中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 881 ∼ 898
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

三维不可压缩黏弹性流体系统解的逐点估计

献给陈恕行教授 80 华诞

白一格, 张挺*

浙江大学数学科学学院, 杭州 310027
E-mail: 1366247326@qq.com, zhangting79@zju.edu.cn

收稿日期: 2020-07-30; 接受日期: 2020-09-22; 网络出版日期: 2020-12-28; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771389, 11931010 和 11621101) 资助项目

摘要 本文考虑三维不可压缩黏弹性流体力学模型的 Cauchy 问题. 首先引入适当的变量变换, 对变换后的方程组, 研究其线性化系统的 Green 函数. 接着, 根据 Green 函数逐点估计方法, 结合方程组解的表达式, 分析 Riesz 算子的影响, 得到解关于时空的逐点估计.

关键词 不可压缩黏弹性流体系统 Green 函数 逐点估计

MSC (2020) 主题分类 76A10, 35Q35, 35B40

1 引言

本文考虑如下的三维不可压缩黏弹性流体力学模型:

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \\ v_t + v \cdot \nabla v + \nabla P = \mu \Delta v + \nabla \cdot (FF^\top), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ F_t + v \cdot \nabla F = \nabla v F, \\ (v, F)\,|_{t=0} = (v_0, F_0), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $v(t,x)$ 和 $P(t,x)$ 表示速度场和压强, μ (>0) 是黏性系数, $F(t,x)$ 是形变张量. 本文采用如下记号:

$$(\nabla u)^{ij} = \partial_j u^i, \quad (\nabla u F)_{ij} = \partial_k u^i F^{kj}, \quad (\mathrm{div} F)^i = \partial_k F^{ik},$$

英文引用格式: Bai Y G, Zhang T. The pointwise estimates of solutions for the 3D incompressible viscoelastic fluids (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 881–898, doi: 10.1360/SSM-2020-0240

令 $E := F - I$, 则可将系统 (1.1) 转换为

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ v_t^i + v \cdot \nabla v^i + \nabla_i P = \mu \Delta v^i + E^{jk} \nabla_j E^{ik} + \nabla_j E^{ij}, \\ E_t + v \cdot \nabla E = \nabla v E + \nabla v, \\ (v, E)(0,x) = (v_0, E_0)(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

进一步假定初值 (v_0, E_0) 满足如下限制条件:

$$\nabla \cdot v_0 = 0, \quad \det(I + E_0) = 1, \quad \nabla \cdot E_0^\top = 0, \tag{1.3}$$

$$\nabla_m E_0^{kj} - \nabla_j E_0^{km} = E_0^{lj} \nabla_l E_0^{km} - E_0^{lm} \nabla_l E_0^{kj}, \tag{1.4}$$

其中 (1.4) 可以理解为 Lagrange 坐标与 Euler 坐标之间关于变量变换的一致性条件 (参见文献 [1]). 由文献 [1,2] 中的结论可知, 在任意的时间 $t \geqslant 0$, 解 v 和 E 满足

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \det(I + E) = 1, \quad \nabla \cdot E^\top = 0, \tag{1.5}$$

$$\nabla_m E^{kj} - \nabla_j E^{km} = E^{lj} \nabla_l E^{km} - E^{lm} \nabla_l E^{kj}. \tag{1.6}$$

近年来, 黏弹性流体力学的数学理论得到很多关注. 由 (1.2) 的线性系统

$$\begin{cases} \partial_t E - \nabla v = 0, \\ \partial_t v - \Delta v - \operatorname{div} E = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

可知, E 仅具有部分耗散, 即 $\operatorname{div} E$ 具有耗散性. 这给整体适定性的研究带来了困难. 为此, 在二维情形, 利用 $\operatorname{div} E^\top = 0$, Lin 等 [3] 作如下变换:

$$E = \begin{pmatrix} -\partial_2 \phi^1 & -\partial_2 \phi^2 \\ \partial_1 \phi^1 & \partial_1 \phi^2 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

