中国科学 : 数学　2015 年　第 45 卷　第 1 期 : 1 ∼ 8
link.springer.com　math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综　述

等距线性延拓问题

定光桂

南开大学数学科学学院, 天津 300071
E-mail: ding_gg@nankai.edu.cn

收稿日期: 2014-04-21; 接受日期: 2014-11-09
国家自然科学基金 (批准号: 11371201) 资助项目

摘要　本文引入了两个赋范空间的单位球面间等距映射的延拓问题, 并且列出了相关问题的一些重要结果和近期的进展.

关键词　赋范空间　赋准范空间　等距延拓　等距映射　1-Lipschitz 映射

MSC (2010) 主题分类　46A22, 46B02, 46B04, 46B20, 46B22

1　引言

"等距延拓" 问题自提出以来便引起了众多 Banach 空间学者极大的关注, 该问题由 Tingley [1] 于 1987 年在著名几何杂志《Geom Dedicata》上首先提出:

问题 1.1　如果 E 和 F 是两个实 Banach 空间, V_0 是单位球面 $S(E)$ 和 $S(F)$ 间的满等距映射, V_0 是否一定存在一个等距的仿射延拓, 即是否存在一个仿射的等距映射 $V : E \to F$ 使得 $V|_{S(E)} = V_0$?

Tingley 问题是一个很好的数学理论问题, 因为: 首先, 该问题很容易了解 (理解); 其次, 该问题很难解决; 其三, 在该问题解决之前我们仍然可以做一些工作.

从内容而言, Tingley 问题也是一个很好的数学问题. 事实上, 等距算子的研究起始于 20 世纪 30 年代, 在Banach 空间理论中占有重要的地位, 在度量几何、空间同构和等价理论和旋转与平移运动理论等研究中都有着重要的作用, 因此其获得迅速有效的发展, 其研究内容也在不断地扩大. Banach 空间之间的等距算子保持了空间的度量结构, 而其与线性算子的关系一直是学者们关心的问题. 早在 20 世纪 30 年代开始, 人们注意的是: 空间中的 "满" 等距是否为线性的, 因此有了著名的 Mazur-Ulam 定理 (两个实 Banach 空间之间的满等距算子一定是线性算子的平移). 至今, 对于一般的赋准范空间, 这仍然是一个未解决的研究专题. 由于现实中人们看到的均是在一个小范围内定义的等距运动, 由此又产生了上面的 "等距延拓" 问题.

Banach 空间单位球面间等距映射的 "等距延拓" 问题作为 Mazur-Ulam 定理进一步深入的研究, 必将促进对空间内部结构 (特别是空间几何理论, 同构理论) 的认识, 并对算子的表现理论, 可补子空间理论, 不动点原理以及度量几何的一些专题的研究均有很大意义, 并由此对数学, 物理, 优化和控制以及经济数学均会产生一定的应用和理论意义.

以下三位数学家在为本文作者申报 2012 年天津市自然科学奖的推荐信中, 对于上述问题有如下评论. 泛函分析著名国际权威专家 Odell 教授讲到 "定光桂教授和他指导的学生们研究的等距延拓问

英文引用格式: Ding G G. On the linearly isometric extension problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 1–8, doi: 10.1360/N012014-00075

题是一个 25 年还没有得到解决的非常困难的问题. 关于该问题, 定教授和他的学生们取得了最为领先和最为深刻的结果. 很少有人愿意付出如此长的时间和辛苦, 也由此可见到他 (们) 的坚韧不拔的精神." (Odell 教授任教于美国 Texas 大学 Austin 分校, 很多著名 Banach 空间专著中都专门把 Odell 定理当做一节来讲述, 例如 Springer 出版的 Diestel 的著作《Sequences and series in Banach paces》. 非常不幸的是他在 2013 年 1 月 9 日因心脏病突发而去世.)

算子空间理论的奠基人阮忠进教授说到: "等距延拓问题的重要性在于, 如果该结论成立的话, 一个映射在单位球面上的局部几何性质将决定它在整个空间中的性质. 定光桂教授建立了一支在 Banach 空间理论前沿很强和很活跃的中国研究学术队伍, 这是很特别和重要的突出贡献." (阮忠进教授现任教于美国 Illinois 大学 Urbana-Champaign 分校, 许多算子空间和算子系统的教材中都把著名的 Ruan's Theorem 作为讲述的基础.)

