基于广义相对论的轨道摄动卫星皮秒计时与时间比对研究

梁健^{1,2}, 贾前^{1,2}, 刘磊^{1,2*}, 唐硕^{1,2}

1. 西北工业大学航天学院, 西安 710072;

2. 陕西省空天飞行器设计重点实验室, 西安 710072

* E-mail: leiliu@nwpu.edu.cn

收稿日期: 2020-12-23; 接受日期: 2021-04-13; 网络版发表日期: 2021-07-22

国家自然科学基金(批准号: 52075446, 51675430)资助项目

摘要 新一代空间科学任务, 如空间站光学原子钟计划、广域量子通信、精细结构常数测量、引力红移测量及深空探测等, 提出了皮秒量级的时间比对要求, 需要基于广义相对论建立更加准确的卫星坐标时计时与时间比对模型. 本文从地心非旋转坐标系(geocentric celestial reference system, GCRS)的广义相对论度规张量出发, 建立了广义相对论下卫星轨道方程. 在此基础上, 考虑轨道摄动的影响, 建立卫星坐标时计时及时间比对模型. 考虑轨道摄动影响的时间比对模型, 为星间长时间皮秒量级时频传递提供理论支持. 首先以地球静止轨道卫星为研究对象, 仿真分析了轨道方程中相对论项对卫星轨道的影响, 然后仿真分析了轨道摄动引起的卫星坐标时计时误差以及星间时间比对误差. 静止轨道卫星研究结果表明, 轨道方程中相对论项对卫星速度的影响在 $\mu\text{m/s}$ 量级, 对位置的影响随时间累计增大, 在1万秒达到3.46 mm(11.53 ps); 轨道摄动引起的坐标时计时误差在1万秒达到15.36 ps; 轨道摄动引起的星间时间比对时相对论项误差在1万秒达到56.69 ps. 一般轨道卫星仿真结果表明, 在地球主引力场范围内, 轨道摄动引起的坐标时计时误差以及时间比对误差随轨道高度增加而逐渐减小.

关键词 广义相对论, 度规张量, 轨道摄动, 坐标时计时, 时间比对

1 引言

越来越多的空间科学任务提出了皮秒量级时间比对精度要求^[1-8]. 欧洲空间原子钟组计划(atomic clock ensemble in space, ACES)将在国际空间站上搭载高精度原子钟实现皮秒量级的时间比对^[1-3]. 广域量子通信对时间比对精度也提出了更高的要求, 更高精度的系

统时间可以实现更远距离的广域量子通信, 皮秒量级的时间比对精度将显著提高量子通信的成码率^[4-6]. 其他基础空间科学研究, 如精细结构常数测量、引力红移测量及深空探测等, 也提出了皮秒量级的时间比对精度要求^[7,8]. 为满足空间科学任务的需要, 亟需建立皮秒量级时间比对模型.

卫星皮秒量级坐标时计时是皮秒量级时间比对的

引用格式: 梁健, 贾前, 刘磊, 等. 基于广义相对论的轨道摄动卫星皮秒计时与时间比对研究. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 819-828

Liang J, Jia Q, Liu L, et al. General relativistic theory for picosecond coordinate timing and time comparison of satellites under orbit perturbations (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 819-828, doi: 10.1360/SST-2020-0504

基础. 星载理想原子钟计量的时间是卫星原时; 卫星坐标时用来描述卫星轨道运动, 也是时间同步和比对的标准, 由原时转换得到^[9]. 文献[10,11]研究了广义相对论效应下GPS卫星钟坐标时计时^[10,11]. 文献[12]研究了北斗2导航卫星在标准轨道(圆轨道和椭圆轨道)下卫星钟差的解析解^[12]. 由于已满足导航要求, 均未考虑广义相对论下轨道摄动引起的卫星坐标时计时误差.

在卫星高精度时间比对方面, 国内外学者进行了大量研究. 文献[9]在得到地心惯性系下卫星钟坐标计时的频偏常值项和周期项的解析解的基础上, 分析了广义相对论效应对星间链路伪距测量的影响^[9]. 文献[13]研究了基于通信卫星的共视授时方法, 可以实现5 ns的时间传递^[13]. 文献[14]研究了基于导航星间链路的天基高精度时间传递方法, 提出一种动态条件下的时延修正方法, 时间传递精度达到0.1 ns^[14]. 文献[15]研究了广义相对论下单向、双向以及LASSO类型的地球附近皮秒量级星地时间传递^[15]. 针对空间站, 文献[1]在地心非旋转坐标系下研究了广义相对论下ACES的广义相对论观测模型, 建立了精度高于1 ps的时间比对模型^[1]. 文献[7]研究了空间站时间比对, 针对轨道误差引起的百皮秒量级的时间比对误差, 通过选择地面站的布局, 可以将百皮秒量级的时间比对误差降低到几十皮秒量级^[7]. 目前进行的时间比对研究没有考虑广义相对论项对卫星轨道的影响, 也没有考虑轨道摄动对广义相对论项的影响, 虽然可以满足短时或精度要求低的时间比对任务需求, 但是对于皮秒量级时间比对需要考虑这两项的影响. 本文在广义相对论下卫星轨道方程以及单次时间比对模型的基础上, 建立了星间长时间皮秒量级时间模型, 分析了轨道摄动对星间长时间皮秒量级时间比对的影响.

