



Hermite 几何中的 Fino-Vezzoni 猜想

献给沈一兵教授 85 寿辰

李余露, 郑方阳*

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

E-mail: 1320779072@qq.com, 20190045@cqu.edu.cn

收稿日期: 2023-03-06; 接受日期: 2023-11-16; 网络出版日期: 2024-03-25; * 通信作者

重庆市研究生科研创新项目 (批准号: CYB23230)、国家自然科学基金 (批准号: 12141101 和 12071050)、重庆英才项目 (批准号: cstc2021ycjh-bgzxm0139 和 CQYC2021059145) 和最优化与控制学科创新引智基地 111 计划 (批准号: D21024) 资助项目

摘要 Fino-Vezzoni 猜想是近年来非 Kähler 几何研究中的热点问题之一. 该猜想的叙述是, 任给紧复流形, 若其上存在平衡度量又存在多重闭度量, 则必存在 Kähler 度量. 目前针对若干特殊的 Hermite 流形类, 该猜想已经被验证. 本文简要回顾关于该猜想的若干部分性结果, 并对一类特殊的 Lie 复流形验证该猜想: 若紧复流形的万有覆叠为带左不变复结构的 Lie 群, 其 Lie 代数含有 J -不变的余维为 2 的 Abel 理想, 则该猜想在其上成立. 这种情形是“几乎 Abel”情形的一个自然推广.

关键词 Hermite 流形 Chern 联络 平衡度量 多重闭度量 Lie 复流形 Fino-Vezzoni 猜想

MSC (2020) 主题分类 53C55

1 引言

众所周知, 复几何是一门研究复流形的几何、拓扑与函数论性质的数学分支. 其研究方法从大体上说可以粗略地分为代数方法与分析方法两大类: 前者属于代数几何的范畴; 而后者属于复微分几何, 主要运用微积分与多复变函数论等手段进行研究, 这也是本文讨论的范围.

在任何复流形上总存在 Hermite 度量, 即与近复结构相容的 Riemann 度量. 设 M^n 为复流形, g 为其上的一个 Hermite 度量. 设 ω 为相应的 Kähler 形式— M^n 上的一个处处正定的 $(1,1)$ -形式. 若 $d\omega = 0$, 则称度量 g 为 Kähler 的. 若一个复流形上存在 Kähler 度量, 则称这个复流形为 Kähler 型的, 否则称为非 Kähler 型的.

自 20 世纪 50 年代以来, Kähler 几何得到了长足的发展, 人们对 Kähler 型的紧复流形有了较为深入的了解, 许多数学家在此领域作出了贡献, 其中的代表性人物有陈省身、Kodaira (小平邦彦)、Serre、Atiyah、Hirzebruch、Bott、Calabi 和丘成桐等. 两个显然的因素促进了该领域的发展: 一是 Kähler 型流形是一个足够大的研究对象类, 它包含了所有的复射影流形 (简称为代数流形), 即复射影

英文引用格式: Li Y L, Zheng F Y. The Fino-Vezzoni conjecture in Hermitian geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1603–1614, doi: 10.1360/SSM-2023-0048

空间中由一组齐次多项式的公共零点集所形成的紧复子流形, 这是最简单、最自然的构成复流形的方式; 另一个因素是 Kähler 几何的研究相对方便, 因为 Hermite 度量为 Kähler 当且仅当度量的 Riemann 联络 (即 Levi-Civita 联络) 与流形的近复结构也相容, 此时 Riemann 几何与复结构完美匹配, 几何学的结论往往可以直接演绎出流形的复解析性状.

近十余年来, 非 Kähler 几何学的研究得到了蓬勃发展. 这里面的大致原因也有两个: 一方面, 因为紧 Kähler 流形的拓扑结构必须满足很强的限制性条件, 导致绝大多数的紧复流形都是非 Kähler 型的 (后面将对这一论断作进一步说明), 因而研究 (非 Kähler 的) 一般 Hermite 度量的微分几何学性质就有了必要性; 另一方面, 超弦理论中的被称为 Hull-Strominger 系统的模型认为构成物质世界的所谓隐藏空间是一个非常特殊的 3 维紧 Hermite 流形, 即所谓的非 Kähler Calabi-Yau 空间, 因而几何学服务于物理学的天然属性也在很大程度上促进了非 Kähler 几何学的发展.

Hermite 几何学研究的一个基本特点是人们通常会考虑一些特殊的 Hermite 流形类. 因为任何复流形上都有 Hermite 度量, 因而通过对一般 Hermite 度量的微分几何学研究所得到的复解析结论适用于所有复流形, 而关于 n ($n \geq 3$) 维复流形的分类目前还属于完全超出认知的事. 自 20 世纪 80 年代以来, 若干特殊的 Hermite 流形类得到了广泛的研究, 其中最具有代表性的是平衡流形和多重闭流形.

若 $d(\omega^{n-1}) = 0$, 即 Kähler 形式是余闭的, 其中 n 是流形的复维数, 则称 Hermite 度量 g 为平衡的. 具有平衡度量的复流形被称为平衡型的. 平衡度量的定义是由 Michelsohn^[30] 在 1982 年提出的, 作为对 Kähler 条件的一种推广. 当复维数大于等于 3 时, 平衡度量可以是非 Kähler 的. 此后 40 年来, 平衡流形被广泛研究并形成了一类重要的支撑性的特殊 Hermite 流形类. 例如, Alessandrini 和 Bassanelli^[1] 于 1995 年证明了平衡性是双亚纯不变的. 特别地, 任何与 Kähler 流形双亚纯等价的流形都是平衡型的. 又如, 傅吉祥教授与合作者在平衡型流形的性质和构造方面获得了一系列突破性结果, 参见文献 [19] 及相关文献. 此外, 因为所有的扭子空间^[4] 都具有平衡度量, 因而任何有限表示群都可以是某个 3 维紧平衡型流形的基本群.

Kähler 流形的另一种推广是多重闭流形. 若 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$, 则称 Hermite 度量 g 为多重闭的. 在有些数学和理论物理文献中, 这种度量也被称为是 SKT (strong Kähler with torsion) 的. 多重闭的概念最早见于 Bismut^[5] 于 1989 年的文章, 他证明了任何 Hermite 流形上唯一存在一个挠率全反对称的 Hermite 联络. 这个联络今天被称为 Bismut 联络 (Hermite 联络的意思是与度量和近复结构都相容的联络, 它们构成一个无穷维的仿射空间). 1986 年, 物理学家 Strominger^[40] 也发现了 Bismut 联络的具体公式, 并将其运用到了 Hull-Strominger 系统的构造中. 因此在有的文献中, 这个联络也被称为 Strominger 联络. Bismut 联络的挠率 (当写成 $(3, 0)$ 型张量时) 是全反对称的, 因而是一个 3 次微分形式. 用 Hermite 度量的 Kähler 形式 ω 来表达, Bismut 挠率为 $S = \sqrt{-1}(\bar{\partial}\omega - \partial\omega)$. 因而多重闭条件等价于 $dS = 0$, 即 Bismut 挠率 3-形式为闭的.