著名泛函分析学者 Muhly 教授 (曾为《Proc AMS》编委) 说到: "这些研究成果对于理解 Banach 空间几何结构有着重要的作用, 同时可应用于最优化问题及其他一些工程问题, 计量经济学的选择问题及其他一些商业和金融问题的研究."

由此可见, "等距延拓" 是一个很困难、同时又是一个越来越重要的问题. 我们希望本文可以鼓励更多的数学工作者参与到该问题的研究中来.

二十几年来, 对于上述等距线性延拓问题, 虽然出现了许多创造性的工作成果, 但是对一般抽象的赋范空间而言, 即使是在 2 维的空间中至今都还没有明确的答案.

迄今为止, 我们只是利用特殊的性质和方法在一些经典的赋范空间中解决了该问题. 这个富于挑战性的问题仍然有很多工作需要我们去做. 它也要求我们对赋范空间的几何、分析和代数性质有很好的理解. 因此, 在对此问题所做的研究中, 即使你没有做出什么创新的成果, 你也必定会对所研究空间的各种特性 (特别是范数特性和空间几何特性) 有很好的掌握, 因此也是有意义的.

2 初始的结果

对于这个问题, 我们只考虑 "实" 赋范空间, 因为这个问题在复的赋范空间中显然是不成立的. 例如, 当 $X = Y = \mathbb{C}$ 时, 令 $V_0(x) = \bar{x}$ (当 $|x| = 1$ 时), 则得到上述结论. 同样地, 对于上述问题, 我们常常只考虑 "满" 的等距算子. 因为对于两单位球面上 "非满" 的等距算子, 它们不能被等距线性延拓的例子是不难得到的, 可见下面反例.

反例 2.1 设 V_0 为从 $\ell^\infty_{(2)}$ (即 2 维的 ℓ^∞ 型空间) 单位球面 $S(\ell^\infty_{(2)})$ 到单位球面 $S(\ell^\infty_{(3)})$ "内" 的等距算子, 定义如下: $V_0[(\xi_1, \xi_2)] = (\xi_1, \xi_2, \sin\xi_1)$, $\forall (\xi_1, \xi_2) \in S(\ell^\infty_{(2)})$, 那么, V_0 虽然可以等距延拓为从全空间 $\ell^\infty_{(2)}$ 到 $\ell^\infty_{(3)}$ "内" 的算子 (取值形式不变), 但其显然不是一个线性算子.

在文献 [2] 中, 张伦构造出了一个非常好的反例. 从此例中我们可以看出相应的 "非满" 等距算子, 即使延拓为全空间上定义的等距算子, 也是不可能的. 该例子如下:

例 2.2 构造从 $S_1(l^\infty_{(2)})$ 到 $S_1(l^\infty_{(3)})$ 的算子 V_0 如下,

$$V_0((\xi_1,\xi_2)) = \begin{cases} (1, \frac{3}{4}\xi_2, \xi_2), & \xi_1 = 1, \quad \xi_2 \geqslant 0; \\ (-1, \xi_2, \frac{3}{4}\xi_2), & \xi_1 = -1, \quad \xi_2 \geqslant 0; \\ (\xi_1, 1 - \frac{1}{4}\xi_1, 1), & \xi_2 = 1, \quad \xi_1 \geqslant 0; \\ (\xi_1, 1, 1 + \frac{1}{4}\xi_1), & \xi_2 = 1, \quad \xi_1 < 0; \\ (\xi_1, \xi_2, \xi_2), & \xi_2 < 0. \end{cases}$$

则 V_0 为从 $S_1(l^\infty_{(2)})$ 到 $S_1(l^\infty_{(3)})$ 的等距算子, 但它不能延拓为整个空间 $l^\infty_{(2)}$ 上的线性算子或等距算子.

在上述 Tingley 文献 [1] 中, 他仅得到了如下结果: 如果 E 和 F 均是有限维的赋范空间, 则对其单位球面间任何 "满" 的等距算子 V_0, 均有 $V_0(-x) = -V_0(x), \forall\, x \in S(E)$, 也即 V_0 是一个 "奇算子" .

对于上述结论, 我们在文献 [3] 中则给出下面十分有用的结果.