本文从广义相对论时空度规出发, 建立广义相对论下卫星轨道方程. 然后考虑轨道摄动的影响, 研究了轨道摄动对卫星坐标时计时及星间时间比对的影响, 并建立模型进行准确预测. 通过仿真首先校验了广义相对论下轨道摄动对地球静止轨道卫星轨道预报、坐标时计时以及星间时间比对的影响. 之后分析了轨道摄动对一般轨道卫星坐标时计时以及星间时间比对的影响. 本文研究适用于地球主引力场卫星, 对于其他轨道卫星, 则需要在相应的坐标系内建立皮秒计时与时间比对方程^[16-18].

2 时空参考坐标系

在广义相对论下描述卫星的轨道运动、坐标时计时和时间比对, 需要建立相应的时空参考坐标系, 本文选择地心非旋转坐标系(geocentric celestial reference system, GCRS). 对于GCRS中两个确定的时空间隔 s 有

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

式中 $g_{\mu\nu}$ 为GCRS的度规张量; $x^{\mu,\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)是GCRS中的四维时空坐标; $\mu, \nu = 0$ 时, $x^0 = ct$, t 为GCRS的坐标时, c 为光速; $\mu, \nu = 1, 2, 3$ 对应于三维空间坐标, 本文定义 $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

取度规张量 $g_{\mu\nu}$ 为^[19]

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} + O(c^{-4}), \\ g_{0i} = O(c^{-3}), \\ g_{\alpha\beta} = -1 + O(c^{-2}), \end{cases} \quad (2)$$

式中 w 为引力势.

将式(2)代入式(1)可得

$$ds^2 = (cd\tau)^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)(cdt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2], \quad (3)$$

式中 τ 为原时.

定义 $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. 求解式(3)得到原时间隔 $d\tau$ 与坐标时间隔 dt 之间的关系为

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{2w}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

忽略小于 c^{-2} 的量, 将式(4)展开可以得到

$$d\tau = \left[1 - \frac{w}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + O(c^{-4})\right]dt. \quad (5)$$

上式即为广义相对论下卫星坐标时计时方程. 卫星的原时 τ 可直接由星载理想原子钟测量得到, 坐标时 t 用来描述卫星轨道运动, 也是时间同步和比对的标准, 由上式计算得到^[20,21]. 坐标时 t 的计算与卫星引力势 w 和速度 v 相关.

3 广义相对论下卫星轨道方程

在进行皮秒量级时间比对时, 传统牛顿力学下的卫星轨道方程已不能满足要求, 需要在广义相对论下建立新的卫星轨道方程. 本节将通过GCRS下的度规张量和拉格朗日(Lagrange)方程建立广义相对论下卫星的轨道方程.

由式(3)可得

$$ds = c d\tau = \left[1 - \frac{w}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right] c dt. \quad (6)$$

取拉格朗日函数为 $L = ds / c dt$, 将式(6)代入拉格朗日方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, ($x \rightarrow y, z$) 可得^[22]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = & -\frac{Gm_E}{r^3} \mathbf{r} + \frac{Gm_E}{c^2 r^3} \left[\left(\frac{4Gm_E}{r} - v^2 \right) \mathbf{r} \right] \\ & + \frac{4Gm_E}{c^2 r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中 G 为万有引力系数; m_E 为地球质量; $\mathbf{r}$ 为地心到卫星矢径; $\mathbf{v}$ 为卫星速度矢量. 上式即为广义相对论下地球轨道卫星的二体轨道方程. 由式(7)可得广义相对论项引起的轨道摄动为

$$\frac{d^2 \Delta \ddot{\mathbf{r}}}{dt^2} = \frac{GM_E}{c^2 r^3} \left[\left(\frac{4GM_E}{r} - v^2 \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right]. \quad (8)$$

卫星在轨运行时, 还受轨道摄动的影响, 此时卫星轨道动力学方程为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_{J2} + \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_{sp} + \mathbf{a}_r, \quad (9)$$

式中 $\mathbf{a}_g$ 为地球引力; $\mathbf{a}_{J2}$ 为地球J2摄动力; $\mathbf{a}_s$ 为太阳引力摄动; $\mathbf{a}_M$ 为月球引力摄动; $\mathbf{a}_{sp}$ 为太阳光压力; $\mathbf{a}_r$ 为广义相对论修正项, 即为式(8).

