 1$ 时, 集合 $\{(g_i^n, e_1), (g_i^n, a), (g_i^n, b), (g_i^n, ba), (g_{n+1}^n, c), (g_{n+1}^n, bc) \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 构成向量空间 M^n 的一组 k- 基, 则 $\dim_k M^0 = 5$, $\dim_k M^n = \dim_k k(g^n//\mathcal{B}) = 4n + 6, n \geqslant 1$. 因此为了计算代数 Λ_q 的各阶 Hochschild 上同调群的维数, 只需确定 $\dim_k \mathrm{Im}\delta^n$.

我们对集合 $g^n//\mathcal{B}$ 定义一个序: $(g_i^n, x) < (g_j^n, y)$ 当且仅当 $x < y$, 或者 $x = y$ 但 $i < j$, 其中 $\mathcal{B}$ 中的序为本节第二段中定义的长度 - 字典序. 则上述基构成线性空间 M^n 的一组定序基.

首先, 我们由引理 2.2(3) 确定 $\delta^n : M^{n-1} \to M^n$ 在上述定序基下对应的矩阵 A_n 如下:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-q & 0 \\ 0 & 0 & 1+q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{10\times 5}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \end{pmatrix}_{(4n+6)\times(4n+2)},$$

其中 C_1, C_2, D_1, D_2 都是 $(n+1)\times n$ 阶矩阵, C_3, D_3 都是 $1\times n$ 阶矩阵, 且

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \mathrm{diag}(v_0, \ldots, v_r, \ldots, v_{n-1}) \\ \hfill 0 \\ \hline 0 \hfill \\ \mathrm{diag}(u_0, \ldots, u_r, \ldots, u_{n-1}) \\ \hline (-1)^n \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array}\right),$$

其中, $v_r = 1 + (-1)^n q^r$, $u_r = q^{n-r-1} + (-1)^n$, $r = 0, 1, \ldots, n-1$.

而矩阵

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & & & & & & w_0 & & & & & \\ z_1 & & & & & & & w_1 & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \ddots & & & \\ & & z_r & & & & & & & w_r & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \ddots & \\ & & & & z_{n-1} & & & & & & & w_{n-1} \\ & & & & & z_n & & & & & & 0 \\ \hline & & & 0 & & & (-1)^n & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right),$$

其中

$$z_r = q^{n-r} + (-1)^{n+1} q, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \quad w_r = -q + (-1)^n q^r, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1.$$

显然, $\dim_k \mathrm{Im}\delta^n = \mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D)$, 而且

$$\dim_k \mathrm{Im}\delta^1 = \mathrm{rank}(A_1) = \begin{cases} 2, & \text{如果 } q = -1 \text{且 } \mathrm{char}k \neq 2, \text{ 或者 } q = 1 \text{且 } \mathrm{char}k = 2, \\ 3, & \text{其他.} \end{cases}$$

当 $n=2$ 时, 矩阵

$$C=\left(\begin{array}{cc} 1+1 & 0 \\ 0 & 1+q \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 1+q & 0 \\ 0 & 1+1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)_{7\times 2}, \quad D=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -q+1 & 0 \\ q-q & 0 & 0 & -q+q \\ 0 & 1-q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{4\times 4}.$$

因此

$$\operatorname{rank}(A_2)=\operatorname{rank}(C)+\operatorname{rank}(D)=\begin{cases} 3, & \text{如果 } q=1 \text{且 } \operatorname{char}k\neq 2, \\ 2, & \text{如果 } q=1 \text{且 } \operatorname{char}k=2, \\ 4, & \text{其他}. \end{cases}$$

引理 2.3 如果 q 是 $m\,(m>2)$ 次本原单位根, 且 $\operatorname{char}k\neq 2$, 当 $n>2$ 时,

$$\operatorname{rank}(A_n)=\begin{cases} 2n-t+1, & \text{如果 } n \text{ 为奇数, 且 } n=tm+1, \\ 2n-t, & \text{如果 } n \text{ 为偶数, 且 } n=tm+2, \\ 2n+1, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 首先考虑矩阵 C. 由于第一列恒不为零, 只需考虑 C 中的后面 $n-1$ 列. 第 $r+1$ 列 $(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 为零当且仅当

$$\begin{cases} v_r=1+(-1)^n q^r=0, \\ u_r=q^{n-r-1}+(-1)^n=0. \end{cases}$$

$1+(-1)^n q^r=0$ 当且仅当下列条件 (1) 或 (2) 之一成立, 其中

(1) n 为奇数且 $q^r=(-1)^{n+1}=1$, 即 n 为奇数且 $r=t_1 m$, $t_1>0$;

(2) n 为偶数且 $q^r=(-1)^{n+1}=-1$, 即 n,m 为偶数且 $r=m(2s_1+1)/2$, $s_1\geqslant 0$.

同样地, $q^{n-r-1}+(-1)^n=0$ 当且仅当下列条件 (3) 或 (4) 之一成立, 其中

(3) n 为奇数且 $q^{n-r-1}=(-1)^{n+1}=1$, 即 n 为奇数且 $n-r-1=t_2 m$, $t_2\geqslant 0$;

(4) n 为偶数且 $q^{n-r-1}=(-1)^{n+1}=-1$, 即 n,m 为偶数且 $n-r-1=m(2s_2+1)/2$, $s_2\geqslant 0$.

由于第 $r+1$ 列 $(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 为零当且仅当 $v_r=1+(-1)^n q^r=0$ 与 $u_r=q^{n-r-1}+(-1)^n=0$ 同时成立, 则条件 (1) 与 (3) 同时成立, 或者条件 (2) 与 (4) 成立. 若条件 (1) 与 (3) 同时成立, 当且仅当 n 为奇数, $r=t_1 m$ 且 $n-r-1=t_2 m$, 其中 $t_1>0$, $t_2\geqslant 0$, 即 $n-1=(t_1+t_2)m=tm$. 故当 n 为奇数, 且 $n=tm+1$ 时, $r=t_1 m$ 中的 t_1 可以取值 $1,2,\dots,t$ 且 $t_2=t-t_1$, 使得条件 (1) 与 (3) 同时成立. 因此当 n 为奇数, 且 $n=tm+1$ 时, 矩阵 C 中有 t 列为零, $\operatorname{rank}(C)=n-t$. 另一方面, 若条件 (2) 与 (4) 同时成立, 当且仅当 n,m 为偶数, $r=m(2s_1+1)/2$ 与 $n-r-1=m(2s_2+1)/2$ 同时成立, 则 $n-1=(2s_1+2s_2+2)m/2=(s_1+s_2+1)m$, 这与 n,m 同时为偶数矛盾, 故 n 为偶数时矩阵 C 中所有列不为零, $\operatorname{rank}(C)=n$.