显然, 平衡和多重闭条件都是 Kähler 条件的自然推广, 但对非 Kähler 紧复流形而言, 这两种特殊的 Hermite 类被猜测是具有互斥性的. 意大利数学家 Fino 和 Vezzoni^[16, 17] 提出了如下的猜想:

猜想 1.1 若紧复流形 M^n 上存在 Hermite 度量 g 和 h , 其中 g 为平衡的, h 为多重闭的, 则 M^n 上必存在 Kähler 度量.

换言之, 该猜想是说任何非 Kähler 型的紧复流形上不可能同时拥有平衡度量和多重闭度量. 这里复流形的维数至少是 3, 因为在复 2 维时平衡等同于 Kähler. 需要注意的是, 在上述猜想中紧性假设很关键, 因为在非紧的情形下, 存在非 Kähler 型流形的例子: 流形上同时具有平衡度量和多重闭度量. 另外, 上述猜想的困难之处主要在于度量 g 与 h 可以是不同的. 根据 Alexandrov 和 Ivanov^[2] 的一个结果可知, 任何既平衡又多重闭的 Hermite 度量必然 Kähler. 为方便读者, 后面也会给出这个定

理的一个简单证明.

Fino-Vezzoni 猜想自问世以来, 吸引了众多复几何学家的关注, 在对该猜想的研究上也出现了大量的部分性结果, 使该猜想在许多特殊的 Hermite 流形类中得到了验证, 因此大家也更为相信该猜想应该成立. Verbitsky^[44] 证明了在任何非 Kähler 型的扭子空间上不能有多重闭度量, 因而上述猜想对所有扭子空间都成立. Chiose^[6] 证明了上述猜想对所有 Fujiki C 类 (即与紧 Kähler 流形双亚纯等价) 流形成立. Fu 等^[20] 证明了上述猜想对一类特殊的 3 维非 Kähler Calabi-Yau 空间成立. Fei^[11] 证明了该猜想对广义 Calabi-Gray 流形成立. Otiman^[32] 证明了该猜想对所有 Oeljeklaus-Toma 流形成立.

此外, Lie 复流形构成一大类特殊的紧复流形, 它们的万有覆盖为 (G, J) , 其中 G 为偶数维的 Lie 群, J 为 G 上一个左不变的复结构. 因此 Lie 复流形可以写成 $M = G/\Gamma$, 其中 Γ 为 (G, J) 自同构群的一个离散子群. 常见的特殊情形是 Γ 为 G 的一个具有光滑紧商的离散子群, 即西格. 当 G 为幂零群时, 称 M 为幂零复流形 (简称为幂零流形). 同样地, 当 G 为可解群时, 称 M 为可解复流形 (简称为可解流形). 任何幂零 Lie 群总含有西格, 而对给定的可解 Lie 群而言, 是否存在西格通常是 Lie 群理论中一个较为困难的问题. 另外, 给定一个偶数维的 Lie 群 G , 其上是否存在左不变的复结构也是一个较为复杂的问题, 取决于 G 的群结构. 显然, G 上的左不变复结构一一对应于其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构 (即可积的近复结构): 向量空间 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 J , 满足 $J^2 = -I$ 和可积性条件

$$[x, y] - [Jx, Jy] + J[Jx, y] + J[x, Jy] = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

对某些特殊的 Lie 代数类, 如所有的实 6 维的幂零 Lie 代数和实 6 维的具有平凡典则线丛的可解 Lie 代数, 哪些具有复结构 (以及复结构的分类) 是已知的.

Fino 和 Vezzoni^[16] 证明了他们的猜想对所有 (具有复结构的) 实 6 维的具有平凡典则线丛的可解 Lie 代数成立. 紧接着, 他们又在文献 [17] 中证明了对 (任意维的、具有复结构的) 幂零 Lie 代数, 若其步长为 2, 则该猜想也成立. 他们同时也猜测, 任何具有多重闭度量的幂零复流形必然步长不超过 2. 这一论断最近被 Arroyo 和 Nicolini^[3] 所证明, 因此 Fino-Vezzoni 猜想对所有幂零流形都成立.

在除幂零流形之外的 Lie 复流形中, 文献 [13, 34] 证明了当 G 为紧半单 Lie 群时, Fino-Vezzoni 猜想成立. Giusti 和 Podestà^[24] 证明了该猜想对非紧实半单 Lie 群上所有的正则复结构都成立. 在 Fino 和 Paradiso 的两篇近期文献 [14, 15] 中, 他们分别在“几乎 Abel” (almost Abelian, 即 $\mathfrak{g}$ 含有余维为 1 的 Abel 理想) 的情形和“几乎幂零的可解群” (即可解 $\mathfrak{g}$ 的 nilradical 具有 1 维的 commutator) 的情形证明了该猜想. 最近, Freibert 和 Swann^[18] 考虑了步长为 2 的可解群, 证明了在一类特殊的情形, 即所谓的纯粹型 (pure type) 时, Fino-Vezzoni 猜想成立.

任给 Lie 复流形 $M = G/\Gamma$, 其中 G 为 Lie 群, J 为 G 上的左不变复结构. 设 g 是 M 上的多重闭 (或平衡) 度量, 将其提升到 G 上, 通过积分取平均的方法, Fino 和 Grantcharov^[12] 及 Ugarte^[43] 证明了 G 上存在左不变的多重闭 (或平衡) 度量. 因此在针对 Lie 复流形来验证 Fino-Vezzoni 猜想时, 不妨假设其上存在左不变的平衡度量 g 和左不变的多重闭度量 h .

此外, Lie 群 G 具有紧商的一个必要条件是 G (或等价地, $\mathfrak{g}$) 为幺模 (unimodular) 的, 即对于任意 $x \in \mathfrak{g}$ 有 $\text{tr}(\text{ad}_x) = 0$.

本文的主要目的是继续针对一般维数的 Lie 复流形开展关于 Fino-Vezzoni 猜想的研究. 考虑几乎 Abel 情形的一个自然推广: 假设 $\mathfrak{g}$ 含有余维为 2 的 Abel 理想 $\mathfrak{a}$. 设 J 为 $\mathfrak{g}$ 上的复结构, 此时 $\mathfrak{a} \cap J\mathfrak{a}$ 的余维只能是 2 或者 4, 前者更为简单, 它当且仅当 $J\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ 时成立. 考虑这种特殊情形, 并称其为“ $\mathfrak{g}$ 含有余维为 2 的 J -不变的 Abel 理想”. Guo 和 Zheng^[25] 研究了这种 Lie 代数上若干特殊 Hermite 度量类的刻画. 本文针对这种特殊的 Lie 复流形来验证 Fino-Vezzoni 猜想. 下面是本文的主要结果:

定理 1.1 设紧复流形 M 的万有覆叠为带左不变复结构的 Lie 群, 其 Lie 代数含余维为 2 的、 J -不变的 Abel 理想. 则 Fino-Vezzoni 猜想对 M 成立, 即若 M 上既有平衡度量又有多重闭度量, 则其上必有 Kähler 度量.