4 高精度时间比对

4.1 广义相对论下卫星坐标计时

卫星在轨运行时, 星载理想原子钟计量的时间为卫星的原时 τ . 为描述卫星在GCRS中的运动, 需要将卫星原时 τ 转换为GCRS的坐标时. 本小节考虑轨道摄动建立卫星计时方程, 并得到轨道摄动引起的卫星原子钟坐标时计时误差方程.

当不考虑轨道摄动时, 广义相对论下卫星坐标时计时方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt_1^2} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_r, \\ dt_1 = \left(1 + \frac{w_1}{c^2} + \frac{v_1^2}{2c^2} \right) d\tau, \end{cases} \quad (10)$$

式中 t_1 为二体轨道下卫星坐标时; w_1 为二体轨道下卫星引力势; v_1 为二体轨道下卫星速度.

考虑轨道摄动时, 广义相对论下卫星坐标时计时方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt_2^2} = \mathbf{a}_g + \mathbf{a}_{J2} + \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_{sp} + \mathbf{a}_r, \\ dt_2 = \left(1 + \frac{w_2}{c^2} + \frac{v_2^2}{2c^2} \right) d\tau, \end{cases} \quad (11)$$

式中 t_2 为摄动轨道下卫星坐标时; w_2 为摄动轨道下卫星引力势; v_2 为摄动轨道下卫星速度.

由式(10)和(11)可以得到轨道摄动引起的卫星坐标时计时误差为

$$t_2 - t_1 = \int_0^\tau \left(\frac{w_2 - w_1}{c^2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2c^2} \right) d\tau. \quad (12)$$

从式(12)看出, 轨道摄动引起的卫星原子钟坐标时计时误差是一种时间累积效应, 不仅与卫星位置误差、速度误差有关, 也与卫星原子钟坐标时计量时间有关.

4.2 广义相对论下星间高精度时间比对

星间高精度时间比对是卫星高精度时间应用的基础. 在进行长时间高精度时间比对时, 不仅需要考虑两卫星之间的位置变化, 还需要考虑比对过程中两卫星由于位置和速度变化引起的广义相对论下时间误差变化. 本小节在卫星坐标时计时模型的基础上, 建立卫星高精度时间比对模型.

$\Delta\tau$ 为卫星A与B的初始钟差, 激光传递时间 T 为

$$T = t_B - t_A, \quad (13)$$

式中 t_A 为卫星A发射激光脉冲的坐标时; t_B 为卫星B接收到同一激光脉冲的坐标时.

卫星A首次发射激光脉冲的坐标时为 t_0 , 对应于卫星A的原时 τ_{A0} . 卫星B首次接收到激光脉冲的时间

为 t_{B1} , 对应于卫星B的原时 τ_{B1} . 假设 t_0 为坐标时起点, 即 $t_0 = \tau_{A0} = 0$. t_0 时刻卫星A与B的钟差为 $\Delta\tau = \tau_{B0} - \tau_{A0}$. 根据式(5)和(13)可得

$$\begin{aligned} T &= t_{B1} - t_0 = t_{B1} - \tau_{A0} \\ &= \int_{\tau_{B0}}^{\tau_{B1}} \left(1 + \frac{w_B}{c^2} + \frac{v_B^2}{2c^2} \right) d\tau \\ &= \tau_{B1} - \tau_{A0} - \Delta\tau + \int_{\tau_{A0} + \Delta\tau}^{\tau_{B1}} \left(\frac{w_B}{c^2} + \frac{v_B^2}{2c^2} \right) d\tau \\ &\approx \tau_{B1} - \tau_{A0} - \Delta\tau + \left(\frac{w_B(\tau_{B1})}{c^2} + \frac{v_B(\tau_{B1})^2}{2c^2} \right) T. \end{aligned} \quad (14)$$

整理上式可得

$$\Delta\tau = \tau_{B1} - \tau_{A0} - T + T_{tra}, \quad (15)$$

式中 $T_{tra} = \left(\frac{w_B(\tau_{B1})}{c^2} + \frac{v_B(\tau_{B1})^2}{2c^2} \right) T$, 转换时延 T_{tra} 为激光传递过程中卫星B坐标时与原时之间的误差.