下面考虑矩阵 D, 由于 D 中第 $n+1, n+2$ 行恒不为零, 所以只需考虑中间 $n-1$ 行. 第 $r+1$ 行 $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ 为零当且仅当

$$\begin{cases} z_r = q^{n-r} + (-1)^{n+1} q = 0, \\ w_r = -q + (-1)^n q^r = 0. \end{cases}$$

$z_r = q^{n-r} + (-1)^{n+1} q = 0$ 当且仅当 $q^{n-r-1} + (-1)^{n+1} = 0$, 当且仅当条件 $(1')$ 或 $(2')$ 成立, 其中

$(1')$ n 为奇数且 $q^{n-r-1} = (-1)^n = -1$, 即 n 为奇数, m 为偶数且 $n-r-1 = (2s_1+1)m/2$, $s_1 \geqslant 0$;

$(2')$ n 为偶数且 $q^{n-r-1} = (-1)^n = 1$, 即 n 为偶数且 $n-r-1 = t_1 m$, $t_1 \geqslant 0$.

同样地, $w_r = -q + (-1)^n q^r = 0$ 当且仅当 $-1 + (-1)^n q^{r-1} = 0$, 当且仅当条件 $(3')$ 或 $(4')$ 成立, 其中

$(3')$ n 为奇数且 $q^{r-1} = (-1)^n = -1$, 即 n 为奇数, m 为偶数且 $r-1 = (2s_2+1)m/2$, $s_2 \geqslant 0$;

$(4')$ n 为偶数且 $q^{r-1} = (-1)^n = 1$, 即 n 为偶数且 $r-1 = t_2 m$, $t_2 \geqslant 0$.

由于矩阵 D 中第 $r+1$ 行为零当且仅当 z_r 与 w_r 同时为零, 即条件 $(1')$ 与 $(3')$ 同时成立, 或者条件 $(2')$ 及 $(4')$ 同时成立. 若条件 $(1')$ 与 $(3')$ 同时成立, 当且仅当 n 为奇数, m 为偶数, $n-r-1 = (2s_1+1)m/2$ 且 $r-1 = (2s_2+1)m/2$, 则 $n-2 = (2s_1+1)m/2 + (2s_2+1)m/2 = (s_1+s_2+1)m$, 与 n 为奇数、m 为偶数矛盾, 即 $\mathrm{rank}(D) = n+1$. 另一方面, 若条件 $(2')$ 及 $(4')$ 同时成立, 当且仅当 n 为偶数, $n-r-1 = t_1 m$ 且 $r-1 = t_2 m$, 其中 $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, 则 $n-2 = (t_1+t_2)m$, 故如果 n 为偶数, 且 $n = tm+2$, 则等式 $n-r-1 = t_1 m$ 中的 t_1 可取值 $0, 1, \ldots, t$ 且 $t_2 = t - t_1$, 使得 z_r 与 w_r 同时为零, 即第 $r+1$ 行为零. 因此当 n 为偶数, 且 $n = tm+2$ 时, $\mathrm{rank}(D) = n-t$.

综合考虑矩阵 A_n 的秩, 当 n 为奇数, 且 $n = tm+1$ 时, $\mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D) = (n-t) + (n+1) = 2n-t+1$; 当 n 为偶数, 且 $n = tm+2$ 时, $\mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D) = n + (n-t) = 2n-t$; 当上述情况都不满足时, $\mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D) = n + (n+1) = 2n+1$. 引理得证. □

引理 2.4 若 q 不是 $m\,(m>2)$ 次单位根, 且 $\mathrm{char}k \neq 2$, 则当 $n>2$ 时,

$$\mathrm{rank}(A_n) = \begin{cases} n+1, & \text{如果 } q=1, n \text{ 为偶数}, \\ n+2, & \text{如果 } q=1, n \text{ 为奇数}, \\ 3n/2+1, & \text{如果 } q=-1, n \text{ 为偶数}, \\ (3n+1)/2, & \text{如果 } q=-1, n \text{ 为奇数}, \\ 2n+1, & \text{如果 } q \text{ 非单位根}. \end{cases}$$

证明 当 $q=1$ 时, 若 n 为偶数, 矩阵 C 中 $v_r = 1 + (-1)^n q^r = 2$ 且 $u_r = q^{n-r-1} + (-1)^n = 2$, 故 $\mathrm{rank}(C) = n$; 但矩阵 D 中 $z_r = q^{n-r} + (-1)^{n+1} q = 0$ 且 $w_r = -q + (-1)^n q^r = 0$, 因此 $\mathrm{rank}(D) = 1$, 所以 $\mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D) = n+1$. 同理, 若 n 为奇数, 由于矩阵 C 中的元素 $v_r = u_r = 0$, 则 $\mathrm{rank}(C) = 1$, 而且矩阵 D 中 $z_r = q^{n-r} + (-1)^{n+1} q = 2$, $w_r = -q + (-1)^n q^r = -2$, 则 $\mathrm{rank}(D) = n+1$. 因此 $\mathrm{rank}(A_n) = \mathrm{rank}(C) + \mathrm{rank}(D) = n+2$.

下面考虑 $q=-1$ 的情形. 对于矩阵 C, 第 $r+1$ 列 $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$ 为零当且仅当

$$\begin{cases} v_r = 1 + (-1)^{n+r} = 0, \\ u_r = (-1)^{n-r-1} + (-1)^n = 0. \end{cases}$$

如果两个条件同时满足, 则 $n+r$ 为奇数, 且 $(n-r-1)+n$ 为奇数, 即 n 为奇数, 且 r 为偶数. 因此当 n 为奇数时, $\mathrm{rank}(C)=n-(n-1)/2=(n+1)/2$; 当 n 为偶数时, $\mathrm{rank}(C)=n$.