其中 $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, 研究了 (v, ϕ) 系统的整体适定性问题. 对于三维情形, (1.8) 就不适用了, Chen 和 Zhang [2] 及 Lin 和 Zhang [4] 利用如下量:

$$G := F^{-1}, \quad U := G - I$$

(参见文献 [5]), 研究了 (v, U) 系统的整体适定性问题, 其中 G 满足

$$\partial_i G^{kj} = \partial_j G^{ki}, \quad i,j,k = 1,2,3,$$

而 F 不满足这个好性质. 之后, Lei 等 [1] 证明了 $\operatorname{curl} F$ 实际上是高阶非线性项 (参见 (1.6)), 从而在 Sobolev 空间 H^s 中证明了小初值整体适定性. 之后, Qian [6] 利用变换 $d^{kj} = -\wedge^{-1} \nabla_j v^k$ 和限制条件 (1.6) 巧妙地将系统 (1.2) 转换, 再结合文献 [7] 中可压的 Navier-Stokes 方程组的研究方法, 证得具有小初值的系统 (1.2) 在

$$(\dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}(\mathbb{R}^N) \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)) \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1}(\mathbb{R}^N)$$

空间的整体适定性. Zhang 和 Fang [8] 把这一结果延拓到了 L^p 框架下. 之后, Fang 等 [9] 研究了初值在更大一类空间

$$\mathcal{E}_{0,\alpha,p} := \{(\phi,\varphi) \in \mathcal{S}_h' \times \mathcal{S}_h' : (\phi_L,\varphi_L) \in \dot{B}_{2,1}^{\frac{N}{2}-1+\alpha}(\mathbb{R}^N),\ \phi_H \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \dot{B}_{p,1}^{\frac{N}{p}-1}(\mathbb{R}^N)\}$$

中方程具有小初值整体解的存在性和唯一性, 其中 $\alpha > 0$, 且 $p \geqslant 2$. 此外还有很多研究结果是通过不同于上述方法的能量方法来研究不可压黏弹性系统, 具体可参见文献 [1,3–5,10–13]. Shibata [14] 在基于文献 [15–17] 的研究基础上得到了线性黏弹性方程的 Cauchy 问题解的衰减率. 本文将研究系统 (1.1) 整体解关于时空的逐点估计.

对于可压 Navier-Stokes 方程组解的逐点估计, Hoff 和 Zumbrun [16] 研究了等熵 Navier-Stokes 方程的 L^p 估计, Hoff 和 Zumbrun [17] 研究了 Navier-Stokes 方程的 Green 函数的衰减估计. Liu 和 Zeng [18] 用 Green 函数的方法对一维的广义双曲抛物系统的解的逐点估计进行了研究. Liu 和 Noh [19] 通过对 Navier-Stokes 方程的 Green 函数分析, 结合相应的非线性问题, 推导出了这些不同波的非线性估计. 这一系列的研究工作可以应用到其他的流体模型上, 其中文献 [20,21] 将这一方法应用到了二、三维空间非等熵的 Navier-Stokes 方程, 文献 [22,23] 研究了带有阻尼项的单极和双极 Euler 方程, 文献 [24–27] 研究了单极和双极的 Navier-Stokes-Poisson 方程. 本文将该方法应用到不可压缩黏弹性流体系统的研究. 首先, 需要研究 (1.2) 线性部分的 Green 函数. 但是, 由于该系统对应的 Green 函数不易直接估计, 也就是文献 [15] 中经典的逐点估计方法似乎无法很好地应用, 所以需要对原有的系统进行适当的变换. 文献 [28] 给了我们很大的启发, 我们利用了该文献中的变量变换转化方程, 这一关键步骤极大地方便了我们接下去的估计. 转换后的方程对应的 Green 函数与 Navier-Stokes 系统中 Green 函数有部分是相似的. 因此, 对所得到的 Green 函数, 我们有很好的估计. 然而, 在本文中, 这样的估计是不够的. 因为结合解的具体表达式, 还会出现有 Riesz 算子作用于 Green 函数的情形. 为此, 我们需要借鉴文献 [15,19,29] 中的方法来处理这些情形. 本文的主要定理如下:

定理 1.1　假定初值 $v_0, F_0 - I \in H^6(\mathbb{R}^3)$ 满足条件 (1.3) 和 (1.4), 且存在很小的 ε_0 使得

$$\begin{aligned}&\|v_0\|_{H^6(\mathbb{R}^3)} + \|F_0 - I\|_{H^6(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon_0,\\ &|D_x^\alpha(v_0, F_0 - I)| \leqslant \varepsilon_0(1+|x|^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad |\alpha| \leqslant 1,\end{aligned} \tag{1.9}$$