两卫星间进行时间比对时, 两卫星上原子钟从坐标时 t_0 时刻开始计时, 由式(5)可得

$$\begin{cases} t_A = \tau_A + \int_0^{\tau_A} \left(\frac{w_A}{c^2} + \frac{v_A^2}{2c^2} \right) d\tau, \\ t_B - t_{B1} = \tau_B - \tau_{B1} + \int_{\tau_{B1}}^{\tau_B} \left(\frac{w_B}{c^2} + \frac{v_B^2}{2c^2} \right) d\tau, \end{cases} \quad (16)$$

式中 τ_A 为卫星A的原时, 对应于坐标时 t_A ; τ_B 为卫星B的原时, 对应于坐标时 t_B ; w_A 和 v_A 分别为卫星A的引力势和速度; w_B 和 v_B 分别为卫星B的引力势和速度.

将式(15)和(16)代入式(13)得到广义相对论下星间高精度时间比对模型为

$$\Delta\tau = \tau_B - \tau_A - T + T_{tra} + T_{com}, \quad (17)$$

式中 τ_A 为卫星A发射激光脉冲的原时; τ_B 为卫星B接收到激光脉冲的原时; T_{com} 是时间比对过程中两卫星坐标时计时差引起的误差.

式(17)中的 T_{com} 为

$$T_{com} = \int_{\tau_{B1}}^{\tau_B} \left(\frac{w_B}{c^2} + \frac{v_B^2}{2c^2} \right) d\tau - \int_0^{\tau_A} \left(\frac{w_A}{c^2} + \frac{v_A^2}{2c^2} \right) d\tau. \quad (18)$$

对于同一束激光信号有 $ds^2 = 0$ ^[23], 求解式(3)可以得到比对时间 T 为

$$T = T_{dis} + T_{sag} + T_{sha}, \quad (19)$$

式中 T_{dis} 为空间几何距离传播时延; T_{sag} 为Sagnac效应引起的时延; T_{sha} 为Shapiro效应引起的时延.

T_{dis} , T_{sag} 以及 T_{sha} 为

$$\begin{cases} T_{dis} = \frac{d_{AB}}{c}, \\ T_{sag} = \frac{\mathbf{d}_{AB} \cdot \mathbf{v}_b}{c^2} + \frac{\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{v}_b + \mathbf{d}_{AB} \cdot \mathbf{a}_b}{2c^3} d_{AB} \\ \quad + \frac{(\mathbf{d}_{AB} \cdot \mathbf{v}_b)^2 / (\mathbf{d}_{AB} \cdot \mathbf{d}_{AB})}{2c^3} d_{AB}, \\ T_{sha} = \frac{2Gm_E}{c^3} \ln \frac{r_A + r_B + d_{AB}}{r_A + r_B - d_{AB}}, \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\mathbf{r}_B$ 与 $\mathbf{r}_A$ 分别为卫星B和A的矢径; $\mathbf{d}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$; $r_B = \|\mathbf{r}_B\|$; $r_A = \|\mathbf{r}_A\|$; $d_{AB} = \|\mathbf{d}_{AB}\|$.

轨道摄动引起的时间比对总误差 ΔT_{per} 为

$$\Delta T_{per} = \Delta T_{dis} + \Delta T_{sag} + \Delta T_{sha} + \Delta T_{tra} + \Delta T_{com}, \quad (21)$$

式中 $\Delta T_{dis} = T_{dis2} - T_{dis1}$, T_{dis1} 为考虑摄动时几何时延, T_{dis2} 为不考虑摄动时几何时延; $\Delta T_{sag} = T_{sag2} - T_{sag1}$, T_{sag1} 为考虑摄动时Sagnac效应时延, T_{sag2} 为不考虑摄动时Sagnac效应时延; $\Delta T_{sha} = T_{sha2} - T_{sha1}$, T_{sha1} 为考虑摄动时Shapiro效应时延, T_{sha2} 为不考虑摄动时Shapiro效应时延; $\Delta T_{tra} = T_{tra1} - T_{tra2}$, T_{tra1} 为不考虑摄动时转换时延, T_{tra2} 为考虑摄动时转换时延; $\Delta T_{com} = T_{com1} - T_{com2}$, T_{com1} 为不考虑摄动时两卫星坐标时计时差, T_{com2} 为考虑摄动时两卫星坐标时计时差.

由式(21)得, 轨道摄动引起的广义相对论误差 ΔT 为

$$\Delta T = \Delta T_{sag} + \Delta T_{sha} + \Delta T_{tra} + \Delta T_{com}. \quad (22)$$

5 仿真分析

5.1 广义相对论下卫星轨道预报仿真分析

本小节以地球静止轨道卫星为研究对象, 对广义相对论引起的卫星轨道误差进行仿真分析. 式(7)的仿真参数如表1所示.

对式(7)进行仿真分析, 仿真时间432000 s, 仿真步长1 s, 仿真时为坐标时, 仿真结果图如图1-3所示.