换言之, 对含余维为 2 的 J -不变 Abel 理想的幺模 Lie 代数而言, Fino-Vezzoni 猜想成立. 注意到, 这种 Lie 代数总是可解的, 且其步长不超过 3, 但一般不是 2, 因此不被 Freibert 和 Swann^[18] 的结果所包括.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节简要回顾关于 Fino-Vezzoni 猜想的部分前述结果. 第 3 节考虑 Lie Hermite 流形, 即带左不变 Hermite 度量的 Lie 复流形, 讨论其基本的微分几何性质, 为后面关于主要定理的证明作好准备. 第 4 节证明上述定理.

2 Fino-Vezzoni 猜想的部分已知结果

上一节列举了若干关于 Fino-Vezzoni 猜想的部分性结果, 本节针对其中的一些结果作简单说明, 以增加对该猜想及若干特殊 Hermite 流形类的了解. 回顾 Penrose 的扭子空间, 这是一类 3 维紧复流形, 其基本群可以是任何有限表示群, 因而至少从基本群的角度上看, 紧复流形的拓扑没有任何限制. 这与紧 Kähler 流形的情形形成巨大的反差.

考虑带标准度量与定向的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^4$. 考虑其上与度量和定向都相容的 (常值) 近复结构 J , 它 (在标准基下) 对应于一个行列式为 1 的反对称的正交阵. 所有这种 J 的集合 $\mathcal{J}(\mathbb{R}^4)$ 光滑同胚于 S^2 . 考虑一个紧定向的 4 维 Riemann 流形 (X, g) , 对于任意 $x \in X$, 切空间 $T_x X \cong \mathbb{R}^4$, 因而 $Z_x = \mathcal{J}(T_x X) \cong S^2$. 称并集 $\pi: Z = \bigcup_{x \in X} Z_x \rightarrow X$ 为 X 的扭子空间. 显然, Z 是 X 上的一个纤维为 S^2 的光滑纤维丛, 因而 Z 是一个 6 维的紧光滑流形. 底流形 X 上的度量和球面上的标准度量可以自然地诱导出 Z 上一族共形的 Riemann 度量 h_t ($t > 0$), 使得 π 为 Riemann 浸没. 与此同时, 在 Z 上有与 h_t 相容的近复结构 J : 在 $(x, v) \in Z$ 点处, $J_{(x,v)} = J_v + J_0$, 其中, J_0 是纤维 $S^2 = \mathbb{CP}^1$ 作为 Riemann 面的复结构, 而 J_v 是 $T_x X$ 上的那个对应于 $v \in \mathcal{J}(T_x X) \cong S^2$ 的近复结构. (J, h_t) 使 Z 成为一个近 Hermite 流形.

Atiyah 等^[4] 证明了, Z 上的这个近复结构 J 可积 (即为复结构) 当且仅当 Riemann 流形 (X, g) 是对偶的, 即其 Riemann 曲率算子在 Λ^2 部分的分量为 0, 其中 Λ^2 为 Hodge 星算子在微分 2-形式所形成的空间中的关于特征值 (-1) 的特征子空间. 由 Taubes 的著名的粘贴定理 (参见文献 [41, 42] 以及 Donaldson 的推广^[10]) 知, 给定任何紧定向 4 维流形, 将其与足够多个复射影平面作连通和, 则在新的流形上总是存在对偶 Riemann 度量, 因而其上的扭子空间便是一个复 3 维的紧复流形. 这个复流形与最初那个实 4 维流形显然具有相同的基本群. 由 Milnor 的著名结果 (如 Schwartz 的讲义^[39]) 知任何有限表示群可以作为某 4 维紧流形的基本群, 因而当复维数大于等于 3 时, 紧复流形的基本群没有任何障碍.

与此相对应的, 若用 $\mathcal{K}_n$ 代表所有可作为复 n 维紧 Kähler 流形基本群的 (有限表示) 群的集合, 则因为乘积上复射影直线不改变基本群, 因此有 $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{K}_4 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{K}$, 其中 $\mathcal{K} = \bigcup_{n \geq 2} \mathcal{K}_n$ 被称为 Kähler 群. 紧 Kähler 流形的拓扑具有很强的限制性, 例如, 由 Hodge 分解定理知其第一 Betti 数必须是偶数, 因而 $\mathbb{Z}$ 不属于 $\mathcal{K}$. 相应地, 若用 $\mathcal{P}$ 来表示射影群, 即所有复射影流形的基本群, 则由 Lefschetz 超平面截面定理可知, $\mathcal{P}$ 也代表所有复射影曲面的基本群, 因而 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}_2$. 由 Kodaira 的一个著名定理知, 任何紧 Kähler 曲面可以形变成 (从而微分同胚于) 复射影曲面, 因而 $\mathcal{P} = \mathcal{K}_2$. 在 2019 年, Claudon

等^[7]令人惊异地证明了 $\mathcal{P} = \mathcal{K}_3$, 并且还猜测 $\mathcal{P} = \mathcal{K}$. 关于 Kähler 群和射影群的研究也是近年来复几何中的一个热点问题.

回到扭子空间的问题, 当底流形为 4 维标准球面 S^4 或 (带标准的 Fubini-Study 度量的) 复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 时, 相应的扭子空间分别是 $\mathbb{CP}^3$ 和旗流形 $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$, 这两个 3 维复流形都是 Kähler 的. 除此之外, Hitchin^[27] 证明其他所有的扭子空间都是非 Kähler 型的, 即其上不存在任何 Kähler 度量. 在前面提到的文献 [44] 中, Verbitsky^[44] 证明了这些非 Kähler 型的扭子空间上皆不存在多重闭度量, 因而 Fino-Vezzoni 猜想对于任意扭子空间都成立.

给定 Hermite 流形 (M^n, g) , 设 ω 为其 Kähler 形式. 除平衡度量与多重闭度量之外, 还有几种特殊 Hermite 度量也被广为研究. 例如, Gauduchon 度量是指满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$ 的 Hermite 度量. 1977 年, Gauduchon^[22] 的一个著名结果是, 当 M^n 为紧时, 任何 Hermite 度量都共形于唯一 (常数倍下) 一个 Gauduchon 度量. 作为推广, 对于任意整数 $1 \leq k \leq n-1$, Fu 等^[21] 引入了 k -Gauduchon 度量的概念, 即满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^k) \wedge \omega^{n-k-1} = 0$ 的度量. 显然, 当 $k = n-1$ 时, 这便回到原来的 Gauduchon 度量. Jost 和 Yau^[28] 在研究调和映射的刚性问题时引入了亚 Kähler 度量的定义, 即满足条件 $\partial\bar{\partial}(\omega^{n-2}) = 0$ 的 Hermite 度量. 另外, 若流形上存在整体 $(2, 0)$ -形式 α , 使得 $d(\alpha + \omega + \bar{\alpha}) = 0$, 则称 g 为 Hermite 辛度量. 显然,

$$\text{Hermite 辛} \Rightarrow \text{多重闭} \Rightarrow \text{1-Gauduchon}.$$

在研究复结构形变理论时, Popovici^[35] 引入了特殊 Gauduchon 度量的概念, 即在流形上存在整体 $(n, n-2)$ -形式 Ψ 使得 $\partial(\omega^{n-1}) = \bar{\partial}\Psi$ 成立. 显然, 也有

$$\text{平衡} \Rightarrow \text{特殊 Gauduchon} \Rightarrow \text{Gauduchon}.$$

值得注意的是, Fino-Vezzoni 猜想实际上是非常精细的. 例如, 尽管平衡性与特殊 Gauduchon 相距不远, Otal 等^[31] 构造了紧 Hermite 流形的例子: 该度量同时是多重闭的和特殊 Gauduchon 的, 但该流形是非 Kähler 型的. 换言之, 在 Fino-Vezzoni 猜想中, 平衡的条件不能放宽成特殊 Gauduchon 的.

