

# 两圆柱体表面接触承载能力的分形模型研究

黄康, 赵韩, 陈奇

(合肥工业大学 机械与工程学院, 安徽 合肥 230009)

**摘要:** 结合 M-B 分形模型和 Hertz 接触模型理论, 建立了新型两圆柱体分形接触模型, 通过与 M-B 模型和 Hertz 模型的对比分析及接触强度实例计算, 证明模型所反映两接触体的应力状态. 结果表明, 所建立的模型反映出载荷与面积呈指数关系, 指数不仅与分形维数  $D$  有关, 而且还与圆柱体的接触半径及接触方式有关. 此模型的建立可作为相关机械产品 (如齿轮和轴承等) 的强度分析和优化设计的理论基础.

**关键词:** 分形; 接触模型; 圆柱体; 承载能力

中图分类号: TH114

文献标志码: A

文章编号: 1004-0595 (2008) 06-0529-05

目前, 关于接触问题的数学模型主要以 Hertz 模型为代表<sup>[1]</sup>. 通过 Hertz 模型可计算出两接触体间的接触应力, 由此可判断出接触体能否满足接触强度条件. Hertz 模型较正确地反映两接触体间的应力状态, 仍应用于现代产品设计中<sup>[2]</sup>. 然而, 此模型不能很好地分析物体的微观特性, 如接触表面的形貌特征及其表面粗糙度等对接触强度的影响.

近年来通过研究物体微观特性的分形模型应运而生, 其中以 M-B 分形模型为典型代表. 然而 M-B 模型在分析时主要考虑两接触体的微观形貌, 而不考虑接触表面的宏观特性, 如曲面形状、接触方式等. 取两个加工方法、材料特性和受载都一样的表面进行接触, 若其曲面形状或表面粗糙度不同时, 其变形效果和应力状态也是不同的. 若单一利用传统 Hertz 接触模型来分析, 则不能区分仅表面粗糙度不同的情形; 若单一利用 M-B 分形接触模型来分析, 又不能辨别曲面形状不一致的情形.

如何将上述两种基本理论有机结合, 建立更具准确性和确定性的理论模型, 便是本文研究的重点.

## 1 两任意圆柱体表面接触分形模型建立

### 1.1 M-B 模型

M-B 分形模型<sup>[3-5]</sup>是分析接触表面微貌特征的有效模型. 假设表面轮廓的微突体形状可以由 W-M<sup>[6-7]</sup>函数来定义, 并假设表面粗糙度是统计各向同性的, 经推导<sup>[8]</sup>可得: 在接触表面的总载荷  $P$  可使

用接触点的尺寸分布  $n(a)$  来估计, 其公式为:

$$P = \frac{4\sqrt{EG}^{D-1}}{3} \int_{a_s}^{a_1} n(a) a^{(3-D)/2} da + K_y \int_{a_s}^{a_1} n(a) a da \quad (1)$$

式中: 第一项为弹性接触载荷; 第二项为塑性接触载荷.  $D$  为轮廓分形维数;  $G$  为反映  $z(x)$  的特征尺度系数;  $E$  为综合弹性模量,  $\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$ ,  $\nu_1, \nu_2$  为物体、的泊松比系数;  $E_1, E_2$  为物体、的弹性模量.  $a$  为单个微突体接触后的面积;  $y$  为较软材料的屈服强度,  $K$  为硬度  $H$  与屈服强度  $y$  的相关系数 ( $H = K y$ );  $a_c$  为单个微突体由弹性变形变化到塑性变形时的临界面积;  $a_1$  为最大的接触点的面积;  $n(a)$  为接触点的尺寸分布;  $a_s$  为最小接触面积. 一般假设  $a_s = 0$ .

Mandelbrot<sup>[9]</sup>在研究地球表面几何形貌时发现, 面积  $A$  超过一定值  $a$  的海洋面上的岛屿数  $N$  与  $a$  之间满足幂律关系:

$$N(A > a) \sim a^{-D/2}$$

$$(D \text{ 为岛屿与海岸线的分形维数.}) \quad (2)$$

Majumdar 和 Bhushan<sup>[10]</sup>经研究推导出如下结论:

$$n(a) = \left| \frac{dN(A > a)}{da} \right| = \frac{D}{2} \frac{a_1^{D/2}}{a^{(D/2+1)}} \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (1) 即可得到总载荷  $P$  与实际接触面积  $A_r$  之间的关系式.