定理 2.1 假设 E 是 "严格凸" 的赋范空间, F 是任意赋范空间. 如果 V_0 是一个从单位球面 $S(E)$ 到 $S(F)$ "内" 的映射, 且有 $-V_0[S(E)] \subset V_0[S(E)]$ 及 $\|V_0(x) - V_0(y)\| \leqslant \|x - y\|$ $(\forall\, x, y \in S(E))$, 则 V_0 是 "单射", 而且有 $V_0(-x) = -V_0(x)$ $(\forall\, x \in S(E))$.

注 2.1 对于上述 Tingley 问题 (即: 单球面间满等距算子的等距线性延拓问题), 从我们二十多年的工作体会, 我们猜想这个问题的结论应该是肯定的. 但遗憾的是, 虽然问题提出已经 27 年了, 但是即使对于任意 2 维的赋范空间, 其回答是肯定或者否定, 我们仍不得知. 我的学生们和我, 至今只是将所有涉及古典 Banach 空间 (即: 上述定义域或值域空间中有一个为该空间) 的问题基本解决了.

3 对于同类型的数列空间

在文献 [3] 中, 我们已经在 Hilbert 空间之间正面地回答了上述等距延拓问题. 由此作为特例, 我们当然也就解决了两 $\ell^2(\Gamma)$ 型数列空间之间的 Tingley 问题 (其中 Γ 是任意指标集). 而在文献 [4–8] 中, 利用数列空间 $\ell^p(\Gamma)$ $(p > 1, p \neq 2)$, $\ell^1(\Gamma)$ 以及 $\ell^\infty(\Gamma)$ 它们各自空间范数的特性, 我们均可得到上述 3 类空间单位球面之间 "满等距算子" 的下面 (形式上完全相同的) 表现定理.

满等距算子的表现定理 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 且 $p \neq 2$, V_0 是一个从单位球面 $S(\ell^p(\Gamma))$ 到 $S(\ell^p(\Delta))$ 的满等距映像. 那么, 必存在从指标集 Δ 到 Γ 之满的 "1-1" 映射 π 以及一族绝对值等于 1 的实数 $\{\theta_\delta : \delta \in \Delta\}$, 使得

$$V_0(x) = \sum_{\delta\in\Delta} \theta_\delta \xi_{\pi(\delta)} d_\delta, \quad \forall\, x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi_\gamma e_\gamma \in S(l^p(\Gamma)),$$

其中, $\ell^p(\Gamma)$ 中的元 e_{γ_0} 代表 "仅在指标 $\gamma_0 \in \Gamma$ 上取 1, 其他指标均取 0 的元", $\ell^p(\Delta)$ 中的元 d_{δ_0} 则代表 "仅在指标 $\delta_0 \in \Delta$ 上取 1, 其他指标均取 0 的元".

有了上面有关单位球面间满等距算子的表现定理, 我们立即容易导出: 在上述 $\ell^p(\Gamma)$ 型空间 $(1 \leqslant p \leqslant \infty, p \neq 2)$中, Tingley 等距线性延拓问题的回答是肯定的.

注 3.1 从上述有关 $\ell^\infty(\Gamma)$ 型空间的结论, 我们不难同样地得出有关空间 $c(\Gamma)$ 和 $c_0(\Gamma)$ 的相应肯定结论. (这里, 空间 $c_0(\Gamma)$ 代表这样的数族 $x \triangleq \{x(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ 的全体, 其中对于每个元 x, 必存在某个数 $\xi_{(x)}$, 使得对于任意 (小) 的正数 ε, $\{\gamma : |x(\gamma) - \xi_{(x)}| > \varepsilon, \gamma \in \Gamma\}$ 均为 "有限" (指标) 集; 而空间 $c_0(\Gamma)$, 则在上不等式中, 无论对于空间的什么元 x, 那里的数 $\xi_{(x)}$ 均恒为 0.)

值得指出的是, 虽然在泛函分析的经典名著文献 [9] 中, Banach 曾给出过某些经典 Banach 数列空间上线性等距算子的表现定理. 但是, 在那里, 空间必须是有 "可数基" 的 (从而当然是 "可分的"), 并且算子不但是线性的, 而且是定义在全空间上的. 而在我们讨论的上述空间中, 每一个均可以是 "不可分" 的, 并且等距算子的定义域也仅仅在该空间的一个单位球面上. 因此, 即使作为等距算子的表现理论, 以上结果无论从证明方法或者其所得结果而言, 也均是很有意义的.