下面简要回顾 Chiose^[6] 关于 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形的结果: 若 M^n 是属于 Fujiki $\mathcal{C}$ 类的流形 (即与某紧 Kähler 流形双亚纯等价的流形), 并且 g 是 M^n 上的多重闭度量, 则 M^n 上必存在 Kähler 度量. 若复流形 M^n 上任何 d -闭、 ∂ -正合的 (p, q) -形式都是 $\partial\bar{\partial}$ -正合的, 则称复流形 M^n 满足 (关于 (p, q) -形式的) $\partial\bar{\partial}$ -引理. 人们已知 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形都满足 $\partial\bar{\partial}$ -引理, 因而若 g 是多重闭度量, 即其 Kähler 形式 ω 满足 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$, 则由 $\partial\bar{\partial}$ -引理可得 $(1, 0)$ -形式 α 满足 $\partial\omega = \partial\bar{\partial}\alpha$, 因而 $\psi := \omega - \bar{\partial}\alpha - \partial\bar{\alpha}$ 为闭的 $(1, 1)$ -形式.

利用 ω 的这个表达式, Chiose 非常巧妙地得到了关于 $\psi^k \wedge \Omega$ 的积分公式, 其中 k 是任何介于 1 和 n 之间的整数, 而 Ω 是任何 d -闭、正定的 $(n-k, n-k)$ -形式. 这个积分公式使得 ψ 所属的上同调类满足 Demailly 和 Paun^[9] 关于 Kähler 类的刻画. 再利用 Harvey 和 Lawson^[26] 的经典的 Kähler 性刻画理论 (用广义微分形式 (currents) 的语言), Chiose^[6] 就证明了 ψ 的上同调类中必含有 Kähler 形式, 因而任何多重闭的 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形都是 Kähler 型的, 特别地, 在 Fujiki $\mathcal{C}$ 类流形上 Fino-Vezzoni 猜想成立.

满足 $\partial\bar{\partial}$ -引理的紧复流形被称为 $\partial\bar{\partial}$ -流形. 紧 Kähler 流形的一个重要特点是它们都是 $\partial\bar{\partial}$ -流形. 利用这一性质, Deligne 等^[8] 证明了紧 Kähler 流形的有理同伦类完全由其上同调环的结构所决定, 由此得到比 Hodge 理论更为精细的关于紧 Kähler 流形的拓扑限制.

在一般维数情形, $\partial\bar{\partial}$ -引理是否具有双亚纯不变性仍然是一个公开问题. 由文献 [8, 33] 的结果可以得出 $\partial\bar{\partial}$ -引理在吹塌 (blow-down) 时被保持 (参见文献 [37, 推论 5.6]), 因此问题归结为该引理是否

能在吹胀 (blow-up) 时被保持. 当维数等于 3 时该不变性已被 Rao 等^[36] 证明. 相关问题的讨论可参见文献 [29, 48]. 文献 [37, 推论 5.5] 证明了在一般维数、当底流形和其中某子流形都满足 $\partial\bar{\partial}$ - 引理时, 则沿该子流形的吹胀也满足该引理.

最后, 回顾 Alexandrov 和 Ivanov^[2] 的一个结果, 即任何同时为平衡和多重闭的 Hermite 度量必然是 Kähler 的:

定理 2.1 若 Hermite 度量 g 既是平衡的又是多重闭的, 则它必定是 Kähler 的.

这是当人们讨论 Fino-Vezzoni 猜想时会想到的一个非常自然的问题. 为方便读者, 对上述结果, 这里给出一个简要的证明. 设 (M^n, g) 为满足上述定理条件的 Hermite 流形, 则有 $d(\omega^{n-1}) = 0$ 和 $\partial\bar{\partial}\omega = 0$. 我们希望证明 $d\omega = 0$, 其中 ω 是 Hermite 流形的 Kähler 形式.

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为流形上的一个局部酉标架, 其对偶余标架为 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. 记 Chern 联络 ∇ 的挠率和曲率张量为 T 和 R :

$$T(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y], \quad R_{xy}z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z,$$

其中 x, y 和 z 为流形上的任何向量场. 又记 Chern 联络在标架 e 下的联络矩阵、曲率矩阵和挠率列向量分别为 θ, Θ 和 τ , 则有

$$\tau_j = \frac{1}{2} \sum_{i, k} T_{ik}^j \varphi_i \wedge \varphi_k, \quad \Theta_{ij} = \sum_{k, \ell} R_{k\bar{\ell}i\bar{j}} \varphi_k \wedge \bar{\varphi}_\ell,$$

其中, $T_{ik}^j = \langle T(e_i, e_k), \bar{e}_j \rangle$, $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \langle R_{e_i \bar{e}_j} e_k, \bar{e}_\ell \rangle$. 用 φ 代表余标架的列向量. Cartan 的结构方程为

$$d\varphi = -{}^t\theta \wedge \varphi + \tau, \quad \Theta = d\theta - \theta \wedge \theta.$$

对第一式取外微分并利用第二式, 得到第一 Bianchi 恒等式 $d\tau = {}^t\Theta \wedge \varphi - {}^t\theta \wedge \tau$. 比较这个第一 Bianchi 恒等式两端的 $(2, 1)$ - 部分的系数, 则得到

$$T_{ik, \bar{j}}^\ell = R_{k\bar{j}i\bar{\ell}} - R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}. \quad (2.1)$$

这里逗号后的指标表示关于 Chern 联络的协变微分. 由 $\omega = \sqrt{-1} \varphi \wedge \bar{\varphi}$, 通过微分得到

$$\partial\omega = \sqrt{-1} \tau \wedge \bar{\varphi}, \quad \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\omega = {}^t\tau \wedge \bar{\tau} + {}^t\varphi \wedge \Theta \wedge \bar{\varphi}.$$

这里用到了酉标架的性质 $\bar{\theta} = -\theta$. 因此当度量为多重闭时, 将第二个等式展开就得到

$$\sum_r T_{ik}^r \bar{T}_{j\bar{\ell}}^r = T_{ik, \bar{\ell}}^j - T_{ik, \bar{j}}^\ell, \quad \forall 1 \leq i, j, k, \ell \leq n. \quad (2.2)$$

特别地, 令 $i = j, k = \ell$, 并对 i 和 k 求和, 可知任何多重闭度量都满足

$$\sum_{r, i, k} |T_{ik}^r|^2 = \sum_{i, k} (T_{ik, \bar{k}}^i - T_{ik, \bar{i}}^k) = 2 \sum_k \sum_r T_{rk, \bar{k}}^r = 2 \sum_k \eta_{k, \bar{k}}. \quad (2.3)$$

这里, $\eta_k = \sum_r T_{rk}^r$, $\eta = \sum_k \eta_k \varphi_k$ 为流形上的整体 $(1, 0)$ - 形式, 由方程 $\partial(\omega^{n-1}) = -\eta \wedge \omega^{n-1}$ 所决定. η 被称为 Gauduchon 挠率 1- 形式^[23]. 根据定义可知, 度量为平衡当且仅当 $\eta = 0$. 因此若度量为多重闭, 则有 (2.3). 而若度量又同时是平衡的, 则有 $\eta = 0$. 因而其协变导数也是 0, 从而 $T = 0$, 这等价于度量是 Kähler 的. 至此完成了 Alexandrov-Ivanov 定理的证明.