M-B 模型指出:

基金项目: 安徽省自然科学基金项目 (070414150).

收稿日期: 2008-01-07; 修回日期: 2008-05-11 联系人陈奇, e-mail: hfut\_chen@yaho.com.cn

作者简介: 黄康, 男, 1968 年生, 教授, 目前主要从事新型传动设计及理论研究.

(1) 当  $a_c^* > 0, P^* \sim A_r^{*(3-D)/2}$  即载荷与面积满足指数关系.

式中:  $a_c^* = \frac{a_c}{A_a} = \frac{G^{*2}}{(K\phi/2)^{2/(D-1)}}$  表示名义临界面积,

$P^* = \frac{P}{A_a E}$  代表载荷的无量纲数,  $A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$  代表无量纲真实面积.

(2) 接触面积中弹性接触面积的增多对改善接触性质有益. 一般采用  $A_{re}/A_r$  判定接触面积中弹性接触面积的多少, 并进一步判断接触的质量.

M-B 模型以分形参数代替统计学参数表征粗糙表面, 推导出了实际接触面积与载荷的关系, 以及实际弹性接触面积和实际塑性接触面积的计算公式, 指出了影响接触面变形性质的因素与规律. 由于分形参数具有尺度独立性, 因此可利用 M-B 模型对接触面积进行预测而不受测量仪器分辨率和取样长度等因素的影响. 已由实验证明<sup>[11-13]</sup> M-B 分形模型能正确的反映两接触体间的接触状态.

1.2 关于  $n(a)$  的讨论

在 M-B 分形模型中, 式 (2) 中  $n(a)$  的求解主要假设两接触体在无限平面里接触, 或相对各个微突体来说为无限接触. 很显然, 当接触的 2 个曲面非无限接触时, 接触时所形成的接触点的总个数  $N$  将有所变化. 假设随着接触面的增大, 两接触体的接触点数会增加, 但其值应小于或等于  $a^{-D/2}$ . 因此, 两接触体的理论接触面积对  $N$  的大小有影响.

1.3 构造表面接触系数  $c_c$

如图 1 所示, 设两圆柱体质地均匀且各向同性,

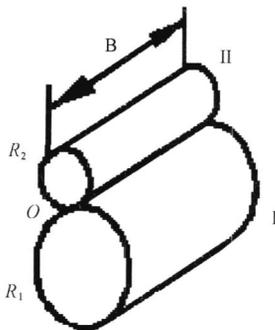


Fig 1 The contact model of two cylinders' surface  
图 1 两圆柱体表面接触模型图

并在 O 点接触, 两圆柱在 O 点的接触半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ . 若两曲面完全接触时, 为式 (2) 所描述情况. 因此当两曲面接触时的理论接触面积为  $s$  时, 所形成的  $N$  小于此值. 设此时  $N$  满足:

$$N (A > a) = c_c a^{-D/2} \tag{4}$$

式中:  $c_c$  为两圆柱接触点个数  $N$  的影响因子, 称为表面接触系数, 用来反映实际接触面积  $s$  对接触个数  $N$  的影响. 由于接触个数  $N$  是一个指数函数形式, 因此设  $c_c$  亦为指数函数形式. 考虑到两接触体表面积大小、接触方式和接触处的曲率大小对表面接触系数的影响, 构造  $c_c$  的具体形式如下:

$$c_c = \left(\frac{s}{S}\right)^x \tag{5}$$

式中:  $s$  为理论接触面积, 可由下式计算<sup>[2]</sup>:

$$s = 2B \left(\frac{4BP}{E R_1 \pm R_2}\right)^{1/2} \tag{6}$$

其中:  $B$  为两圆柱体有效接触长度;  $P$  为单位线长度载荷;  $S$  为两曲面的表面积之和, 可计算得:

$$S = 2 (R_1 \pm R_2) B \tag{7}$$

(“+”为外啮合,“-”为内啮合,下同)

(3)  $x$  为综合曲率系数. 令

$$x = \frac{1}{R_2} \mp \frac{1}{R_1} \tag{8}$$

综上可得:

$$c_c = c_{0c} P^{C_2 x} \tag{9}$$

其中:

$$c_{0c} = \left[ \frac{\left(\frac{4B}{E R_1 \pm R_2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{R_2} \mp \frac{1}{R_1}\right)}{(R_1 \pm R_2)} \right]^{1/2} \tag{10}$$

$$C_2 = 1/2$$

1.4 系数  $c_c$  合理性分析

设  $P = 1\ 000\ \text{N}, B = 50\ \text{mm}, R_1 = 100\ \text{mm}$ , 及  $E = 155\ 000\ \text{MPa}$ , 并设  $R_2 < R_1$ , 图 2 所示为  $c_c - R_2$  的关