从图1看出, 对于静止轨道卫星广义相对论项引起

表 1 仿真参数

Table 1 Simulation parameters^{a)}

参数名称	参数值
卫星初始位置 $\mathbf{r}(t_0)$ (m)	$[-r_e \ 0 \ 0]^T$
卫星初始速度 $\mathbf{v}(t_0)$ (m/s)	$[0 \ v_e \ 0]^T$
万有引力系数 G ($\text{N m}^2/\text{kg}^2$)	6.673×10^{-11}
地球质量 M_E (kg)	5.965×10^{24}

a) $r_e=42220.6$ km, $v_e=3.07$ km/s.

图 1 (网络版彩图) 广义相对论项引起的速度误差曲线

Figure 1 (Color online) Velocity error curve induced by relativity term.

图 2 (网络版彩图) 广义相对论项引起的位置误差曲线

Figure 2 (Color online) Position error curve induced by relativity term.

的速度误差在 $\mu\text{m/s}$ 量级, 广义相对论项引起的 x 轴和 y 轴速度误差随时间周期性变化. 从图2可以看出, 对于

图 3 (网络版彩图) 广义相对论项引起的位置总误差曲线

Figure 3 (Color online) Total position error curve induced by relativity term.

静止轨道卫星广义相对论引起的 x 轴位置误差随时间周期性变化, 误差最大值为 26.53 mm; y 轴位置误差随时间增加而增大. 速度误差和位置误差变化周期为卫星轨道周期. 从图3可以看出, 在卫星二体轨道中, 广义相对论项引起的位置总误差在万秒达到 3.46 mm, 即 11.53 ps.

5.2 卫星坐标计时仿真分析

本小节将对轨道摄动引起的卫星坐标计时进行仿真分析, 式(11)中的 $\mathbf{a}_g$, $\mathbf{a}_{J_2}$, $\mathbf{a}_S$, $\mathbf{a}_M$, $\mathbf{a}_{sp}$ 和 $\mathbf{a}_r$ 为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_g = -\frac{Gm_E}{r_{EA}^3} \mathbf{r}_{EA}, \\ \mathbf{a}_{J_2} = -\frac{Gm_E}{r_{EA}^3} \frac{3J_2 R_e^2}{2r_{EA}^2} \mathbf{r}_{EA}, \\ \mathbf{a}_S = Gm_S \left(\frac{\mathbf{r}_{AS}}{r_{AS}^3} - \frac{\mathbf{r}_{ES}}{r_{ES}^3} \right), \\ \mathbf{a}_M = Gm_M \left(\frac{\mathbf{r}_{AM}}{r_{AM}^3} - \frac{\mathbf{r}_{EM}}{r_{EM}^3} \right), \\ \mathbf{a}_{sp} = \frac{KpAr_{AS}}{m_A r_{AS}}, \\ \mathbf{a}_r = \frac{Gm_E}{c^2 r_{EA}^3} \left[\left(\frac{4Gm_e}{r} - v^2 \right) \mathbf{r}_{EA} + 4(\mathbf{r}_{EA} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{EA}) \dot{\mathbf{r}}_{EA} \right], \end{cases} \quad (23)$$

式中 $\mathbf{r}_{EA}$ 为地心到卫星矢径, J_2 为地球形状扰动系数, R_e 为地球平均赤道半径, m_S 为太阳质量, $\mathbf{r}_{AS}$ 为卫星到太阳矢径, $\mathbf{r}_{ES}$ 为地心到太阳矢径, m_M 为月球质量, $\mathbf{r}_{AM}$ 为卫星到月球矢径, $\mathbf{r}_{EM}$ 为地心到月球矢径, K 为太

表2 仿真参数

Table 2 Simulation parameters

参数名称	参数值
卫星质量 m (kg)	2334.3
地球形状系数 J_2	1082.63×10^{-6}
地球平均赤道半径 R_e (m)	6.378×10^6
太阳质量 m_s (kg)	1.989×10^{30}
月球质量 m_M (kg)	7.349×10^{22}
日地距离 R_{ES} (m)	1.496×10^{11}
日月距离 r_{EM} (m)	3.844×10^8
反射系数 K	1
太阳辐射流 p (N/m ²)	4.65×10^{-6}
卫星截面积 A (m ²)	27

阳辐射系数, p 为太阳辐射密度, A 为太阳辐射面积, m_A 为卫星质量.