对于 "F-范" 空间 (即: "赋准范" 空间) (ℓ^{β_n}), 在这里, 此空间的准范数是如下定义的:

$$\|x\|^* \triangleq \sum_n |\xi_n|^{\beta_n}, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in (\ell^{\beta^n}),$$

其中, 正数 $\beta^n < 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. 我们显然可以看出: 熟悉的赋准范空间 (ℓ^β) $(0 < \beta < 1)$ 乃是此空间的特例. 在文献 [10] 中, 安桂梅通过上述证明思路和方法, 同样地导出了赋准范空间 (ℓ^{β^n}) 单位球面间满等距算子的类似表现定理, 从而也获得了对此类空间的等距线性延拓的结果.

而对于赋准范空间 (s), 也即 "所有数列之全体", 其中, 该元的准范数定义为

$$\|x\|^* \triangleq \sum_n \frac{1}{2^n}\ \frac{|\xi_n|}{1+|\xi_n|}, \quad \forall\, x = \{\xi_n\} \in (s).$$

在文献 [11] 中, 傅小红利用上述论文证明中的某些方法, 利用到 (s) 空间准范的特性, 同样也获得了在此准范空间中相应等距线性延拓性质的一些肯定结果.

4 同类型空间 "非满" 等距算子间的延拓定理

在前面提及的文献 [3] 中, 我们已经对于 Hilbert 空间 (包含了 $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ 空间及 $\ell^2(\ \Gamma)$ 空间) 中的 " 非满" 等距算子得到其等距线性延拓的正面结果. 更一般地, 人们自然会联想到空间 $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(p > 1)$ 的情况.

王健首先给出有关 AL_p 空间 (即 "抽象" L_p空间) $(p > 0, p \neq 2)$ 的等距线性延拓结论, 在文献 [12] 中, 她对于 "原子" 的 AL_p 空间 (实质上是 "离散型" 的 AL_p 空间), 应用有关 "Banach 格" 的一些性质 (如 "带状投影"、"主投影带" 等), 在假设了另外两个条件下, 得到了有关等距延拓的结论.

值得高兴的是, 正如我们的猜想一样, 其实上面的附加条件均是不必要的, 在文献 [13] 中, 侯志彬仅用了相应空间的一些基本特性, 运用了一些简单技巧, 无需任何附加条件, 他对于任意空间 $L^p(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ 到 $L^p(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ $(p > 0, p \neq 2)$ 之球面上的 "非满" 等距算子, 非常简洁地得到了其有关等距线性延拓的完满肯定结果.

而当利用到以上侯志彬的结果, 杨秀忠在文献 [14] 中, 将相应的等距线性延拓问题推广到相应 "向量值" 的函数空间 $L_p(\mu, X)$ 来讨论 (此处, X 是 "严格凸" 赋范空间) 并在一定条件下导出了相应的等距线性延拓的结论.

5 不同类型空间等距算子间的延拓定理

5.1 对于 $C(\Omega)$ 空间

在文献 [15] 中, 我们第一次研讨了, 从一个经典 Banach 空间到任意一个 Banach 空间之间其单位球面上 (满与非满) 等距算子的线性延拓问题. 在该文中, 我们以一个不等式给出了从任意赋范空间 E 到 $C(\Omega)$ 空间 (非满) 等距算子可从单位球面等距线性延拓的充分条件, 此即:

(i) 如果 E 的单位球面上光滑点之集 $sm[S(E)]$ 是在 $S(E)$ 稠密的.

(ii) 对于任意的点 $x \in S(E)$ 与点 $\widetilde{x} \in sm[S(E)]$, 均有

$$\|V_0(x) - |\lambda| V_0(\widetilde{x})\| \leqslant \|x - |\lambda|\widetilde{x}\|, \quad \forall\, |\lambda| < 1;$$

这里, V_0 是从单位球面 $S(E)$ 到 $S[C(\Omega)]$ 的 "非满" 等距算子.