3 Lie Hermite 流形的性质

本节讨论 Lie Hermite 流形的若干基本性质, 为后面关于本文主要定理的证明作好基础. 设 (M^n, g) 为 Lie Hermite 流形, 即紧 Hermite 流形, 其万有覆盖空间为 (G, J, g) , 其中, G 为 Lie 群, J 为群上的左不变复结构, g 为一个与 J 相容的左不变度量. 设 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. (J, g) 对应于 $\mathfrak{g}$ 一个可积的近复结构和一个与之相容的内积. 为方便计, 仍用相同的字母来表达. 任何 $x \in \mathfrak{g}$ 都对应一个 G 上的左不变向量场, 仍记为 x . 记 $\mathfrak{g}^{1,0} = \{x - \sqrt{-1}Jx \mid x \in \mathfrak{g}\}$, 则任何 $X \in \mathfrak{g}^{1,0}$ 对应于 G 上一个左不变的 $(1,0)$ -型的复向量场.

设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 上的一个酉基, 它对应于 G 上一个左不变的酉标架. 将度量 g 写成 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 并线性延拓到 $\mathbb{C}$, 则有 $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $\langle e_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. 本文使用文献 [45–47, 49] 中的部分记号. 令

$$C_{ik}^j = \langle [e_i, e_k], \bar{e}_j \rangle, \quad D_{ik}^j = \langle e_i, [e_k, \bar{e}_j] \rangle.$$

C 和 D 作为 Lie 代数结构常数的一种复化表达, 满足如下 Jacobi 恒等式:

$$\sum_r (C_{ij}^r C_{rk}^\ell + C_{jk}^r C_{ri}^\ell + C_{ki}^r C_{rj}^\ell) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sum_r (C_{ik}^r D_{jr}^\ell + D_{ji}^r D_{rk}^\ell - D_{jk}^r D_{ri}^\ell) = 0, \quad (3.2)$$

$$\sum_r (C_{ik}^r \overline{D_{j\ell}^r} - C_{rk}^j \overline{D_{r\ell}^i} + C_{ri}^j \overline{D_{r\ell}^k} - D_{ri}^\ell \overline{D_{jr}^k} + D_{rk}^\ell \overline{D_{jr}^i}) = 0, \quad (3.3)$$

其中 i, j, k 和 ℓ 是任何介于 1 和 n 之间的整数. 注意到, $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ 总是一个复 Lie 代数. $\mathfrak{g}$ 上的近复结构 J 为可积的条件等价于 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 是一个复 Lie 代数. 而 $D = 0$ 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 本身也是一个复 Lie 代数, 此时它显然同构于 $\mathfrak{g}^{1,0}$. 因此系数 D 代表的是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 距离复 Lie 代数的某种差距. 与此相应地, $C = 0$ 当且仅当

$$[Jx, Jy] = [x, y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

此时称复结构 J 是 Abel 的. 另外, 条件 $C + D = 0$ 反映的是 $\mathfrak{g}$ 上的度量在 $Ad(G)$ 作用下不变, 或等价地, G 上的度量 g 是双不变的. 由 Milnor 引理可知 Lie 群具有双不变度量当且仅当该 Lie 群为紧半单 Lie 群与向量群的直积.

系数 C 和 D 包含了 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及其 Hermite 结构 (J, g) 的所有信息. 在酉标架 e 下, G 的 Chern 联络 ∇ 具有表达式

$$\nabla e_i = \sum_j \theta_{ij} \otimes e_j, \quad \theta_{ij} = \sum_k (D_{ik}^j \varphi_k - \overline{D_{jk}^i} \bar{\varphi}_k), \quad (3.4)$$

其中 φ 为与 e 对偶的余标架, 即满足 $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ 和 $\varphi_i(\bar{e}_j) = 0$ 的 $(1,0)$ -形式. 另外, Chern 联络的挠率张量 $T(x, y) = \nabla_x y - \nabla_y x - [x, y]$, 在酉标架下的分量为

$$T(e_i, \bar{e}_j) = 0, \quad T(e_i, e_k) = \sum_j T_{ik}^j e_j, \quad T_{ik}^j = -C_{ik}^j - D_{ik}^j + D_{ki}^j. \quad (3.5)$$

由么模的定义可知,

$$\mathfrak{g} \text{ 为么模} \Leftrightarrow \sum_s (C_{si}^s + D_{si}^s) = 0, \quad \forall i. \quad (3.6)$$

Gauduchon^[23] 的挠率 1- 形式 η 为由方程 $\partial(\omega^{n-1}) = -\eta \wedge \omega^{n-1}$ 所唯一确定的 $(1, 0)$ - 形式, 它具有分量

$$\eta = \sum_i \eta_i \varphi_i, \quad \eta_i = \sum_s T_{si}^s = \sum_s D_{is}^s - \sum_s (C_{si}^s + D_{si}^s). \quad (3.7)$$

利用余标架, Cartan 的结构方程可写成

$$\begin{aligned} d\varphi_j &= -\sum_k \theta_{kj} \wedge \varphi_k + \tau_j \\ &= -\sum_k \theta_{kj} \wedge \varphi_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k} T_{ik}^j \varphi_i \wedge \varphi_k \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,k} C_{ik}^j \varphi_i \wedge \varphi_k - \sum_{i,k} \overline{D_{jk}^i} \varphi_i \wedge \overline{\varphi}_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

由此及 η 的定义得到 $\bar{\partial}\eta = -\sum_{i,j} (\bar{e}_j(\eta_i) + \sum_r \eta_r \overline{D_{rj}^i}) \varphi_i \wedge \overline{\varphi}_j$. 当 G 为么模时, 有 $\eta_r = \sum_s D_{rs}^s$, 因而

$$\partial\bar{\partial}(\omega^{n-1}) = (\bar{\partial}\eta + \eta \wedge \bar{\eta}) \wedge \omega^{n-1} = 0, \quad (3.9)$$

即 Lie Hermite 流形总是 Gauduchon 的. 这是一个大家所熟知的结论.