式(10)和(11)中的引力势为 $w = U_E + u_E^{\text{tial}}$, U_E 为地心引力势, u_E^{tial} 为除地球以外的其他天体的引力势.

$$U_E(\mathbf{x}) = \frac{Gm_E}{r} \left(1 + \frac{J_2 R_e^2}{2r_{EA}^2} \right). \quad (24)$$

u_E^{tial} 主要为月球和太阳的引力潮汐摄动:

$$u_E^{\text{tial}} = \sum_{b \neq E} (U_b(\mathbf{r}_{bE} + \mathbf{r}_{EA}) - U_b(\mathbf{r}_{bE}) - \mathbf{r}_{EA} \cdot \nabla U_b(\mathbf{r}_{bE})) \\ \approx \sum_{b \neq E} \frac{GM_b}{2r_{bE}^2} (3(\mathbf{n}_{bE} \cdot \mathbf{r}_{EA})^2 - r_{EA}^2), \quad (25)$$

式中 $\mathbf{n}_{bE}$ 分别为日地、月地单位方向向量; r_{bE} 分别为日地、月地距离.

仿真参数如表2所示, 其余仿真参数与5.1小节相同. 对式(12)进行仿真分析, 仿真时间10000 s, 仿真步长1 s, 仿真时为原时, 得到卫星原子钟坐标计时误差曲线如图4和5所示.

从图4看出, J2摄动引起的卫星坐标计时误差最大, 依次为月球引力摄动、太阳引力摄动以及太阳光压摄动. 在1万秒时, 太阳光压摄动引起的坐标计时误差远小于1 ps, J2摄动、月球引力摄动以及太阳引力摄动引起的坐标计时误差在皮秒量级. 从图5看出, 轨道摄动引起的原子钟坐标计时误差在4048 s达到1 ps, 在1万秒达到15.36 ps. 静止轨道卫星进行皮秒量级坐标计时, 当时间小于4048 s时, 可不考虑轨道摄

动引起的坐标计时误差影响.

5.3 卫星间皮秒量级时间比对仿真分析

本小节将对轨道摄动引起的广义相对论下星间皮秒量级时间比对仿真分析. 卫星A的初始条件与5.2小节相同, 卫星B的初始位置和初始速度分别为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_B(t_0) = [0 \ r_e \ 0]^T, \\ \mathbf{v}_B(t_0) = [v_e \ 0 \ 0]^T. \end{cases}$$

对式(18)进行仿真分析, 仿真时间432000 s, 仿真

图4 (网络版彩图)各轨道摄动项引起的坐标计时误差

Figure 4 (Color online) Coordinate timing error induced by each orbit perturbation.

图5 (网络版彩图)轨道摄动引起的坐标计时误差

Figure 5 (Color online) Coordinate timing error induced by total orbit perturbations.

步长1 s, 仿真时为原时, 得到 ΔT_{dis} , ΔT_{sag} , ΔT_{sha} , ΔT_{tra} , ΔT_{com} 以及 ΔT 变化曲线如图6~11所示。

从图6看出轨道摄动引起的几何时延误差在1万秒达到2.886 μs 。从图7看出轨道摄动引起的Sganac效应误差 ΔT_{sag} 在1万秒达到80.71 ps。从图8看出轨道摄动引起的Shapiro效应误差 ΔT_{sha} 在1万秒达到0.6952 fs。从图9看出轨道摄动引起的转换时延误差 ΔT_{tra} 在1万秒达到0.4129 fs。从图10看出轨道摄动引起的卫星坐标计时误差 ΔT_{com} 在1万秒达到24.01 ps。从图11看出轨道摄动引起的广义相对论效应总误差在1万秒达到

图 6 (网络版彩图) ΔT_{dis} 随时间变化曲线
Figure 6 (Color online) Time history of ΔT_{dis} .

图 7 (网络版彩图) ΔT_{sag} 随时间变化曲线
Figure 7 (Color online) Time history of ΔT_{sag} .

图 8 (网络版彩图) ΔT_{sha} 随时间变化曲线
Figure 8 (Color online) Time history of ΔT_{sha} .

图 9 (网络版彩图) ΔT_{tra} 随时间变化曲线
Figure 9 (Color online) Time history of ΔT_{tra} .

56.69 ps. 对于持续1万秒的皮秒量级星间时间比对, 可不考虑轨道摄动引起的广义相对论转换时延误差 ΔT_{tra} 和Shapiro效应误差 ΔT_{sha} 。

5.4 一般轨道分析

本小节在保证初始星间距离相同的情况下, 分别对轨道高度为3万公里以及5万公里的卫星进行了仿真对比。

轨道高度为3万公里的卫星仿真初始条件为: 卫星A初始位置 $[-r_e \ 0 \ 0]^T$, 卫星A初始速度 $[0 \ v_e \ 0]^T$, 卫

图 10 (网络版彩图) ΔT_{com} 随时间变化曲线Figure 10 (Color online) Time history of ΔT_{com} . 图 11 (网络版彩图) ΔT 随时间变化曲线Figure 11 (Color online) Time history of ΔT .