两年后, 杨秀忠等人在文献 [16] 中以及方习年教授等在文献 [17] 中, 各自均得到了下面推论, 他们指出: 实际上, 对于任意两个赋范空间 E 和 F, 只要它们单位球面间的 "非满" 等距算子 V_0 满足 (比上面强的) 类似不等式:

$$\|V_0(\check{x}) - |\lambda|V_0(\hat{x})\| \leqslant \|\check{x} - |\lambda|\hat{x}\|, \quad \forall\ \check{x}, \hat{x} \in S(E),\ \forall |\lambda| < 1.$$

那么, V_0 必可延拓为全空间 E 上的等距算子 V, 因此, 当 V_0 是 "满" 算子时, 此延拓算子还是线性的 (因为, Mazur-Ulam 定理). 随后, 方习年教授等在文献 [18] 中, 终于得到了十分完满的结果, 他们证明了, 对于任意赋范空间 E 到 $C(\Omega)$ 空间 (这里, Ω 是 " 紧" 的 "度量" 空间) 其单位球面的 "满" 等距算子必可满足上述不等式. 因此, 也就解决了对于任意赋范空间到上述 $C(\Omega)$ 空间的 Tingley 问题.

注 5.11 在即将介绍的文献 [20] 中, 刘锐等将上面空间 $C(\Omega)$ 之 Ω 的 "距离性" 假设去掉了.

5.2 对于 $L^\infty(\mu)$ (更一般的 $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ 空间)

对于任意赋范空间 E到 $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ 型空间 (即以 " sup" 定义范数的诸如 $c(\Gamma), \ell^\infty(\Gamma)$ 或 $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ 等空间) 的等距线性延拓问题, 本文作者和刘锐、张伦、傅小红、李磊以及谭冬妮等各自均做了不少工作 (可参看文献 [19–24]), 这里, 特别值得指出的是在文献 [23] 中, 刘锐、张伦给出了有关 $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ 空间到任意 Banach 空间 E 的 Tingley 问题肯定的回答. (同时, 如前所述, 此文还将方习年等研讨的空间 $C(\Omega)$ 中之 Ω 去掉了 "度量化" 的条件, 而仅保留 "紧" 性.)

5.3 对于 $L^1(\mu)$ 空间

至于空间 $L^1(\mu)$ 与任意 Banach 空间之相应的 Tingley 问题, 对于数列空间 ℓ^1 时的情况可以参阅文献 [25, 26], 而在文献 [27, 28]中, 我们则完满地解决了更一般的有关空间 AL (即: 抽象的 L- 空间, 含空间 $L(\Omega, \Sigma, \mu)$ 等), 到任意 Banach 空间 E 的 Tingley 问题.

5.4 对于 $\ell^p(\Gamma)$ 空间及 $L^p(\mu)$ 空间 ($p > 1$)

原来我们一直以为有关 ℓ^p $(p > 1)$ 与 E 空间之间的等距线性延拓问题, 可能是较容易的, 然而, 恰恰相反, $\ell^p(L^p(\mu))$ $(p > 1)$ 空间的 "自反性"、"一致凸"、"一致光滑性" 等好特性并没有帮上多大的忙. 因此, 曾经几年来, 毫无进展. 而后, 方习年教授等终于创造出了一种非常技巧的方法, 非常漂亮地正面解决了相应的 Tingley 问题, 此文于 2010 年发表于《中国科学: 数学》(英文版) 上 (参看文献 [29]). 至于相应的函数空间, 谭冬妮利用有关的算子表现定理则获得了 $L^p(\mu)$ 空间与任意 Banach 空间之间有关 Tingley 问题的肯定回答 (参看文献 [30]). 此外, 相应地, 对于赋准范空间 L^β $(0 < \beta < 1)$ 的情况, 亦可见谭的文章 [31].

6 关于其他赋范空间的一些结果

除了上面所讨论的经典 Banach 空间之外, 对于某些赋范空间同样地也有一些有关 Tingley 问题研讨的结果.

在文献 [32] 中, 傅小红等对空间 $s_p(\alpha)$ (这里, $p \geqslant 1, p \neq 2; \alpha \geqslant 0$) 也即类似 "离散的" Sobolev 空间, 同样地导出了其单位球面间等距算子的特征, 并由此得到相应的等距线性延拓的结论.

在文献 [33] 中, 潭冬妮则在一般的 James 空间 J_p $(p > 1)$ 上给出了其单位球面上满等距算子的特征, 并由此得到了上述 Tingley 问题的肯定回答. 随后, 她又在文献 [34] 中, 对于 Tsirelson 空间同样也相应地得到了一些好结果.