考虑 G 为幂零群的情形. 记 $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}]$. G (或等价地, $\mathfrak{g}$) 为幂零的定义是指, 存在正整数 k 使得 $\mathfrak{g}_k = 0$. 最小的这种 k 被称为 $\mathfrak{g}$ 的步长. 因此步长为 1 代表 Lie 代数是 Abel 的, 步长为 2 代表 Lie 代数本身不是 Abel 的, 但其交换子 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是 Abel 的.

定理 3.1^[38] 设 G 为 (实) 维数为 $2n$ 的幂零 Lie 群, J 为 G 上左不变的复结构. 则存在 G 上左不变的 $(1, 0)$ - 形式 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 所构成的余标架使得

$$d\varphi_1 = 0, \quad d\varphi_i \in \mathcal{I}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}\}, \quad \forall 2 \leq i \leq n, \quad (3.10)$$

其中 $\mathcal{I}$ 表示在复外代数中所生成的理想.

若 $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 G 上与 J 相容的左不变度量, 则在选取满足 (3.10) 的余标架 φ 时, 显然可以要求它是酉的. 此时, 若用系数 C 和 D 来表达, 则 Salamon 定理是说, 任给幂零 Lie 代数及其上的 Hermite 结构, 一定存在酉标架使得

$$j \leq i, k \Rightarrow C_{ik}^j = 0; \quad i \leq j \Rightarrow D_{ik}^j = 0. \quad (3.11)$$

Fino 和 Vezzoni^[17] 针对步长为 2 的幂零流形证明了他们提出的猜想:

定理 3.2^[17] 设 G 为 (实) 维数为 $2n$ 的步长为 2 的幂零 Lie 群, J 为 G 上左不变的复结构. 若 (G, J) 上存在左不变的平衡度量 g 和左不变的多重闭度量 h , 则其上必存在左不变的 Kähler 度量.

换言之, Fino-Vezzoni 猜想对步长为 2 的幂零 Lie 复流形成立. 与此同时, 他们也猜测, 任给幂零 Lie 复流形, 若其上具有多重闭度量, 则其步长必不超过 2. 这个猜测最近被 Arroyo 和 Nicolini^[3] 所证明:

定理 3.3^[3] 设 G 为 (实) 维数为 $2n$ 的幂零 Lie 群, J 为 G 上左不变的复结构. 若 (G, J) 上存在左不变的多重闭度量 h , 则其步长不超过 2.

将上述两个定理相结合, 可知 Fino-Vezzoni 猜想对所有幂零 Lie 复流形都成立:

推论 3.1 设 M 为幂零型的 Lie 复流形, 即紧复流形的万有覆叠为 (G, J) : G 为幂零 Lie 群而 J 为 G 上的左不变复结构. 若 M 上存在平衡度量和多重闭度量, 则其上必有 Kähler 度量.

除幂零流形之外, 对其他的 Lie 复流形而言, Fino-Vezzoni 猜想仍然在很大程度上是未知的. 在第一节中提到了一些部分性的结果, 主要针对紧和非紧的半单 Lie 群、所有实 6 维的 Calabi-Yau 型的可解群、几乎 Abel 的 Lie 群以及所谓的纯粹型的步长为 2 的可解 Lie 群等, 一般的情形离解决目前看起来仍然遥不可及, 因此本文集中于一种特殊的 Lie 代数: 假设它们具有 J -不变的余维为 2 的 Abel 理想. 这种 Lie 代数都是步长不超过 3 的可解 Lie 代数, 它们显然是“几乎 Abel”情形的一种自然推广.

4 定理 1.1 的证明

本节证明在引言中叙述的主要结果, 即定理 1.1. 设 $\mathfrak{g}$ 为幺模 Lie 代数, 实维数为 $2n$, 具有复结构 J . 设 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 为余维为 2 的 Abel 理想, 并且 $J\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Guo 和 Zheng^[25] 讨论了 $(\mathfrak{g}, J)$ 上的 Hermite 度量的性质, 并给出了关于若干特殊 Hermite 度量类的刻画.

设 g 为 $\mathfrak{g}$ 上与 J 相容的度量. 则有 $\mathfrak{g}^{1,0}$ 上的酉标架 e 及其对偶标架 φ 使得 $\mathfrak{a}$ 由下列向量生成:

$$\mathfrak{a} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_i + \bar{e}_i, \sqrt{-1}(e_i - \bar{e}_i); 2 \leq i \leq n\}.$$

这种标架被称为容许标架. 此时 g 的所有可能非零的结构常数为

$$C_{1i}^j = X_{ij}, \quad D_{11}^1 = \lambda, \quad D_{i1}^j = Y_{ij}, \quad D_{ij}^1 = Z_{ij}, \quad D_{i1}^1 = v_i, \quad 2 \leq i, j \leq n,$$

其中 $\lambda \geq 0$, $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ 为列向量, 而 X, Y 和 Z 为 $(n-1) \times (n-1)$ 复矩阵. 结构常数所需要满足的 Jacobi 恒等式 (3.1)–(3.3) 变成如下形式:

$$\begin{cases} \lambda(X^* + Y) + [X^*, Y] - Z\bar{Z} = 0, \\ \lambda Z - (Z^t X + YZ) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 X^* 为 X 的共轭转置, 而度量 g 的结构方程为

$$\begin{cases} d\varphi_1 = -\lambda\varphi_1\bar{\varphi}_1, \\ d\varphi = -\varphi_1\bar{\varphi}_1\bar{v} - \varphi_1^t X\varphi + \bar{\varphi}_1\bar{Y}\varphi - \varphi_1\bar{Z}\bar{\varphi}. \end{cases} \quad (4.2)$$

由挠率公式, 即 (3.5) 的最后一式, 可知 Chern 联络挠率的所有可能非零的分量为

$$T_{1i}^1 = v_i, \quad T_{ij}^1 = Z_{ji} - Z_{ij}, \quad T_{i1}^j = Y_{ij} - X_{ij}, \quad 2 \leq i, j \leq n. \quad (4.3)$$

根据文献 [25] 中的结果, 有如下结论:

$$\begin{cases} \mathfrak{g} \text{ 幺模} \Leftrightarrow \lambda - \text{tr}(X) + \text{tr}(Y) = 0, \\ g \text{ 平衡} \Leftrightarrow v = 0, \text{tr}(X) = \text{tr}(Y), \\ g \text{ Kähler} \Leftrightarrow v = 0, X = Y, {}^tZ = Z, \\ g \text{ 多重闭} \Leftrightarrow \lambda B + B^*B + [X^*, B] + {}^tZ\bar{Z} - Z\bar{Z} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

其中 $B = Y - X$. 对上面最后一个等式两端取迹, 得到

$$\text{度量 } g \text{ 为多重闭} \Rightarrow \|B\|^2 + \|Z\|^2 = \text{tr}(Z\bar{Z}) - \lambda \text{tr}(B). \quad (4.5)$$

为完成定理 1.1 的证明, 需要用到如下引理:

引理 4.1 设 J 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的复结构, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ 为余维为 2 的 Abel 理想, 满足 $J\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. 若 $(\mathfrak{g}, J)$ 上有 Hermite 度量 g 和 $\tilde{g}$, 则存在 g 的容许标架 e 和 $\tilde{g}$ 的容许标架 $\tilde{e}$, 使得

$$\tilde{e}_1 = pe_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i, \quad \tilde{e}_i = p_i e_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (4.6)$$

其中, $p, p_2, \dots, p_n > 0$, $a_i \in \mathbb{C}$ 为常数. 在相应的标架下, 度量 g 和 $\tilde{g}$ 的结构常数满足如下换算关系:

$$\tilde{\lambda} = p\lambda, \quad \tilde{X} = pXP^{-1}, \quad \tilde{Y} = pP^{-1}YP, \quad \tilde{Z} = pP^{-1}ZP, \quad (4.7)$$

$$\tilde{v} = pP^{-1}(pv - \lambda\bar{a} + Y\bar{a} + Za), \quad (4.8)$$

其中, $P = \text{diag}\{p_2, \dots, p_n\} > 0$, $a = {}^t(a_2, \dots, a_n)$.