对于矩阵 D, 第 $r+1$ 行 $(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 为零当且仅当

$$\begin{cases} z_r=(-1)^{n-r}+(-1)^{n+2}=0, \\ w_r=1+(-1)^{n+r}=0. \end{cases}$$

如果两个条件同时满足, 则 $(n-r)+(n+2)$ 为奇数, 且 $n+r$ 为奇数, 即 n 为偶数, r 为奇数. $z_n=1+(-1)^{(n+2)}=0$ 当且仅当 n 为奇数. 故当 n 为奇数时, $\mathrm{rank}(D)=n$; 当 n 为偶数时, $\mathrm{rank}(D)=n+1-n/2=n/2+1$.

因此, 当 $q=-1$ 时, 若 n 为奇数, $\mathrm{rank}(A_n)=\mathrm{rank}(C)+\mathrm{rank}(D)=(n+1)/2+n=(3n+1)/2$; 若 n 为偶数, $\mathrm{rank}(A_n)=\mathrm{rank}(C)+\mathrm{rank}(D)=n+(n/2+1)=3n/2+1$.

当 q 非单位根时, 矩阵 C 中的元素 $u_r,v_r\,(1\leqslant r\leqslant n-1)$ 均不为零, 同样地, 矩阵 D 中的元素 z_r,w_r 也都不为零, 故 $\mathrm{rank}(A_n)=\mathrm{rank}(C)+\mathrm{rank}(D)=n+(n+1)=2n+1$. 引理得证. □

类似地, 我们可以讨论在 $\mathrm{char}k=2$ 时矩阵 A_n 的秩.

引理 2.5 如果 q 是 $m\,(m>2)$ 次本原单位根, 且 $\mathrm{char}k=2$, 则当 $n>2$ 时,

$$\mathrm{rank}(A_n)=\begin{cases} 2n-t, & \text{如果 } n=tm+2, \\ 2n-t+1, & \text{如果 } n=tm+1, \\ 2n+1, & \text{其他}. \end{cases}$$

引理 2.6 如果 q 不是 $m\,(m>2)$ 次本原单位根, 且 $\mathrm{char}k=2$, 则当 $n>2$ 时,

$$\mathrm{rank}(A_n)=\begin{cases} 2, & \text{如果 } q=1, \\ 2n+1, & \text{其他}. \end{cases}$$

特别地, 由上述分析容易计算 $\dim_k\mathrm{HH}^n(\Lambda_q)\,(n=0,1,2)$:

$$\begin{aligned}
\dim_k\mathrm{HH}^0(\Lambda_q)&=\dim_kM^0-\mathrm{rank}(A_1)\\
&=\begin{cases} 3, & \text{如果 } q=-1 \text{且 } \mathrm{char}k\neq 2, \text{或者 } q=1 \text{且 } \mathrm{char}k=2, \\ 2, & \text{其他}. \end{cases}\\
\dim_k\mathrm{HH}^1(\Lambda_q)&=\dim_kM^1-\mathrm{rank}(A_2)-\mathrm{rank}(A_1)=10-\mathrm{rank}(A_2)-\mathrm{rank}(A_1)\\
&=\begin{cases} 6, & \text{如果 } q=1 \text{ 且 } \mathrm{char}k=2, \\ 4, & \text{如果 } q=\pm1 \text{ 且 } \mathrm{char}k\neq 2, \\ 3, & \text{其他}. \end{cases}\\
\dim_k\mathrm{HH}^2(\Lambda_q)&=\dim_kM^2-\mathrm{rank}(A_3)-\mathrm{rank}(A_2)=14-\mathrm{rank}(A_3)-\mathrm{rank}(A_2)\\
&=\begin{cases} 10, & \text{如果 } q=1 \text{ 且 } \mathrm{char}k=2, \\ 6, & \text{如果 } q=1 \text{ 且 } \mathrm{char}k\neq 2, \\ 5, & \text{如果 } q=-1 \text{ 且 } \mathrm{char}k\neq 2, \\ 3, & \text{其他}. \end{cases}
\end{aligned}$$

利用上述引理及公式

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \dim_k M^n - \mathrm{rank}(A_{n+1}) - \mathrm{rank}(A_n) = 4n + 6 - \mathrm{rank}(A_{n+1}) - \mathrm{rank}(A_n),$$

我们立即可得当 $n > 2$ 时 n 阶 Hochschild 上同调空间的维数.

定理 2.7 如果 q 是 $m\,(m > 2)$ 次本原单位根, 且 $\mathrm{char}k \neq 2$, 则当 $n > 2$ 时,

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \begin{cases} 2t+3, & \text{如果 } n \text{ 为奇数, 且 } n = tm+1, \\ t+3, & \text{如果 } n \text{ 为偶数, 且 } n = tm+2, \\ t+2, & \text{如果 } n \text{ 为偶数, 且 } n = tm, \\ 2, & \text{其他.} \end{cases}$$

定理 2.8 若 q 不是 $m\,(m > 2)$ 次单位根, 且 $\mathrm{char}k \neq 2$, 则当 $n > 2$ 时,

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \begin{cases} 2n+2, & \text{如果 } q = 1, \\ n+3, & \text{如果 } q = -1, \\ 2, & \text{其他.} \end{cases}$$

定理 2.9 如果 q 是 $m\,(m > 2)$ 次本原单位根, 且 $\mathrm{char}k = 2$, 则当 $n > 2$ 时,

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \begin{cases} t+3, & \text{如果 } n = tm+2, \\ 2t+3, & \text{如果 } n = tm+1, \\ t+2, & \text{如果 } n = tm, \\ 2, & \text{其他.} \end{cases}$$

定理 2.10 如果 q 不是 $m\,(m > 2)$ 次本原单位根, 且 $\mathrm{char}k = 2$, 则当 $n > 2$ 时,

$$\dim_k \mathrm{HH}^n(\Lambda_q) = \begin{cases} 4n+2, & \text{如果 } q = \pm 1, \\ 2, & \text{其他.} \end{cases}$$