则系统 (1.1) 存在唯一的整体解 (F,v) 满足 (1.5) 和 (1.6), $(F-I,v) \in L^\infty([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))$ 和 $\nabla v \in L^2([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))$, 并且解有如下逐点估计:

$$|(v,F-I)(x,t)| \leqslant C(1+t)^{-2}\left(\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{1.10}$$

2　Green 函数及 Green 函数的逐点估计

首先需要引入一些变量变换 (参见文献 [28]):

$$d^{kj} = -\Lambda^{-1}\nabla_j v^k, \quad v^k = \Lambda^{-1}\nabla_j d^{kj}, \quad \Lambda^s f = \mathscr{F}^{-1}(|\xi|^s \hat{f}). \tag{2.1}$$

再结合限制条件 (1.5) 和 (1.6), 系统 (1.2) 可以转换为

$$\begin{cases} d_t^{kj} - \mu\Delta d^{kj} - \Lambda E^{kj} = F_1^{kj}, \\ E_t^{kj} + \Lambda d^{kj} = F_2^{kj}, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中非线性项 F_1^{kj} 和 F_2^{kj} $(k,j=1,2,3)$ 具体为

$$F_1^{kj}=\Lambda^{-1}\nabla_j\nabla_l(\delta^{km}+\nabla_k\Lambda^{-2}\nabla_m)(v^lv^m-E^{lq}E^{mq})+\Lambda^{-1}\nabla_q\nabla_l(E^{lj}E^{kq}-E^{lq}E^{kj})$$

和

$$F_2^{kj}=-\nabla_l(v^lE^{kj})+\nabla_q(v^kE^{qj}).$$

通过计算, 线性化系统 (2.2) 后的 Green 矩阵的 Fourier 变换 $\widehat{G}$ 是

$$\widehat{G}(\xi,t)=\begin{bmatrix}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3} & |\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3}\\ -|\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3} & -\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3}\end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

其中

$$\lambda_\pm=\frac{-\mu|\xi|^2\pm\sqrt{\mu^2|\xi|^4-4|\xi|^2}}{2}. \tag{2.4}$$

根据齐次化原理, 系统 (2.2) 的解 $(d,E)^\top$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}d\\E\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}G_{11}I_{3\times3} & G_{12}I_{3\times3}\\G_{21}I_{3\times3} & G_{22}I_{3\times3}\end{pmatrix}*_x\begin{pmatrix}d_0\\E_0\end{pmatrix}\\&\quad+\int_0^t\begin{pmatrix}G_{11}I_{3\times3} & G_{12}I_{3\times3}\\G_{21}I_{3\times3} & G_{22}I_{3\times3}\end{pmatrix}(\cdot,t-s)*_x\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}(\cdot,s)ds.\end{aligned} \tag{2.5}$$

结合变换 (2.1), 可以将变量的每个分量 v^k 和 E^{kj} $(k,j=1,2,3)$ 具体表示为

$$\begin{aligned}v^k=&\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)*_x v_0^k+\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)*_x E_0^{kj}\\&-\int_0^t(\delta^{mk}+\Lambda^{-2}\nabla_m\nabla_k)\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\&+\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\xi^j|\xi|^{-2}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x\nabla_r\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\&+\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds\end{aligned} \tag{2.6}$$

和

$$\begin{aligned}E^{kj}=&\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)*_x v_0^k+\left(\mathscr{F}^{-1}\left(-\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)*_x E_0^{kj}\\&+\int_0^t(\delta^{mk}+\Lambda^{-2}\nabla_m\nabla_k)\left(\mathscr{F}^{-1}\left(-\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\&+\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(-\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x\nabla_r\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\&+\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(-\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds.\end{aligned} \tag{2.7}$$

在估计 (2.3) 中的 Green 函数 $\widehat{G}(\xi,t)$ 之前, 先引入 3 个光滑截断函数

$$\chi_1(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|<\varepsilon_1,\\ 0, & |\xi|>2\varepsilon_1,\end{cases}\qquad \chi_3(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|>R+1,\\ 0, & |\xi|<R\end{cases}$$