作为 Tingley 问题的扩展, 人们也可以在一些特殊空间 (例如, “严格凸” 空间或者 Hilbert 空间等) 的各种形式的 “直和” 空间中来研讨上述等距算子的等距线性延拓问题. 较早的工作可参看王日生等的三篇文章 [35–37], 而较新的工作则可参看刘锐、高金梅、李建泽等四篇文章 [38–41].

7 非扩张算子 (即 1-Lipschitz 算子) 的等距延拓

对于 Tingley 问题, 除了可以扩展到对于 “赋准范” 空间来讨论, 对于 “非满” 的 (单位球面间) 等距算子来讨论之外, 亦可以扩展到对于“非扩张” (即: 1-Lipschitz) 算子来讨论. 也即在特定的空间之单位球面上定义的算子 T_0 (其满足: $\|T_0x - T_0\check{x}\| \leqslant \|x - \check{x}\|$), 其是否可以延拓为全空间上定义的等距线性算子? 更一般地, 给出 1-Lipschitz 算子在什么条件下可以成为一个等距算子?

对于上述扩展的问题, 我们已经做了不少工作. 早在 12 年前, 从前面引过的文献 [3] 中, 我们已经得到: 对于两个 Hilbert 空间单位球面 $S(E)$ 和 $S(F)$ 的 “非满” Lipschitz 映像 T_0 只要满足: $-T_0[S(E)] \subset T_0[S(E)]$ (也即 T_0 的 “值域” 是 “对称集”), 那么, T_0 就可等距线性延拓为 E 上的算子. 由此可知: 两个 Hilbert 空间单位球面上的 “满” 1-Lipschitz 映像必为 “等距” 映像.

而在文献 [42] 中, 我们则将以上结果推广到空间 AL^p (即: 抽象的 L^p 空间, 其包含 ℓ^p 与 $L^p(\mu)$ 等) ($p > 2$). 由此同样得知: 两个 AL^p 空间 ($p > 2$) 单位球面上的 “满” 1-Lipschitz 映像必为 “等距” 映像. (类似地, 当 $1 < p < 2$ 时, 则 AL^p 球面之间的 “ 扩张” 映像也必为 “等距” 映像.)

而在文献 [43, 44] 中, 我们则更进一步得到了有关赋范空间中 1-Lipschitz 可成为 “等距” 算子的某些充分条件. 此外, 对于赋范和赋准范空间中有关 1-Lipschitz 映像的研讨, 则可参看王瑞东的文章 (参考文献 [45, 46]), 以及文献 [47–49].

8 最近的工作

对于非经典 Banach 空间, 也即, 对于一般的 Banach 空间的情况, 至今, 未见有大的进展.

对于 “有限维” 空间, 特别是其单位球面形如 “多面体” 的特殊情况, 程立新教授等人在文献 [50] 予以了讨论. 而在 Kadets 等人的文献 [51] 中则得到了肯定的结果. 此外, 谭冬妮等人的文献 [53] 和 [54] 中也涉及了上述相关问题并有一些有启发性的结论.

9 后记

总之, 我们必须再次指出: 上述 Tingley 问题提出已经过了 27 年了, 并且在开始 15 年几乎没有见到任何好的工作. 虽然近 12 年来, 本文作者和学生们以及一些数学教授们做了不少工作, 但是对于一般的 Banach 空间, 此一问题的研究仍没有太大的突破性的进展, 虽然国际上一些著名数学家均猜想, 此一问题的回答应该是正面的. 因此, 本文的目的是希望引起更多人的关注, 并积极热情地投入到此问题的研究中来.

古语说的好: “海阔凭鱼跃, 天高任鸟飞”. 既然此一数学问题如此有意义又如此不易解决, 那么, 这就给有志之数学工作者们提供了一个 “大有用武之地” 的地方. 我们热切期望此一问题在不久的将来, 被我国的数学战士们攻克.