Happel 在 1989 年曾猜想对代数闭域上的有限维代数 Λ, 整体维数 $\mathrm{gl.dim}\Lambda < \infty$ 当且仅当 Hochschild 上同调维数 $\mathrm{hch.dim}\Lambda < \infty$ [1]. 由文献 [11] 可知, 对于二元量子外代数 $\Gamma_q = k\langle a, b\rangle/\langle a^2, b^2, ab + qba\rangle$, 若 q 非单位根, Γ_q 的 Hochschild 上同调维数 $\mathrm{hch.dim}_k\Gamma_q = 2$, 而整体维数 $\mathrm{gl.dim}_k\Gamma_q = \infty$, 从而给出了 Happel 猜想的一个反例. 但下面的推论表明 Λ_q 作为 Γ_q 的单点余扩张, Happel 猜想却是成立的.

推论 2.11 对任意的 $q \in k \setminus \{0\}$, $\mathrm{gl.dim}_k\Lambda_q = \mathrm{hch.dim}\Lambda_q = \infty$.

然而, 代数 Γ_q 与 Λ_q 对韩阳的猜想 (即 Happel 猜想的 Hochschild 同调版本) [27] 都是成立的. 在 Buchweitz 等人利用二元量子外代数给出 Happel 的猜想的第一个反例之后, 韩阳猜想对代数闭域上的有限维代数 Λ, 整体维数 $\mathrm{gl.dim}\Lambda < \infty$ 当且仅当 Hochschild 同调维数 $\mathrm{hh.dim}\Lambda = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \dim\mathrm{HH}_i(\Lambda) = 0, i > n\} < \infty$, 并证明了对二元量子外代数 Γ_q 是成立的, 此猜想对零关系代数 [27]、交换代数 [28] 等许多代数类都是成立的, 详见文献 [29]. 作为 Γ_q 的单点余扩张, 由 $\mathrm{HH}_i(\Lambda_q) = \mathrm{HH}_i(\Gamma_q) \oplus \mathrm{HH}_i(k)\,(i > 0)$ 知 $\mathrm{hh.dim}\Lambda_q = \infty$ [30,31], 故对韩阳的猜想也是成立的.

3 代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调环

本节主要利用平行路的语言, 组合地刻划了代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 的 cup 积, 进而确定了 Λ_q 的 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的结构, 证明了当 q 为单位根时, $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的, 从而为 Snashall-Solberg 猜想提供了更多反例.

在文献 [14] 中, Siegel 和 Witherspoon 证明了代数 Λ_q 的 cup 积可以利用代数的任意投射双模分解来定义. 设 $\mathbb{X}$ 为 Λ_q 的投射双模分解, 则存在一个链映射 Δ: $\mathbb{X}\to\mathbb{X}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{X}$, 而且 Δ 在同伦的意义下是唯一的. Siegel 和 Witherspoon 利用下面映射的合成定义了任意两个上循环 $\xi,\eta\in\mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(\mathbb{X},\Lambda_q)$ 的 cup 积:

$$\mathbb{X}\xrightarrow{\Delta}\mathbb{X}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{X}\xrightarrow{\xi\otimes\eta}\Lambda_q\otimes_{\Lambda_q}\Lambda_q\xrightarrow{\nu}\Lambda_q,$$

其中映射 ν 为乘法映射.

下面我们对 Λ_q 的定理 2.1 中的极小投射双模分解 $\mathbb{P}$ 构造链映射 Δ. 回忆一下, 双复形 $(\mathbb{P}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{P},D)$ 仍是代数 Λ_q 的极小投射双模分解, 定义如下:

$$(P\otimes_{\Lambda_q}P)_n=\coprod_{i+j=n}P_i\otimes_{\Lambda_q}P_j$$

且微分 $D_n:(P\otimes_{\Lambda_q}P)_n\longrightarrow(P\otimes_{\Lambda_q}P)_{n-1}$,

$$D_n=\sum_{i=0}^{n-1}((-1)^i\otimes d_{n-i}+d_{i+1}\otimes 1).$$

定义 3.1 我们定义 Λ_q- 双模映射 $\Delta:\mathbb{P}\to\mathbb{P}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{P}$ 如下: 当 $0\leqslant t\leqslant n$ 时,

$$\Delta_n(1\otimes g_t^n\otimes 1)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{i=\max\{0,t+s-n\}}^{\min\{t,s\}}q^{i(n+i-t-s)}(1\otimes g_i^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{t-i}^{n-s}\otimes 1),$$

$$\Delta_n(1\otimes g_{n+1}^n\otimes 1)=\sum_{s=0}^{n}(1\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s+1}^{n-s}\otimes 1).$$

定理 3.2 映射 $\Delta:\mathbb{P}\to\mathbb{P}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{P}$ 是链映射.

证明 我们只需证明, 当 $n\geqslant 1$ 时, 下面的图

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} \\ {\scriptstyle\Delta_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_{n-1}} \\ (P\otimes_{\Lambda_q}P)_n & \xrightarrow{D_n} & (P\otimes_{\Lambda_q}P)_{n-1} \end{array}$$

是交换的, 即 $\Delta_{n-1}d_n=D_n\Delta_n$ 对任意的 $n\geqslant 1$ 都成立.

当 $n=1$ 时, 设 $x\in\{a,b\}$,

$$\begin{aligned} D_1\Delta_1(1\otimes x\otimes 1)&=D_1[(1\otimes e_1\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes x\otimes 1)+(1\otimes x\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes e_1\otimes 1)]\\ &=(1\otimes d_1)(1\otimes e_1\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes x\otimes 1)+(d_1\otimes 1)(1\otimes x\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes e_1\otimes 1)\\ &=(1\otimes e_1\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(x\otimes e_1\otimes 1)-(1\otimes e_1\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes e_1\otimes x)\\ &\quad+(x\otimes e_1\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes e_1\otimes 1)-(1\otimes e_1\otimes x)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes e_1\otimes 1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x \otimes e_1 \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes e_1 \otimes 1) - (1 \otimes e_1 \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes e_1 \otimes x) \\
&= \Delta_0 d_1 (1 \otimes x \otimes 1).
\end{aligned}
$$

同样地可以验证, $D_1\Delta_1(1 \otimes c \otimes 1) = \Delta_0 d_1(1 \otimes c \otimes 1)$. 因此, 我们有 $D_1\Delta_1 = \Delta_0 d_1$.