星B初始位置 $[-r_e \sin \theta \ r_e \cos \theta \ 0]^T$, 卫星B初始速度 $[v_e \cos \theta \ v_e \sin \theta \ 0]^T$, $r_e = 36378 \text{ km}$, $v_e = 3.31 \text{ km/s}$, $\theta = 1.925 \text{ rad}$. 轨道高度为5万公里的卫星仿真初始条件为: 卫星A初始位置 $[-r_e \ 0 \ 0]^T$, 卫星A初始速度 $[0 \ v_e \ 0]^T$, 卫星B初始位置 $[-r_e \sin \theta \ r_e \cos \theta \ 0]^T$, 卫星B

表 3 一般轨道仿真结果

Table 3 Simulation results of general orbits

轨道高度	1万秒计时误差 (ps)	1万秒比对误差 (ps)
3万公里	25.31	102
3.6万公里	15.36	56.69
5万公里	7.61	26.7

初始速度 $[v_e \cos \theta \ v_e \sin \theta \ 0]^T$, $r_e = 56378 \text{ km}$, $v_e = 2.66 \text{ km/s}$, $\theta = 1.116 \text{ rad}$.

仿真结果总结如表3所示. 从表中可以看出一般轨道卫星同样受轨道摄动的影响, 卫星皮秒计时与时间比对也会产生误差. 在地球主引力场范围内, 随着轨道高度的增加, 卫星摄动力减小, 轨道摄动引起的坐标计时误差以及时间比对误差逐渐减小.

6 结论

本文针对新一代空间科学任务对皮秒量级坐标计时和时间比对的需求, 基于GCRS下的时空度规和广义相对论下卫星轨道方程, 建立了卫星高精度坐标计时模型及星间时间比对模型. 仿真校验结果表明, 对于地球静止轨道卫星, 广义相对论项引起的速度误差随时间周期变化, 引起的位置误差随时间增加而增大, 在1万秒达到3.46 mm. 轨道摄动引起的原子钟坐标计时误差在4048 s达到1 ps, 在1万秒时达到15.36 ps. 对两颗地球静止轨道卫星进行时间比对仿真分析, 轨道摄动引起的广义相对论总误差在1万秒达到56.69 ps. 卫星在进行皮秒量级坐标计时及时间比定时, 不仅需要考虑轨道摄动引起的几何时延误差, 也要考虑轨道摄动对广义相对论项误差的影响. 星间距相同的情况下, 高轨卫星所受摄动力影响减小, 轨道摄动引起的坐标计时误差以及时间比对误差减小.

本文工作为未来高精度空间时频应用提供理论支持. 空间科学任务(如量子通信以及引力波测量等)对时间传递精度提出了更高的要求. 在工程应用方面, 星间皮秒量级时间比对可提高卫星自主导航精度, 对地面站依赖性更小.

参考文献

- 1 Turyshev S G, Yu N, Toth V T. General relativistic observables for the ACES experiment. *Phys Rev D*, 2016, 93: 045027