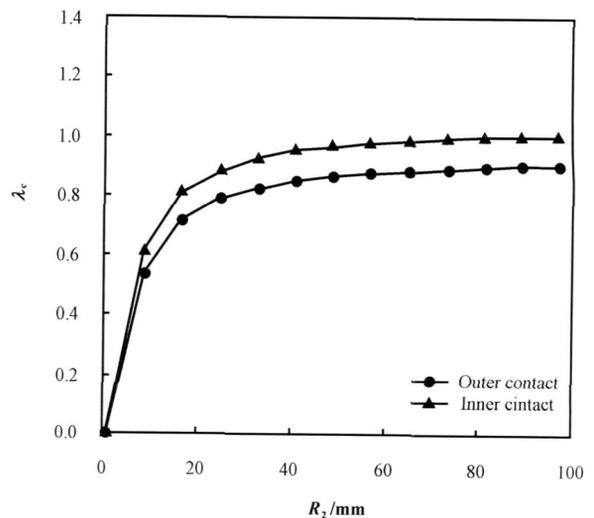


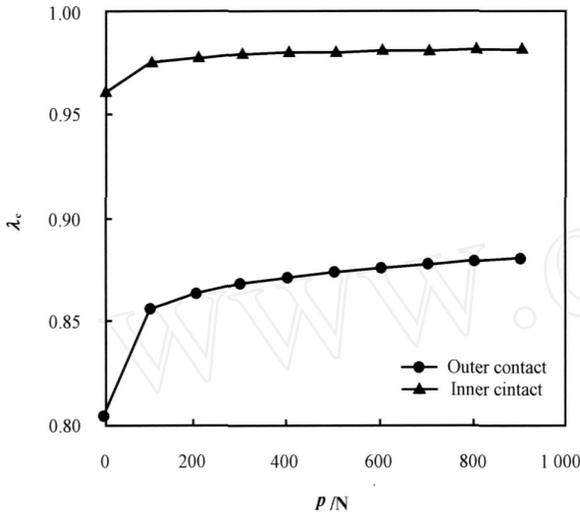
Fig 2 Changing trend of  $c_c$  with  $R_2$ , when  $P, R_1$  were fixed  
图 2  $P$  和  $R_1$  一定,  $R_2$  变化时的  $c_c$  趋势图

系曲线. 可见:  $c_c$  始终小于 1. 这与以上分析相同, 即如果两曲面非无限接触时, 所形成的微接触体个数

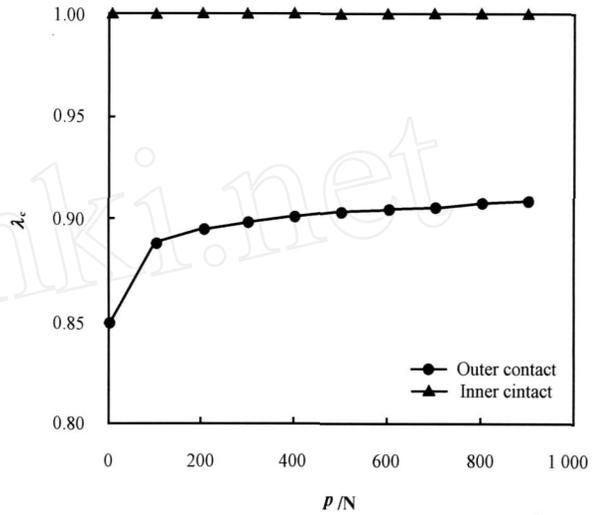
小于  $N$ ;  $R_1$  一定, 随着  $R_2$  的增加,  $\lambda_c$  增大. 当  $R_2 = 0$  时, 则两圆柱体没有接触, 因此  $\lambda_c$  为 0; 当  $R_2 = 100$  时, 即两圆柱体大小相同, 此时对于外接触情况,  $\lambda_c$  有所增加, 但小于 1; 对于内接触情况, 相当于两圆柱体完全接触, 此时情况与 M-B 的建模条件相同, 因此

$\lambda_c = 1$ ; 因此  $R_2$  增加对改善接触强度有利; 另外,  $R_1$  和  $R_2$  相同时, 内接触的  $\lambda_c$  大于外接触时的  $\lambda_c$ , 因此内接触比外接触的接触强度低. 这与经典接触理论的结论一致, 因此  $\lambda_c$  选取合理.