当 $n \geqslant 2$ 时, 由于 Δ 与微分 d 是线性的, 所以只需证明对任意的 $1 \otimes g_t^n \otimes 1 \in P_n$,

$$
D_n\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1) = \Delta_{n-1} d_n (1 \otimes g_t^n \otimes 1),
$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant n+1$. 由于

$$
(P \otimes_{\Lambda_q} P)_{n-1} = \coprod_{s=0}^{n-1} P_s \otimes_{\Lambda_q} P_{n-1-s},
$$

我们下面证明 $D_n\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 与 $\Delta_{n-1}d_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 的第 s 分支相等, $0 \leqslant s \leqslant n-1$.

下面分三种情形证明.

(1) 当 $0 \leqslant t \leqslant n-1$ 时, 由于

$$
\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{i=\max\{0,t+s-n\}}^{\min\{t,s\}} q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s} \otimes 1),
$$

故 $D_n\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 中形如 $(1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q}$- 的和项为

$$
\begin{aligned}
&(-1)^s q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (a \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + (-1)^s q^{(i+1)(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (b \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + (-1)^n q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes b) \\
&\quad + (-1)^n q^{i(n+i-t-s)+(t-i)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes a) \\
&\quad + q^{i(n+i-t-s-1)} (a \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + q^{(i+1)(n+i-t-s)+(s-i)} (b \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + (-1)^{s+1} q^{(i+1)(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes b) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + (-1)^{s+1} q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes a) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1).
\end{aligned}
$$

注意到上述和式中 $(-1)^s q^{i(n+i-t-s)}(1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (a \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1) + (-1)^{s+1} q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes a) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1) = 0$, 以及 $(-1)^s q^{(i+1)(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (b \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) + (-1)^{s+1} q^{(i+1)(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes b) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) = 0$.

另一方面, $\Delta_{n-1}d_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 中形如 $(1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q}$- 的和项为

$$
\begin{aligned}
&q^{i(n+i-t-s-1)} (a \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + q^{i(n+i-t-s)+(n-t)} (b \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i-1}^{n-s-1} \otimes 1) \\
&\quad + (-1)^n q^{i(n+i-t-s)} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes b) \\
&\quad + (-1)^n q^{i(n-1+i-t-s)+t} (1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q} (1 \otimes g_{t-i}^{n-s-1} \otimes a).
\end{aligned}
$$

所以, $D_n\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 和式中与 $\Delta_{n-1}d_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$ 中形如 $(1 \otimes g_i^s \otimes 1) \otimes_{\Lambda_q}$- 的和项一致. 因此 $\Delta_{n-1}d_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1) = D_n\Delta_n(1 \otimes g_t^n \otimes 1)$.

(2) 当 $t=n$ 时, 由 Δ 的定义可知,

$$\Delta_n(1\otimes g_n^n\otimes 1)=\sum_{s=0}^{n}(1\otimes g_s^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s}^{n-s}\otimes 1),$$

因而

$$\begin{aligned}D_n\Delta_n(1\otimes g_n^n\otimes 1)&=D_n\left(\sum_{s=0}^{n}(1\otimes g_s^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s}^{n-s}\otimes 1)\right)\\&=\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s(1\otimes g_s^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}[b\otimes g_{n-s-1}^{n-s-1}\otimes 1+(-1)^{(n-s)}(1\otimes g_{n-s-1}^{n-s-1}\otimes b)]\\&\quad+\sum_{s=0}^{n-1}[b\otimes g_s^s\otimes 1+(-1)^{s+1}1\otimes g_s^s\otimes b]\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s-1}^{n-s-1}\otimes 1)\\&=\sum_{s=0}^{n-1}[(-1)^n(1\otimes g_s^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s-1}^{n-s-1}\otimes b)+(b\otimes g_s^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s-1}^{n-s-1}\otimes 1)]\\&=\Delta_{n-1}d_n(1\otimes g_n^n\otimes 1).\end{aligned}$$

(3) 当 $t=n+1$ 时, 由 Δ 的定义,

$$\Delta_n(1\otimes g_{n+1}^n\otimes 1)=\sum_{s=0}^{n}(1\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s+1}^{n-s}\otimes 1),$$

则

$$\begin{aligned}D_n\Delta_n(1\otimes g_{n+1}^n\otimes 1)&=D_n\left(\sum_{s=0}^{n}(1\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s+1}^{n-s}\otimes 1)\right)\\&=\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s(1\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}[a\otimes g_{n-s}^{n-s-1}\otimes 1+(-1)^{(n-s)}(1\otimes g_0^{n-s-1}\otimes c)]\\&\quad+\sum_{s=0}^{n-1}[a\otimes g_0^s\otimes 1+(-1)^{s+1}1\otimes g_0^s\otimes a]\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s}^{n-s-1}\otimes 1)\\&=\sum_{s=0}^{n-1}[(-1)^n(1\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_0^{n-s-1}\otimes c)+(a\otimes g_0^s\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g_{n-s}^{n-s-1}\otimes 1)]\\&=\Delta_{n-1}d_n(1\otimes g_{n+1}^n\otimes 1).\end{aligned}$$

因此, 我们证明了交换图成立, 即 Δ 是链映射. 定理得证. □

我们利用链映射 Δ 来描述代数 Λ_q 的 Hochschild 上同调的 cup 积. 下面的定理表明, Λ_q 的 Hochschild 上同调的 cup 积本质上是平行路的毗连 (在相差常数因子的意义下).