和 $\chi_2=1-\chi_1-\chi_3$, 其中 $2\varepsilon_1<R$. 取

$$\widehat{G}^j(\xi,t)=\chi_j(\xi)\widehat{G}(\xi,t),\quad j=1,2,3.$$

由此, 可以把 $\widehat{G}(\xi,t)$ 分成低频、中频和高频 3 部分:

$$G(x,t)=\mathscr{F}^{-1}(\widehat{G}^1(\xi,t))+\mathscr{F}^{-1}(\widehat{G}^2(\xi,t))+\mathscr{F}^{-1}(\widehat{G}^3(\xi,t))=:G^1(x,t)+G^2(x,t)+G^3(x,t).$$

先考虑 $\widehat{G}(\xi,t)$ 的低频部分 $\widehat{G}^1(\xi,t)$. 由 $\lambda_\pm$ 的具体表达式 (2.4) 可计算得到, 当 $|\xi|$ 很小时, 有

$$\lambda_\pm=-\frac{\mu}{2}|\xi|^2\pm\mathrm{i}|\xi|(1+p(|\xi|^2)),$$

其中 $p(x):=-\frac{\mu^2}{8}x+o(x)$. 结合 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$, 可得

$$\begin{aligned}
\widehat{G}^1_{11}&=\chi_1\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\\
&=\chi_1\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_+)t}\frac{\mathrm{Re}\lambda_+}{\mathrm{Im}\lambda_+}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_+)t)+\chi_1\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_+)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_+)t)\\
&=-\frac{\mu}{2}|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\cos(|\xi|p(|\xi|^2)t)\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&\quad-\frac{\mu}{2}|\xi|^2\cos(|\xi|t)\frac{\sin(|\xi|p(|\xi|^2)t)}{|\xi|p(|\xi|^2)t}\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}p(|\xi|^2)t\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&\quad+\cos(|\xi|t)\cos(|\xi|p(|\xi|^2)t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&\quad-\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}|\xi|\frac{\sin(|\xi|p(|\xi|^2)t)}{|\xi|p(|\xi|^2)t}|\xi|p(|\xi|^2)t\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1,
\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{G}^1_{12}&=\chi_1|\xi|\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\\
&=|\xi|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\cos(|\xi|p(|\xi|^2)t)\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&\quad+|\xi|\cos(|\xi|t)\frac{\sin(|\xi|p(|\xi|^2)t)}{|\xi|p(|\xi|^2)t}\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}p(|\xi|^2)t\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&=-\widehat{G}^1_{21},
\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{G}^1_{22}&=-\chi_1\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\\
&=-\chi_1\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_+)t}\frac{\mathrm{Re}\lambda_+}{\mathrm{Im}\lambda_+}\sin(\mathrm{Im}(\lambda_+)t)+\chi_1\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_+)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda_+)t)\\
&=\frac{\mu}{2}|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\cos(|\xi|p(|\xi|^2)t)\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\mu}{2}|\xi|^2\cos(|\xi|t)\frac{\sin(|\xi|p(|\xi|^2)t)}{|\xi|p(|\xi|^2)t}\frac{1}{1+p(|\xi|^2)}p(|\xi|^2)t\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&+\cos(|\xi|t)\cos(|\xi|p(|\xi|^2)t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1\\
&-\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}|\xi|\frac{\sin(|\xi|p(|\xi|^2)t)}{|\xi|p(|\xi|^2)t}|\xi|p(|\xi|^2)t\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\chi_1.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

进一步可以计算 $\widehat{G}^1$ 的主项, 分别记为 $\hat{g}_{11}$、$\hat{g}_{12}$、$\hat{g}_{21}$ 和 $\hat{g}_{22}$,

$$
\hat{g}_{11}=-|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)+\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}, \tag{2.11}
$$

$$
\hat{g}_{12}=|\xi|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}-|\xi|\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t=-\hat{g}_{21}, \tag{2.12}
$$

$$
\hat{g}_{22}=|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\left(\frac{\mu}{2}+\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)+\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}. \tag{2.13}
$$

利用文献 [15,19,21] 中的证明方法, 可以得到主项的如下估计. 为了便于读者阅读, 我们给出主要的证明步骤.