参考文献

1 Tingley D. Isometries of the unit spheres. Geom Dedicata, 1987, 22: 371–378
2 Zhang L. On the isometric extension problem from the unit sphere $S(l^{\infty}_{(2)})$ into $S(l^{\infty}_{(3)})$. Acta Sci Nat Univ Nankai, 2006, 39: 110–112
3 Ding G G. The 1-Lipschitz mapping between the unit spheres of two Hilbert spaces can be extended to a real linear isometry of the whole space. Sci China Ser A, 2002, 45: 479–483
4 定光桂. 空间 $l^p(\Gamma)$ $(p>1)$ 的单位球面间等距算子的延拓. 中国科学A 辑, 2002, 32: 991–995
5 Ding G G. The isometric extension problem in the unit spheres of $\ell^p(\Gamma)$ $(p>1)$ type spaces. Sci China Ser A, 2003, 46: 333–338
6 Ding G G. The representation theorem of onto isometric mappings between two unit spheres of $l^1(\Gamma)$ type spaces and the application to the isometric extension problem. Acta Math Sin (Engl Ser), 2004, 20: 1089–1094
7 定光桂. 两个 l^{∞} 型空间单位球面满等距映射的表现理论及其在等距延拓问题上的应用. 中国科学 A 辑, 2004, 34: 157–164
8 Ding G G. The representation of onto isometric mappings between two spheres of ℓ^{∞}-type spaces and application on isometric extension problem. Sci China Ser A, 2004, 47: 722–729
9 Banach S. Theorič des opĕrations Linĕaires. Warszawa: Monografje Matematyczne, 1932
10 An G. Isometries on unit spheres of (l^{β_n}). J Math Anal Appl, 2005, 301: 249–254
11 Fu X N. Isometries on the space(s). Acta Math Sin (Engl Ser), 2006, 26: 502–508
12 Wang J. On extension of isometries between unit spheres of AL_p-*spaces* $(1<p<\infty)$. Proc Amer Math Soc, 2004, 132: 2899–2909
13 Hou Z. The isometric extension of the into mapping between the unit spheres of AL^p-*spaces*$(1<p<\infty)$ (in Chinese). Acta Math Sin (Chin Ser), 2007, 50: 1435–1440
14 Yang X. On extension of isometries between unit spheres of $L_p(\mu)$ and $L_p(\nu,H)$ $(1<p\neq 2$, H is a Hilbert space). J Math Anal Appl, 2006, 323: 985–992
15 Ding G G. On the extension of isometries between unit spheres of E and $C(\Omega)$. Acta Math Sin (Engl Ser), 2003, 19: 793–800
16 Yang X Z, Hou Z B, Fu X H. On linear extension of isometries between the unit spheres of β-*normed* spaces (in Chinese). Acta Math Sin (Chin Ser), 2005, 48: 1199–1202
17 Fang X N, Wang J H. On linear extension of isometries between the unit sphere (in Chinese). Acta Math Sin (Chin Ser), 2005, 48: 1109–1112
18 Fang X.N, Wang J H. On extension of isometries between the unit spheres of normed space E and $C(\Omega)$. Acta Math Sin (Engl Ser), 2006, 22: 1819–1824
19 Ding G G. The isometric extension of the into mapping from a $\mathcal{L}^{\infty}(\Gamma)$-type space to some Banach space. Illinois J Math, 2007, 51: 445–453
20 Liu R. On extension of isometries between unit spheres of $\mathcal{L}^{\infty}(\Gamma)$-type space and a Banach space E. J Math Anal Appl, 2007, 333: 959–970
21 Fu X N. The isometries extension of the into mapping from the unit sphere $S_1(E)$ to $S_1(\ell^{\infty}(\Gamma))$. Acta Math Sin (Engl Ser), 2008, 24: 1475–1482
22 Li L, Ren W Y. On extension of isometries between unit spheres of L^{∞} and E. Quaest Math, 2008, 31: 209–218
23 Liu R, Zhang L. On extension of isometries and approximate isometries between unit spheres. J Math Anal Appl, 2009, 352: 749–761
24 Tan D N. Extension of isometries on unit sphere of L^{∞}. Taiwanese J Math, 2011, 15: 819–827
25 Fang X., Wang J. Extension of isometries between unit spheres of normed space E and $l^1(\Gamma)$ (in Chinese). Acta Math Sin (Chin Ser), 2008, 51: 24–28
26 Ding G G. The isometric extension of an into mapping from the unit sphere $S[l(\Gamma)]$ to the unit sphere $S(E)$. Acta Math Sci (Engl Ser), 2009, 29B: 469–479
27 Ding G G. The isometric extension of into mappings on unit spheres of AL-spaces. Sci China Ser A, 2008, 51: 1904–1918
28 定光桂. AL-空间单位球面上的等距算子的延拓. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 541–555
29 Fang X N, Wang J H. Extension of isometries on the unit sphere of $\ell_p(\Gamma)$ space. Sci China Math, 2010, 53: 1085–1096
30 Tan D N. On extension of isometries between unit spheres of $L^p(\mu)$ and a Banach space. Acta Math Sin (Engl Ser), 2012, 28: 1197–1208
31 Tan D N. On extension of isometries on the unit spheres of L^p-spaces for $0<p\leqslant 1$. Nonlinear Anal, 2011, 74:

6981–6987
32 Fu X N, Stević S. The problem of isometries extension in the unit sphere of the space $S_p(\alpha)$. Nonlinear Anal, 2001, 74: 733–738
33 Tan D N. Some new properties and isometries on the unit spheres of generalized James spaces Jp. J Math Anal Appl, 2012, 393: 457–469
34 Tan D N. Isometries on the unit spheres of the Tsirelson space and the modified Tsirelson space TM. Houston J Math, 2012, 38: 571–581
35 Wang R S, Orihara A. Isometries on the ℓ^1-sum of $C_0(\Omega, E)$ type spaces. J Math Sci Univ Tykyo, 1995, 2: 131–154
36 Wang R S, Orihara A. Isometric between the unit spheres of ℓ^1-sum of strictly convex normed spaces. Sci Nat Univ Nankai, 2002, 35: 38–42
37 Wang R S. Isometries on the l^p-sum of $C_0(\Omega, E)$ type spaces. J Math Sci Univ Tokyo, 1996, 3: 471–493
38 Liu R. Isometries between the unit spheres of l^β-sum of strictly convex normed spaces (in Chinese). Acta Math Sin (Chin Ser), 2007, 50: 228–232
39 Gao J M. Isometries between the unit spheres of $L^{\beta\gamma}$-sum of strictly convex normed spaces. Quaest Math, 2010, 33: 497–505
40 Gao J M, Li G. Isometric extension between the unit spheres of l^p-sum of l^q type spaces. Adv Math (China), 2010, 39: 449–452
41 Ding G G, Li J Z. Isometries between unit spheres of the l^∞-sum of strictly convex normed spaces. Bull Aust Math Soc, 2013, 88: 369–375
42 Ding G G. On linearly isometric extensions for 1-Lipschitz mappings between unit spheres of AL^p-spaces ($p > 2$). Acta Math Sini, 2010, 26: 331
43 Ding G G. The isometries extension 1-Lipschitz mappings on Gateaux differentiability spaces. Sci China Math, 2011, 54: 711–722
44 Ding G G, Ma Y M. How to recognize nonexpansive mappings and isometric mappings. Acta Math Sin (Engl Ser), 2011, 27: 1959–1966
45 Wang R D. On linear extension of 1-Lipschitz mapping from Hilbert space into a normed space. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2010, 30: 161–165
46 Fu X H. Isometries on the space (s). Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2006, 26: 502–508
47 Tan D N. Nonexpansive mappings on the unit spheres of some Banach spaces. Bull Aust Math Soc, 2009, 80: 139–146
48 Tan D N. Nonexpansive mapping and expansive mappings on the unit spheres of some F-spaces. Bull Aust Math Soc, 2010, 82: 22–30
49 Liu R. 1-Lipschitz mappings between unit spheres of Banach spaces. Acta Math Sin (Chin Ser), 2007, 50: 1064–1070
50 Cheng L X, Dong Y B. On a generalized Mazur-Ulam question of isometries unit spheres of Banach spaces. J Math Anal Appl, 2011, 377: 464–470
51 Kadets V, Martin M. Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces. J Math Anal Appl, 2012, 396: 411–477
52 Ding G G, Li J Z. Sharp corner points and isometric extension problem in Banach spaces. J Math Anal Appl, 2013, 405: 297–309

On the linearly isometric extension problem

DING GuangGui

Abstract In this paper, we introduce two extension problems of isometric mappings between unit spheres of two normed spaces and list some important results and recent progress of the related problems.

Keywords **normed space, quasi-normed space, isometric extension, isometric mapping, 1-Lipschitz mapping**

MSC(2010) **46A22, 46B02, 46B04, 46B20, 46B22**

doi: 10.1360/N012014-00075