证明 设 e 为度量 g 的一个容许标架. 将 $\{e_2, \dots, e_n\}$ 作适当的酉变换, 则存在正常数 $p_2, \dots, p_n$ 使得 $\{p_2 e_2, \dots, p_n e_n\}$ 关于 $\tilde{g}$ 么正. 将其延拓成 $\tilde{g}$ 的酉标架 $\tilde{e}$, 设其第一元为 $\tilde{e}_1 = pe_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i$, 则有 $p \neq 0$. 适当旋转 $\tilde{e}_1$ 可以使 $p > 0$, 这就得到了引理中叙述的特殊容许标架对. 设 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 分别为相应的对偶余标架, 则有

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{p}\varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_i = \frac{1}{p_i}(\varphi_i - a_i\varphi_1), \quad 2 \leq i \leq n.$$

运用结构方程 (4.2), 即得到变换公式 (4.7) 和 (4.8). $\square$

引理 4.2 设 $(\mathfrak{g}, J)$ 满足引理 4.1 中的假设条件, 且 $\mathfrak{g}$ 为么模. 若 $(\mathfrak{g}, J)$ 上有 Hermite 度量 g 和平衡度量 $\tilde{g}$, 则在 g 的任何容许标架 e 下, 总有 $\lambda = 0$.

证明 设 e 为 g 的任意一个容许标架. 由引理 4.1 的证明可以看到, 保持 e_1 而对 $\{e_2, \dots, e_n\}$ 作适当的酉变换, 可以得到前述的容许标架对 e 和 $\tilde{e}$. 注意到 e 的这个变换并不改变其对偶余标架中的 φ_1 . 因而由结构方程 (4.2) 中的第一式可知其 λ 值不变.

由于 $\tilde{g}$ 是平衡度量, 因而由 (4.4) 中的第二式得到 $\text{tr}(\tilde{X}) = \text{tr}(\tilde{Y})$. 又因为 $\mathfrak{g}$ 为么模, 故有 $\tilde{\lambda} = \text{tr}(\tilde{X}) - \text{tr}(\tilde{Y}) = 0$, 再由引理 4.1 中的变换公式即得到 $\lambda = 0$. $\square$

接下来证明本文的主要结果, 即定理 1.1.

定理 1.1 的证明 考虑 Lie 复流形 $M = G/T$, 其中, G 为带左不变复结构 J 的 Lie 群, g_1 和 h_1 分别为紧流形 M 上的多重闭度量和平衡度量. 记 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 为带复结构 J 的么模 Lie 代数. 由 Fino 和 Grantcharov^[12] 及 Ugarte^[43] 的工作可知, 可以通过积分取平均的方法得到 (G, J) 上左不变的多重闭度量 g 和左不变的平衡度量 h . 根据定理 1.1 的假设, $\mathfrak{g}$ 包含余维为 2 的满足 $J\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ 的 Abel 理想 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$, 而 g 和 h 为 $(\mathfrak{g}, J)$ 上的 Hermite 度量, 其中, g 是多重闭的, h 是平衡的.

设 e 为 g 的容许标架. 因为 $(\mathfrak{g}, J)$ 上有平衡度量, 所以由引理 4.2 可知 $\lambda = 0$. 因为 Lie 括号的迹为 0, 所以通过对 (4.1) 的第一式取迹, 可得到 $\text{tr}(Z\bar{Z}) = 0$. 将上式和已知条件 $\lambda = 0$ 代入多重闭度量 g 所满足的公式 (4.5), 可推导出 $Z = 0$, $B = 0$, 或等价地, $X = Y$. 再由 (4.1) 的第一式得到 $[X^*, X] = 0$, 即 X 为正规矩阵. 此外, 因为度量 h 是平衡的, 其对应的 $\tilde{v}$ 向量为 0, 故由 (4.8) 得到 $pv + Y\bar{a} = 0$, 其中 $a \in \mathbb{C}^{n-1}$ 是一个列向量. 下面来构造 $(\mathfrak{g}, J)$ 上一个新的 Hermite 度量 $\tilde{g}$, 它将以 $\tilde{e}$ 为其酉标架, 这里, $\tilde{e}_1 = pe_1 + \sum_{i=2}^n a_i e_i$, $\tilde{e}_i = e_i$, $2 \leq i \leq n$. 由引理 4.1 可知 $\tilde{g}$ 在其容许标架 $\tilde{e}$ 下的结构常数为 (其中 $P = I$, $p = 1$)

$$\tilde{X} = \tilde{Y} = X = Y, \quad \tilde{Z} = Z = 0, \quad \tilde{\lambda} = 0, \quad \tilde{v} = v + Y\bar{a} = 0.$$

因而由 (4.4) 中的第三式可知, $\tilde{g}$ 为 Kähler 度量. 至此完成了定理 1.1 的证明. $\square$

从定理 1.1 的证明中可以看到, 对这种 Lie 复流形而言, 如果其上有平衡度量, 则其他 Hermite 度量并不都是平衡的, 尽管它们都具有一定的特殊性 ($\lambda = 0$); 另外, 当假设有平衡度量时, 其上若有多重闭度量, 则该度量必须非常特殊 ($\lambda = 0, Z = 0, X = Y$, 并且 v 含于 Y 的像空间), 但它也不必 Kähler (因为其 v 可以非零). 尽管如此, 此时通过适当改变 e_1 的方向, 总可以构造出 Kähler 度量来. 从这个例子也可以看出 Fino-Vezzoni 猜想的微妙性和代数复杂性.

致谢 两位审稿人对本文提出了十分详尽的更正和修改意见, 我们对此表示衷心感谢! 我们也希望借此机会向沈一兵先生表达我们的崇高敬意! 先生不仅著作等身, 而且培养了一大批优秀的几何学家. 祝先生生日快乐, 生命之树常青!