图 3 所示为  $B = 50 \text{ mm}$ ,  $E = 155 \text{ GPa}$  时的  $\lambda_c$ -



(a)  $R_1 = 100 \text{ mm}, R_2 = 60 \text{ mm}$



(b)  $R_1 = 100 \text{ mm}, R_2 = 100 \text{ mm}$

Fig 3 Changing trend of  $\lambda_c$  with  $P_2$ , when  $R_1, R_2$  were fixed

图 3  $R_1, R_2$  一定,  $P$  变化时的  $\lambda_c$  趋势图

$P$  关系曲线. 可见, 当  $P = 0$  时, 不论在外接触或内接触时,  $\lambda_c$  都达到最小值, 但并不等于 0, 原因是尽管此时两接触体间的接触应力为 0, 但由于接触实体的存在, 接触系数亦是存在的. 随着载荷  $P$  的增加,  $\lambda_c$  增大, 但变化幅度不大, 即  $P$  对  $\lambda_c$  的影响不大. 因此, 虽然  $P$  的增加会适当提高真实接触面积, 但总的接触强度还是增加的. 载荷  $P$  的增幅大于真实接触面积的增量. 从图 3 亦可得, 内接触比外接触时的  $\lambda_c$  大, 因此对于相同载荷, 内接触对改善强度较有利.

另外, 当  $R_1$  不变时, 增加  $R_2$  对提高  $\lambda_c$  有利. 当  $R_2 = R_1$  时, 为极限情况. 对于外接触,  $\lambda_c < 1$ ; 而对于内接触, 此时相当于两曲面完全接触,  $\lambda_c = 1$ .

### 1.5 接触点分布函数 $n(a)$ 的修正

利用式 (4.9 和 3) 可得:

$$n(a) = \lambda_c n(a) = \lambda_{0c} P^{c_{2x}} \frac{D}{2} \frac{a_1^{D/2}}{a^{(D/2+1)}} \quad (11)$$

### 1.6 两圆柱接触分形模型公式的建立

由总的真实接触面积  $A_r = \int_0^{a_1} n(a) a da$  可知, 引入  $\lambda_c$  后的真实面积:

$$A_r = \lambda_c \int_0^{a_1} n(a) a da = \lambda_c A_r \quad (12)$$

因  $\lambda_c < 1$ , 故  $A_r < A_r$ , 因此对于相同载荷  $P$ , 将使应力增加  $\lambda_c$  倍. 由此可见,  $\lambda_c$  越大, 接触强度越小.

将式 (11) 代入式 (1) 可得总载荷. 因  $a_1$  与  $a_c$  的不同, 可将载荷的形式分为两类给出:

若  $a_1 > a_c$  时, 接触体发生弹塑性变形, 载荷可分 2 种情况:

(1)  $D = 1.5$

$$P^* = \frac{[P_1^* (A_r^*) A_a E / \lambda_{0c}]^{\frac{1}{1+c_{2x}}}}{A_a E} \quad (13)$$

式中:  $P^* = \frac{P}{A_a E}$  代表载荷的无量纲数.  $A_r^* = \frac{A_r}{A_a}$  代表无量纲真实面积.

$$P_1^* (A_r^*) = \frac{4 \sqrt{G^*}^{(D-1)}}{3} g_1(D) A_r^{*(D/2)} \left[ \left[ \frac{(2-D) A_r^*}{D} \right]^{(3-2D)/2} - a_c^{*(3-2D)/2} \right] + K \phi g_2(D) A_r^{*D/2} a_c^{*(2-D)/2} \quad (D = 1.5) \quad (14)$$

式中:  $G^*$  为粗糙度幅值,  $\phi$  为材料性质.

(2)  $D = 1.5$

$$P^* = \frac{[P_2^* (A_r^*) A_a E / \lambda_{0c}]^{\frac{1}{1+c_{2x}}}}{A_a E} \quad (15)$$

$$P_2^* (A_r^*) = \sqrt{G^*}^{1/2} \left[ \frac{A_r^*}{3} \right]^{3/4} \ln \left[ \frac{A_r^*}{3a_c^*} \right] + \frac{3K\phi}{4} \left[ \frac{A_r^*}{3} \right]^{3/4} a_c^{*1/4} \quad (D = 1.5) \quad (16)$$

若  $a_1 < a_c$  时,仅发生塑性变形,此时

$$P^* = K\phi A_r^* \quad (17)$$

式(13~17)为两圆柱曲面接触的分形模型.