定理 3.3 设

$$\xi=(g_i^n,x)\in M^n,\quad \eta=(g_j^m,y)\in M^m$$

分别是 $\mathrm{HH}^n(\Lambda_q)$ 和 $\mathrm{HH}^m(\Lambda_q)$ 中相应元素 (陪集) 的代表元, 则 ξ 与 η 的 cup 积为

$$\xi\sqcup\eta=\begin{cases}q^{i(m-j)}(g_{i+j}^{n+m},xy), & \text{如果 } i\leqslant n \text{ 且 } j\leqslant m,\\ (g_{n+m+1}^{n+m},xy), & \text{如果 } i=0, j=m+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明　为了叙述的简便, 我们不区分 $\xi,\eta\in M^\bullet$ 与 $\phi(\xi),\phi(\eta)\in C^*((P))$, 其中 ϕ 为引理 2.2 中的同构映射. 注意到 ξ,η 的 cup 积定义为下面映射的合成,

$$\mathbb{P}\xrightarrow{\Delta}\mathbb{P}\otimes_{\Lambda_q}\mathbb{P}\xrightarrow{\xi\otimes\eta}\Lambda_q\otimes_{\Lambda_q}\Lambda_q\xrightarrow{\nu}\Lambda_q,$$

则当 $i\leqslant n, j\leqslant m$ 时, 一方面,

$$\xi\sqcup\eta(1\otimes g^{m+n}_{m+n+1}\otimes 1)=\nu(\xi\otimes\eta)\Delta(1\otimes g^{m+n}_{m+n+1}\otimes 1)=0,$$

另一方面, 对任意 $0\leqslant l\leqslant m+n$,

$$\begin{aligned}\xi\sqcup\eta(1\otimes g^{m+n}_{l}\otimes 1)&=\nu(\xi\otimes\eta)\Delta(1\otimes g^{m+n}_{l}\otimes 1)\\&=\nu(\xi\otimes\eta)\Bigg[\sum_{s=0}^{n+m}\sum_{k=\max\{0,l+s-n-m\}}^{\min\{l,s\}}q^{k(n+m+k-l-s)}(1\otimes g^s_k\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g^{n+m-s}_{l-k}\otimes 1)\Bigg]\\&=\nu\Bigg[\sum_{s=0}^{n+m}\sum_{k=\max\{0,l+s-n-m\}}^{\min\{l,s\}}q^{k(n+m+k-l-s)}\xi(1\otimes g^s_k\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}\eta(1\otimes g^{n+m-s}_{l-k}\otimes 1)\Bigg]\\&=\begin{cases}q^{i(m-j)}xy, & \text{如果 } l=i+j,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\end{aligned}$$

因此, $\xi\sqcup\eta=q^{i(m-j)}(g^{m+n}_{i+j},xy)$.

当 $j=m+1$ 时, 一方面, 对任意 $0\leqslant l\leqslant m+n$, $\xi\sqcup\eta(1\otimes g^{m+n}_l\otimes 1)=\nu(\xi\otimes\eta)\Delta(1\otimes g^{m+n}_l\otimes 1)=0$; 另一方面,

$$\begin{aligned}\xi\sqcup\eta(1\otimes g^{m+n}_{m+n+1}\otimes 1)&=\nu(\xi\otimes\eta)\Delta(1\otimes g^{m+n}_{m+n+1}\otimes 1)\\&=\nu(\xi\otimes\eta)\Bigg[\sum_{s=0}^{n+m}(1\otimes g^s_0\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}(1\otimes g^{n+m-s}_{n+m-s+1}\otimes 1)\Bigg]\\&=\nu\Bigg[\sum_{s=0}^{n+m}\xi(1\otimes g^s_0\otimes 1)\otimes_{\Lambda_q}\eta(1\otimes g^{n+m-s}_{n+m-s+1}\otimes 1)\Bigg]\\&=\begin{cases}xy, & \text{如果 } i=0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\end{aligned}$$

所以, 当 $i=0, j=m+1$ 时, $\xi\sqcup\eta=(g^{m+n}_{m+n+1},xy)$; 当 $0<i\leqslant n+m+1, j=n+m$, $\xi\sqcup\eta=0$.

当 $i=n+1$ 时, $\xi\sqcup\eta(1\otimes g^{m+n}_l\otimes 1)=\nu(\xi\otimes\eta)\Delta(1\otimes g^{m+n}_l\otimes 1)=0$, 其中 $0\leqslant l\leqslant m+n+1$.

综合上述三种情形, 定理得证. □

作为上述主定理的一个应用, 我们将描述 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的代数结构. 下面的引理构造了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基 (我们用平行路表达了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 中对应陪集的代表元).

引理 3.4　(1) 当 $\mathrm{char}k=2$ 时, 设 q 是 m 次本原单位根, 令

$$\mathcal{H}^n=\begin{cases}\{(g^0_0,e_1)+(g^0_1,e_2)\}, & \text{如果 } n=0,\\ \{(g^n_{im},e_1)\mid i=1,2,\dots,t\}, & \text{如果 } n=tm>0,\\ \emptyset, & \text{其他,}\end{cases}$$

则 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n$ 构成 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基.

(2) 当 $\mathrm{char}k\neq 2$ 时, 若 q 是 m 次本原单位根, 令

$$\mathcal{J}^n=\begin{cases}\{(g_0^0,e_1)+(g_1^0,e_2)\}, & \text{如果 } n=0,\\ \{(g_{im}^{2n},e_1)\mid i=1,2,\dots,t\}, & \text{如果 } 2n=tm>0,\\ \emptyset, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{J}^n$ 构成 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基.

(3) 若 q 非单位根, 则 $\mathcal{H}^0=\{(g_0^0,e_1)+(g_1^0,e_2)\}$ 构成 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基.

证明 注意到引理 2.2 中的向量空间同构 $k(g^n//\mathcal{B})\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda_q^e}(P_n,\Lambda_q)$, 其中 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,a,b,c,ba,bc\}$, 由定理 3.3 中对 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 的 Hochschild 上同调的 cup 积的描述可知, 对于任意的 $x\in\mathcal{B}\setminus\{e_1,e_2\}$, $(g_i^n,x)\sqcup(g_i^n,x)=0$, 即 (g_i^n,x) 为幂零元, 故 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为 k- 向量空间由集合 $\mathcal{H}=\{(g_i^n,e_1)\mid i=1,2,\dots,t,(g_1^0,e_2)\}$ 生成, 其中 $n\geqslant 0$.