参考文献

- Alessandrini L, Bassanelli G. Modifications of compact balanced manifolds. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1995, 320: 1517–1522
- Alexandrov B, Ivanov S. Vanishing theorems on Hermitian manifolds. *Differential Geom Appl*, 2001, 14: 251–265
- Arroyo R M, Nicolini M. SKT structures on nilmanifolds. *Math Z*, 2022, 302: 1307–1320
- Atiyah M, Hitchin N, Singer I M. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Sci*, 1978, 362: 425–461
- Bismut J M. A local index theorem for non Kähler manifolds. *Math Ann*, 1989, 284: 681–699
- Chiose I. Obstructions to the existence of Kähler structures on compact complex manifolds. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 3561–3568
- Claudon B, Horing A, Lin H Y. The fundamental group of compact Kähler threefolds. *Geom Topol*, 2019, 23: 3233–3271
- Deligne P, Griffiths P, Morgan J, et al. Real homotopy theory of Kähler manifolds. *Invent Math*, 1975, 29: 245–274
- Demailly J P, Paun M. Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold. *Ann of Math* (2), 2004, 159: 1247–1274
- Donaldson S K. Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds. *J Differential Geom*, 1986, 24: 275–341
- Fei T. A construction of non-Kähler Calabi-Yau manifolds and new solutions to the Strominger system. *Adv Math*, 2016, 302: 529–550
- Fino A, Grantcharov G. Properties of manifolds with skew-symmetric torsion and special holonomy. *Adv Math*, 2004, 189: 439–450
- Fino A, Grantcharov G, Vezzoni L. Astheno-Kähler and balanced structures on fibrations. *Int Math Res Not IMRN*, 2019, 2019: 7093–7117
- Fino A, Paradiso F. Hermitian structures on a class of almost nilpotent solvmanifolds. *J Algebra*, 2022, 609: 861–925
- Fino A, Paradiso F. Balanced Hermitian structures on almost Abelian Lie algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2023, 227: 107186
- Fino A, Vezzoni L. Special Hermitian metrics on compact solvmanifolds. *J Geom Phys*, 2015, 91: 40–53
- Fino A, Vezzoni L. On the existence of balanced and SKT metrics on nilmanifolds. *Proc Amer Math Soc*, 2016, 144: 2455–2459
- Freibert M, Swann A. Compatibility of balanced and SKT metrics on two-step solvable Lie groups. *Transform Groups*, 2024, in press
- Fu J. On non-Kähler Calabi-Yau threefolds with balanced metrics. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II*. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2010, 705–716
- Fu J, Li J, Yau S T. Balanced metrics on non-Kähler Calabi-Yau threefolds. *J Differential Geom*, 2012, 90: 81–130
- Fu J, Wang Z, Wu D. Semilinear equations, the γ_k function, and generalized Gauduchon metrics. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2013, 15: 659–680
- Gauduchon P. Le théorème de l'excentricité nulle. *C R Acad Sci Paris Sér A-B*, 1977, 285: A387–A390
- Gauduchon P. La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte. *Math Ann*, 1984, 267: 495–518
- Giusti F, Podestà F. Real semisimple Lie groups and balanced metrics. *Rev Mat Iberoam*, 2023, 39: 711–729
- Guo Y, Zheng F Y. Hermitian geometry of Lie algebras with abelian ideals of codimension 2. *Math Z*, 2023, 304: 51
- Harvey R, Lawson H B Jr. An intrinsic characterization of Kähler manifolds. *Invent Math*, 1983, 74: 169–198
- Hitchin N J. Kählerian twistor spaces. *Proc Lond Math Soc* (3), 1981, s3-43: 133–150
- Jost J, Yau S T. A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry. *Acta Math*, 1993, 170: 221–254

- 29 Meng L. The heredity and bimeromorphic invariance of the $\partial\bar{\partial}$ -lemma property. *C R Math Acad Sci Paris*, 2021, 359: 645–650
- 30 Michelsohn M L. On the existence of special metrics in complex geometry. *Acta Math*, 1982, 149: 261–295
- 31 Otal A, Ugarte L, Villacampa R. Hermitian metrics on compact complex manifolds and their deformation limits. In: *Special Metrics and Group Actions in Geometry*. Springer INdAM Series, vol. 23. Cham: Springer, 2017, 269–290
- 32 Otiman A. Special Hermitian metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds. *Bull Lond Math Soc*, 2022, 54: 655–667
- 33 Parshin A N. On a certain generalization of Jacobian manifold. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1966, 30: 175–182
- 34 Podestà F. Homogeneous Hermitian manifolds and special metrics. *Transform Groups*, 2018, 23: 1129–1147
- 35 Popovici D. Deformation limits of projective manifolds: Hodge numbers and strongly Gauduchon metrics. *Invent Math*, 2013, 194: 515–534
- 36 Rao S, Yang S, Yang X. Dolbeault cohomologies of blowing up complex manifolds. *J Math Pures Appl* (9), 2019, 130: 68–92
- 37 Rao S, Zou Y. $\partial\bar{\partial}$ -lemma, double complex and L^2 cohomology. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02904394>, 2020
- 38 Salamon S M. Complex structures on nilpotent Lie algebras. *J Pure Appl Algebra*, 2001, 157: 311–333
- 39 Schwartz R. Fundamental groups of 4-manifolds. <http://www.math.brown.edu/reschwar/M2410/notes2.pdf>, 2021
- 40 Strominger A. Superstrings with torsion. *Nuclear Phys B*, 1986, 274: 253–284
- 41 Taubes C H. Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. *J Differential Geom*, 1982, 17: 139–170
- 42 Taubes C H. Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix. *J Differential Geom*, 1984, 19: 517–560
- 43 Ugarte L. Hermitian structures on six-dimensional nilmanifolds. *Transform Groups*, 2007, 12: 175–202
- 44 Verbitsky M. Rational curves and special metrics on twistor spaces. *Geom Topol*, 2014, 18: 897–909
- 45 Vezzoni L, Yang B, Zheng F Y. Lie groups with flat Gauduchon connections. *Math Z*, 2019, 293: 597–608
- 46 Yang B, Zheng F Y. On compact Hermitian manifolds with flat Gauduchon connections. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2018, 34: 1259–1268
- 47 Yang B, Zheng F Y. On curvature tensors of Hermitian manifolds. *Comm Anal Geom*, 2018, 26: 1195–1222
- 48 Yang S, Yang X. Bott-Chern blow-up formulae and the bimeromorphic invariance of the $\partial\bar{\partial}$ -Lemma for threefolds. *Trans Amer Math Soc*, 2020, 373: 8885–8909
- 49 Zhao Q, Zheng F Y. Complex nilmanifolds and Kähler-like connections. *J Geom Phys*, 2019, 146: 103512

The Fino-Vezzoni conjecture in Hermitian geometry

Yulu Li & Fangyang Zheng

Abstract The Fino-Vezzoni conjecture is an active research topic in non-Kähler geometry in recent years. It states that, if a compact complex manifold admits a balanced metric and a pluriclosed metric, then it must admit a Kähler metric. At present the conjecture is known for a number of special types of Hermitian manifolds. In this article, we prove the conjecture in the special case when the compact complex manifold has its universal cover being a Lie group equipped with a left-invariant complex structure, whose Lie algebra contains a J -invariant Abelian ideal of codimension 2. This is a natural generalization to the “almost Abelian” case.

Keywords Hermitian manifold, Chern connection, balanced metric, pluriclosed metric, Lie-complex manifold, Fino-Vezzoni conjecture

MSC(2020) 53C55

doi: 10.1360/SSM-2023-0048