当  $a_c^* \rightarrow 0$ ,分形接触模型的载荷与面积呈如下关系:

$$P^* \sim A_r^{*(3-D)/(2(1+C_2^x))} \quad (18)$$

即:

$$P^* \sim A_r^{*\left(\frac{3-D}{2} \frac{2R_1R_2}{2R_1R_2 \pm R_1 + R_2}\right)} \quad (19)$$

由式(18)可见载荷与面积呈指数关系.这与早期研究发现的实际接触面积  $A_r$  与作用在表面的载荷的关系相一致,因此上述模型可信.另外,指数不仅与分形维数  $D$  有关,而且还与圆柱体的接触半径及接触方式有关.因此,此模型能综合考虑传统接触模型和分形模型的影响因素,因而更具准确性和全面性.

## 2 圆柱体分形模型的预测

### 2.1 圆柱分形模型与 M-B模型对比及预测

图 4给出了在一定参数下真实接触表面和弹性

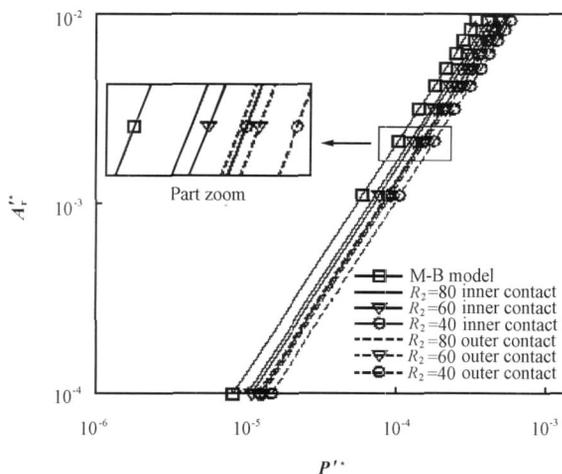


Fig 4 Predictive influence by radius of  $R_1$  and  $R_2$

图 4 圆柱半径  $R_1$  和  $R_2$  对 M-B分形模型和圆柱分形模型预测结果的影响

接触表面的预测结果.可见模型的总体趋势正确.从图 4可得,2种模型的曲线类似,但圆柱分形模型曲线趋于 M-B分形模型下方,说明圆柱接触时的应力增加了,因此接触情况比 M-B模型差.这与实际情况吻合,因为圆柱表面接触为高副接触,在相同载荷

下的接触面积减小,因而接触强度增加.

### 2.2 圆柱分形模型与 Hertz模型强度计算分析

如图 1,设两圆柱体的半径:  $R_1$  为 1 000 N,  $R_2$  设为可变,圆柱体的宽度  $B$  为 50 mm,设材料均为钢,并取其泊松比 均 0.3,弹性模量均为  $2.06 \times 10^5$ ,受到的径向载荷为  $P = 1 000$  N.采用 Hertz理论和圆柱分形模型对其接触强度进行计算.

由 Hertz理论可知:两圆柱间的平均接触强度可由下式计算<sup>[3]</sup>:

$$P_{ave} = \frac{W}{4} \sqrt{\frac{WE}{R}} \quad (20)$$

式中:  $P_{ave}$  为两圆柱间的平均接触应力,  $W$  为单位长度的载荷 (N/mm),  $E$  为综合弹性模量,  $R$  为综合曲率半径,  $1/R = 1/R_1 \pm 1/R_2$  (“+”为外啮合,“-”为内啮合).

由式(20)可得  $P_{ave} - R_2$  的变化关系曲线.

在圆柱分形模型中,取分形维数  $D = 1.5$ ,材料性质参数  $\phi = 0.01$ ,粗糙度幅值参数  $G = 10 \times 10^{-5}$ ,名义接触面积  $A_n = 0.1 \text{ mm}^2$ ,由式(13~17)可得  $P_{ave} - R_2$  之间的关系曲线.