- 2 Duchayne L, Mercier F, Wolf P. Orbit determination for next generation space clocks. *Astron Astrophys*, 2009, 504: 653–661
- 3 Yang W K, Meng W D, Han W B, et al. Advances in atomic clock ensemble in space of Europe and ultraprecise time and frequency transfer (in Chinese). *Prog Astron*, 2016, 34: 221–237 [杨文可, 孟文东, 韩文标, 等. 欧洲空间原子钟组ACES与超高精度时频传递技术新进展. 天文学进展, 2016, 34: 221–237]
- 4 Shen Q. The research on high resolution time to digital conversion for quantum communication (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Hefei: University of Science and Technology of China, 2013 [沈奇. 量子通信中的精密时间测量技术研究. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2013]
- 5 Ren J G, Yin J, Yang B, et al. Time synchronization for quantum key distribution from ground to satellite (in Chinese). *J Infrared Millimeter Waves*, 2011, 30: 381–384 [任继刚, 印娟, 杨彬, 等. 星地量子密钥分发中的时间同步研究. 红外与毫米波学报, 2011, 30: 381–384]
- 6 Dai H. Experimental research on laser time transfer based on Micius satellite (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Hefei: University of Science and Technology of China, 2020 [戴辉. 基于墨子号卫星的激光时间传递的研究. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2020]
- 7 Liu Y H, Li X H. Effect of orbit error on space station time comparison and calibrating method (in Chinese). *J Astronautics*, 2019, 40: 345–351 [刘音华, 李孝辉. 轨道误差对空间站高精度时间比对的影响分析及修正方法. 宇航学报, 2019, 40: 345–351]
- 8 Yuan Y B, Wang B, Wang L J. Fiber-based joint time and frequency dissemination via star-shaped commercial telecommunication network. *Chin Phys B*, 2017, 26: 080601
- 9 Liu L L, Wang Y K, Chen J Y, et al. Effects of relativity in autonomous time reference for navigation constellation (in Chinese). *J Astronautics*, 2015, 36: 470–476 [刘丽丽, 王跃科, 陈建云, 等. 导航星座自主时间基准的广义相对论效应. 宇航学报, 2015, 36: 470–476]
- 10 Pascual-Sánchez J F. Introducing relativity in global navigation satellite systems. *Ann Phys*, 2007, 16: 258–273
- 11 Ashby N. Relativity in the global positioning system. *Living Rev Relativ*, 2003, 6: 1
- 12 Da D A, Yang Y F. The relativity effects of time for BD-2 navigation satellites. In: Proceedings of 2005 China Time and Frequency Symposium. Xi'an, 2005 [达道安, 杨亚天. 北斗导航卫星钟相对论效应误差的理论研究. 见: 2005年全国时间频率学术交流会文集. 西安, 2005]
- 13 Chen J Y, Xu L X, Li X H, et al. Method of common-view time transfer using communication satellites (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2019, 49: 543–551 [陈婧亚, 许龙霞, 李孝辉, 等. 基于通信卫星的共视授时方法. 中国科学: 技术科学, 2019, 49: 543–551]
- 14 Guo X Y, Zhou Y B, Yang J. The space-based high-precision time transfer method based on navigation constellation inter-satellite link (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2017, 47: 71–79 [郭熙业, 周永彬, 杨俊. 基于导航星间链路的天基高精度时间传递方法. 中国科学: 技术科学, 2017, 47: 71–79]
- 15 Petit G, Wolf P. Relativistic theory for picosecond time transfer in the vicinity of the Earth. *Astron Astrophys*, 1994, 286: 971–977
- 16 Danzmann K, LISA Science Team. LISA—An ESA cornerstone mission for the detection and observation of gravitational waves. *Adv Space Res*, 2003, 32: 1233–1242
- 17 Turyshev S G, Toth V T, Sazhin M V. General relativistic observables of the GRAIL mission. *Phys Rev D*, 2013, 87: 024020
- 18 Wang W, Quarta A A, Mengali G, et al. Multiple solar sail formation flying around heliocentric displaced orbit via consensus. *Acta Astronaut*, 2019, 154: 256–267
- 19 Han W B, Tao J H, Ma W. Review and prospect of the relativistic astronomical reference system (in Chinese). *Prog Astron*, 2014, 32: 95–117 [韩文标, 陶金河, 马维. 相对论天文参考系的回顾与展望. 天文学进展, 2014, 32: 95–117]
- 20 Petit G, Wolf P. Relativistic theory for time comparisons: A review. *Metrologia*, 2005, 42: S138–S144
- 21 Nelson R A. Relativistic time transfer in the vicinity of the Earth and in the solar system. *Metrologia*, 2011, 48: S171–S180
- 22 Moyer T D. Mathematical formulation of the Double-Precision Orbit Determination Program (DPODP). Jet Propulsion Laboratory. Technical Report 32-1527, 1971. 1–18
- 23 Lu X Y, Tan Y J, Shao C G. Sensitivity functions for space-borne gravitational wave detectors. *Phys Rev D*, 2019, 100: 044042

General relativistic theory for picosecond coordinate timing and time comparison of satellites under orbit perturbations

LIANG Jian^{1,2}, JIA Qian^{1,2}, LIU Lei^{1,2} & TANG Shuo^{1,2}

¹ School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

² Shaanxi Aerospace Flight Vehicle Design Key Laboratory, Xi'an 710072, China

Time comparison in picoseconds has been proposed for various space-based scientific missions, such as atomic clock ensemble in space, measurement of fine-structure constants, gravitational redshift measurement, deep space exploration, and large-scale quantum communication. It is necessary to establish more accurate coordinate-timing and time-comparison models of satellites based on general relativity. In this study, we developed an orbit dynamics model of satellites based on the metric tensor. Considering the effect of orbit perturbations, we developed coordinate-timing and time-comparison models with higher accuracy. The developed time-comparison model provides theoretical support for picosecond time comparison among satellites with longer time. Further, we simulated geostationary satellites, and the results indicate that the effect of the general relativity term on the satellite velocity is in the order of $\mu\text{m/s}$. The effect of the general relativity term on the satellite position increases with time, reaching 3.46 mm (11.53 ps) at 10000 s. The coordinate-timing and time-comparison errors resulting from the orbit perturbations reach 15.36 and 56.69 ps, respectively, at 10000 s. The simulation results of general orbits show that the coordinate-timing and time-comparison errors are lower at higher orbits in the vicinity of Earth.

general relativity, metric tensor, orbit perturbations, coordinate timing, time comparison

doi: [10.1360/SST-2020-0504](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0504)