(1) 首先考虑 $\mathrm{char}k=2$, q 是 m 次本原单位根的情形. 由 δ^* 的定义,

$$\begin{aligned}&\delta^1(g_0^0,e_1)=(a,g_0^1)-(a,g_0^1)+(b,g_1^1)-(b,g_1^1)-(c,g_2^1)=-(c,g_2^1),\\&\delta^1(g_1^0,e_2)=(c,g_2^1),\\&\delta^n(g_0^{n-1},e_1)=(1+(-1)^n)(g_0^n,a)+(q^{n-1}+(-1)^n)(g_1^n,b)+(-1)^n(g_{n+1}^n,c),\\&\delta^n(g_r^{n-1},e_1)=(1+(-1)^nq^r)(g_r^n,a)+(q^{n-r-1}+(-1)^n)(g_{r+1}^n,b),1\leqslant r\leqslant n-1,\end{aligned}$$

其中 $n>1$, 我们有 $\delta^1((g_0^0,e_1)+(g_1^0,e_2))=0$, $\delta^n(g_0^{n-1},e_1)\neq 0$, 而且 $\delta^n(g_r^{n-1},e_1)=0$ 当且仅当 $1+(-1)^nq^r$ 与 $q^{n-r-1}+(-1)^n$ 同时为零, 其中 $1\leqslant r\leqslant n-1$. 因此, 当 $\mathrm{char}k=2$, q 是 m 次本原单位根时, $1+(-1)^nq^r$ 与 $q^{n-r-1}+(-1)^n$ 同时为零当且仅当 $n-1=tm$ 且 $r=im\,(1\leqslant i\leqslant t)$, 所以 $\mathcal{H}\cap\mathrm{Ker}\delta^{n+1}=\mathcal{H}^n$, 而且由 δ^* 的定义可知, $\mathcal{H}\cap\mathrm{Im}\delta^n=\emptyset$, 故 $\mathcal{H}\cap\mathrm{HH}^n(\Lambda_q)=\mathcal{H}^n$, 因此 $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{H}^i$ 是 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为 k- 向量空间的一组生成元, 又由于 $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{H}^i$ 中的元素 k- 线性无关, 所以 $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{H}^n$ 构成 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基.

(2) 与 (3) 可以类似地证明. □

下面的定理清晰地描述了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的代数结构.

定理 3.5 设 $\Lambda_q=kQ/I_q$ 是第 1 节引入的量子 Koszul 代数, 则

$$\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}\cong\begin{cases}k\oplus k[x^m,y^m]y^m, & \text{如果 } \mathrm{char}k=2, q \text{ 是 } m \text{ 次本原单位根},\\ (k\oplus k[x^m,y^m]y^m)^{ev}, & \text{如果 } \mathrm{char}k\neq 2, q \text{ 是 } m \text{ 次本原单位根},\\ k, & \text{如果 } q \text{ 非单位根},\end{cases}$$

其中 $(k\oplus k[x^m,y^m]y^m)^{ev}$ 表示 $k\oplus k[x^m,y^m]y^m$ 作为 $\mathbb{N}$- 分次代数中的所有偶次分支构成的子代数.

证明 首先考虑 $\mathrm{char}k=2$, q 是 m 次本原单位根的情形. 由上面的引理可知, 集合 $\{e=(g_0^0,e_1)+(g_1^0,e_2),\ X_{im}^n=(g_{im}^n,e_1)\mid i=1,2,\dots,t,\ n=tm>0\}$ 构成 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为向量空间的一组 k- 基. 而且, 由定理 3.3 中 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 的 cup 积的描述, $e\sqcup e=e$, $e\sqcup X_{im}^{tm}=X_{im}^{tm}$, $X_{im}^{sm}\sqcup X_{jm}^{tm}=X_{(i+j)m}^{(s+t)m}$. 建立对应 $\varphi:1\mapsto e,x\mapsto(g_0^1,e_1),y\mapsto(g_1^1,e_1)$, 而且 φ 诱导了从 $k\oplus k[x^m,y^m]y^m$ 到 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 的代数同态 $\tilde{\varphi}:x^{(t-i)m}y^m\mapsto X_{im}^{tm}$. 由于 $\mathrm{Ker}\tilde{\varphi}=0$, 且 $\tilde{\varphi}$ 为满同态, 因此 $\tilde{\varphi}$ 为代数同构.

$\mathrm{char}k\neq 2$ 且 q 是 m 次本原单位根的情形和 q 非单位根的情形可类似证明. □

由上述定理立即可得

推论 3.6 若 q 为单位根, 则 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的.

注 3.7 当 $q=-1$ 时, 上述结果与 Snashall 通过计算代数 Λ_{-1} 的 Koszul 对偶 $E(\Lambda_{-1})$ 的分次中心 $Z_{gr}(E(\Lambda_{-1}))$, 利用同构 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_{-1})/\mathcal{N}\cong Z_{gr}(E(\Lambda_{-1}))/\mathcal{N}_{gr}$ 得到的结果一致 [10], 而且定理 3.3、3.5 及其证明揭示了 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ (q 为单位根) 作为代数不是有限生成的根本原因在于 (g_0^n,e_1) $(n>0)$ 不属于 $\mathrm{Ker}\delta^{n+1}$, 即平行路 (g_0^n,e_1) 不是 n 阶上循环, 因而 (g_0^n,e_1) 不属于 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$. 事实上, 由定理 3.4 知 $(g_m^{2tm},e_1)\in\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$; 假如 (g_m^{2tm},e_1) $(t>1)$ 能够由 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 中的两个低次的元素生成, 则由定理 3.3 中对 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ 的 cup 积的描述, 必有

$$(g_m^{2tm},e_1)=(g_0^{(2t-i)m},e_1)\sqcup(g_m^{im},e_1).$$

但 $(g_0^{(2t-i)m},e_1)$ 不属于 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$, 故 (g_m^{2tm},e_1) $(t>1)$ 不能由 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 两个低次的元素生成, 因此 $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ 作为代数不是有限生成的. 然而, 对于二元量子外代数 $\Gamma_q=k\langle a,b\rangle/\langle a^2,b^2,ab+qba\rangle$, 由文献 [11] 知

$$\mathrm{HH}^*(\Gamma_q)/\mathcal{N}\cong\begin{cases}k[x^m,y^m], & \text{如果 } \mathrm{char}k=2,\\ & \quad\text{或者 } \mathrm{char}k\neq 2,\ q \text{ 是 } m \text{ 次本原单位根且 } m \text{ 为偶数},\\ k[x^{2m},x^my^m,y^{2m}], & \text{如果 } \mathrm{char}k\neq 2,\ q \text{ 是 } m \text{ 次本原单位根且 } m \text{ 为奇数},\\ k, & \text{如果 } q \text{ 非单位根},\end{cases}$$