图 5为 Hertz模型和圆柱分形模型的计算结

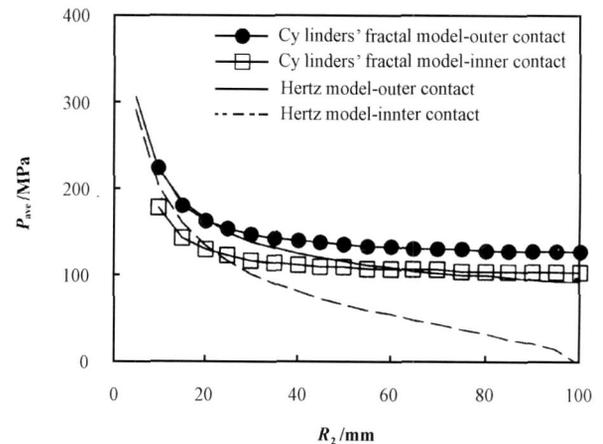


Fig 5 Contrast of contact stress calculation with cylinders' fractal model and Hertz model

图 5 相同条件下的圆柱分形模型和 Hertz模型接触强度计算对比

果.可见,圆柱分形模型的计算结果与传统 Hertz接触模型理论一致.但圆柱分形模型所得的结果大于 Hertz模型.

另外,圆柱半径对接触强度的影响趋势也一致,即在其余变量和  $R_1$  不变时,不论是内接触或外接触,随着  $R_2$  增加,相同载荷将得到更大的真实接触面积,使得接触应力下降,因此适当增加圆柱体的半

径较有利,同时内接触形式优于外接触形式。

### 3 结论

a 建立了圆柱体接触分形接触模型。

b 在所建立的模型中,载荷与面积呈指数关系,其指数不仅与分形维数  $D$  有关,还与圆柱体的接触半径及接触方式有关。此模型能正确反映两接触体的应力状态,同时弥补了 M-B 模型不能考虑接触体的宏观特性以及 Hertz 模型不能考虑接触体微观特性的不足。

c 由圆柱体接触分形接触模型可推导出两球体的接触模型或任意曲面的接触模型,还可进一步推导齿轮的分形接触模型,为齿轮的工作状态研究及其强度分析提供理论依据。

### 参考文献:

- [1] 杜庆华. 弹性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [2] 濮良贵, 纪名刚. 机械设计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [3] Bhushan B. Introduction to Tribology [M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [4] Thomas L, Warren T L, Krajcinovic D. Random cantor set models for the elastic-perfectly plastic contact of rough surfaces [J]. Wear, 1996, 196: 1-15.
- [5] 贺林, 朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展 [J]. 摩擦学报, 1996, 16(4): 375-384.
- [6] He L, Zhu J. Fractal model for contact of rough surfaces [J]. Tribology, 1996, 16(4): 375-384.
- [7] Majumdar A, Tien C L. Fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. Wear, 1990, 136(2): 313-327.
- [8] Majumdar A, Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1990, 112: 205-216.
- [9] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113: 1-11.
- [10] Mandelbrot K L. Stochastic models for the earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for Islands [J]. Proceedings of the National Academy of Science, USA, 1975, 72: 3 825-3 838.
- [11] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113: 1-11.
- [12] Yamada K, Takeda N, Kagami J, et al. Mechanisms of elastic contact and friction between rough surfaces [J]. Wear, 1978, 48: 15-34.
- [13] Bhushan B. The real area of contact in polymeric magnetic media: Experimental data analysis [J]. ASLE Transactions, 1985, 28: 181-197.
- [14] Bhushan B, Dugger M T. Real contact area measurements on magnetic rigid disks [J]. Wear, 1990, 137(1): 41-50.

## Research of Fractal Contact Model on Contact Carrying Capacity of Two Cylinders' Surface

HUANG Kang, ZHAO Han, CHEN Qi

(School of Mechanical and Automotive Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** A new fractal contact model of two cylinders is set up through combining the M-B fractal contact model and traditional Hertz model. The model shows that the load and area meet exponential relationship. The exponent is not only affected by the fractal dimension, but also by the contact radius and contact style. After the contrastive analysis and calculation examples of contact stress with the M-B model and Hertz model, it is proved that the fractal contact model of cylinders' surface can correctly reflect the stress status of two cylinders. The establishment of this model supplies theoretical basis for stress analysis and optimized design of related mechanical product, such as gear and bearing.

**Key words:** fractal contact model, cylinders, carrying capacity

**Author:** HUANG Kang, male, born in 1968, Professor, e-mail: hfut\_chen@yahoo.com.cn