因此 $\mathrm{HH}^*(\Gamma_q)/\mathcal{N}$ 作为代数是有限生成的.

致谢 作者感谢韩阳研究员的鼓励与帮助.

参考文献

1 Happel D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. Lecture Notes in Math, 1404. New York: Springer, 1989, 108–126
2 Skowroński A. Simply connected algebras and Hochschild cohomologies. Canad Math Proc, 1993, 14: 431–447
3 Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras. Ann Math, 1964, 79: 59–103
4 MacLane S. Homology. Berlin: Springer, 1963
5 Snashall N, Solberg Ø. Support varieties and Hochschild cohomology rings. Proc London Math Soc, 2004, 88: 705–732
6 Green E L, Snashall N, Solberg Ø. The Hochschild cohomology ring of a selfinjective algebra of finite representation type. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 3387–3393
7 Green E L, Snashall N. The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a stacked monomial algebra. Colloq Math, 2006, 105: 233–258
8 Green E L, Snashall N, Solberg Ø. The Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a monomial algebra. J Algebra Appl, 2006, 5: 153–192
9 Xu F. Hochschild and ordinary cohomology rings of small categories. Adv Math, 2008, 219: 1872–1893
10 Snashall N. Support varieties and the Hochschild cohomology ring modulo nilpotence. In: Proceedings of the 41st Symposium on Ring Theory and Representation Theory. Tsukuba, 2009, 68–82
11 Buchweitz R O, Green E L, Madsen D, et al. Finite Hochschild cohomology without finite global dimension. Math Res Lett, 2005, 12: 805–816
12 Liu S P, Schulz R. The existence of bounded infinitely DTr-orbits. Proc Amer Math Soc, 1994, 122: 1003–1005
13 Schulz R. A non-projective module without self-extensions. Arch Math, 1994, 62: 497–500
14 Siegel S F, Witherspoon S J. The Hochschild cohomology ring of a group algebra. Proc London Math Soc, 1999, 79: 131–157

15 Cibils C. Hochschild cohomology algebra of radical square zero algebras. In: Algebra and Modules II. Providence, RI: Amer Math Soc, 1998, 93–101
16 Xu Y G, Han Y. Hochschild (co)homology of exterior algebras. Comm Algebra, 2007, 35: 115–131
17 Ames G, Cagliero L, Tirao P. Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras. J Algebra, 2009, 322: 1466-1497
18 Fan J M, Xu Y G. On Hochschild cohomology rings of Fibonacci algebras. Front Math China, 2006, 1: 526–537
19 Buchweitz R, Green E L, Snashall N, et al. Multiplicative structures for Koszul algebras. Quart J Math, 2008, 59: 441–454
20 Xu Y G, Zhang C, Ma X J, et al. Hochschild cohomology of Beilinson algebra of exterior algebra. Sci China Math, 2012, 55, doi:10.1007/s11425-012-4388-9
21 Xu Y G, Xiang H L. Hochschild cohomology rings of d-Koszul algebras. J Pure Appl Algebra, 2011, 215: 1–12
22 Green E L, Hartman G, Marcos E N, et al. Resolutions over Koszul algebras. Arch Math, 2005, 85: 118–127
23 Dräxler P, Michler G O, Ringel C M. Computational Methods for Representations of Groups and Algebras. Berlin: Birkhäuser, 1999
24 Green E, Huang R Q. Projective resolution of straightening closed algebras generated by minors. Adv Math, 1995, 110: 314–333
25 Bulter M C R, King A D. Minimal resolutions of algebras. J Algebra, 1999, 212: 323–362
26 Cibils C. Rigidity of truncated quiver algebras. Adv Math, 1990, 79: 18–42
27 Han Y. Hochschild (co)homology dimension. J London Math Soc, 2006, 73: 657–668
28 Avramov L L, Vigué-Poirrier M. Hochschild homology criteria for smoothness. Internat Math Res Noti, 1992, 1: 17–25
29 Bergh P A, Han Y, Madsen D. Hochschild homology and truncated cycles. Proc Amer Math Soc, 2012, 140: 1133–1139
30 Loday J L. Cyclic homology. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1992
31 徐运阁, 陈媛. 二元广义外代数的 Hochschild 同调群. 数学学报, 2006, 49: 1091–1098

Hochschild cohomology of a class of quantized Koszul algebras

ZHANG Chao & XU YunGe

Abstract In this paper, we mainly compute the k-dimensions of Hochschild cohomology spaces of a class of quantized Koszul algebras $\Lambda_q\,(q \in k \setminus \{0\})$ with the application of combinatorics, explicitly describe the cup product of Hochschild cohomology of Λ_q, and thus determine the structure of the Hochschild cohomology ring $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)$ of Λ_q modulo the ideal $\mathcal{N}$ generated by nilpotence. As a consequence, we show that $\mathrm{HH}^*(\Lambda_q)/\mathcal{N}$ is not finitely generated as an algebra when q is a root of unity, and thus provide more counterexamples for Snashall-Solberg conjecture (namely, the Hochschild cohomology ring modulo nilpotence of a finite-dimensional k-algebra is always finitely generated as algebra).

Keywords **Koszul algebra, Hochschild cohomology ring, cup product, Snashall-Solberg conjecture**

MSC(2010) **16E40, 16E10, 16G10**

doi: **10.1360/012011-397**