引理 2.1 当 $|\xi|$ 很小、$N\geqslant 3$ 且 $t>1$ 时, 有如下估计:

$$
|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})|\leqslant C_Nt^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}, \tag{2.14}
$$

$$
\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}, \tag{2.15}
$$

$$
\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu}{2}\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}, \tag{2.16}
$$

$$
\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}, \tag{2.17}
$$

$$
\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(|\xi|\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}. \tag{2.18}
$$

证明 因为

$$
\mathscr{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})=\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^j\xi^j}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}(\xi^j)^2t}d\xi^j=(2\pi\mu t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2\mu t}},
$$

结合引理 A.2 和 A.4, 可得

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})|&=D_x^\alpha w_t*\mathscr{F}^{-1}(\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})\\
&=O(1)t^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1}D_x^\alpha\mathrm{e}^{-\frac{|x+ty|^2}{2\mu t}}dS_y+\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1}D_x^\alpha\nabla\mathrm{e}^{-\frac{|x+ty|^2}{2\mu t}}\cdot ydS_y\right)\\
&\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}}(t^{-\frac{2+|\alpha|}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(|x|-t)^2}{K_1t}}+t^{-\frac{1+|\alpha|}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(|x|-t)^2}{K_1t}})\\
&\leqslant Ct^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N},
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{w}_t=\cos(|\xi|t)$ 且 C 和 $K_1>\mu$ 是两个常数. 由此得到 (2.14).

因为

$$
\begin{aligned}
|D_\xi^\beta(\xi^\alpha|\xi|\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})| &= O(1)\bigg|\sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}(D_\xi^{\beta_1}\xi^\alpha)(D^{\beta_2}|\xi|)(D^{\beta_3}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})\bigg| \\
&= O(1)|\xi|^{|\alpha|+1-|\beta|}(1+|\xi|^2t)^{1+|\beta|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t},
\end{aligned}
$$

结合引理 A.1, 可得

$$
|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(|\xi|\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})| \leqslant C_N t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-2N}.
$$

再利用引理 A.2 和 A.3, 可得

$$
\bigg|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\bigg(|\xi|\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\bigg)\bigg| = D_x^\alpha w*\mathscr{F}^{-1}(|\xi|\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}) \leqslant Ct^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N},
$$

其中 $\hat{w}=\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$. 由此得到 (2.15). 类似地, 可证明 (2.16) 成立.

因为

$$
\begin{aligned}
\bigg|D_\xi^\beta\bigg(\xi^\alpha|\xi|^2\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\bigg)\bigg| &= O(1)\bigg|\sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}(D_\xi^{\beta_1}\xi^\alpha)(D^{\beta_2}|\xi|^2|\xi|^2t)(D^{\beta_3}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})\bigg| \\
&= O(1)|\xi|^{|\alpha|+2-|\beta|}(1+|\xi|^2t)^{2+|\beta|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t},
\end{aligned}
$$

结合引理 A.1, 有

$$
\bigg|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\bigg(|\xi|^2\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\bigg)\bigg| \leqslant C_N t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-2N}.
$$

再根据引理 A.2 和 A.3, 可得

$$
\begin{aligned}
\bigg|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\bigg(|\xi|^2\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\bigg)\bigg| &= D_x^\alpha w*\mathscr{F}^{-1}\bigg(|\xi|^2\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\bigg) \\
&\leqslant Ct^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N}.
\end{aligned}
$$

由此得到 (2.17). 类似地, 可证明 (2.18) 成立, 从而完成引理 2.1 的证明. □

于是, 由引理 2.1, 可得

$$
|D_x^\alpha g_{jk}(x,t)| \leqslant C_N t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N}, \quad j,k=1,2.
$$

用引理 2.1 中的证明方法可以估计 $\widehat{G}^1(\xi,t)$ 的余项, 得到余项会有更快的衰减, 这样完成了关于 $\widehat{G}^1(\xi,t)$ 的逐点估计,

$$
|D_x^\alpha G^1(x,t)| \leqslant C_N t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N}, \quad N\geqslant 3. \tag{2.19}
$$

对于 $G^2(x,t)$, 由文献 [15, 命题 3.3] 可得如下命题, 证明略.

命题 2.2 对于固定的 ε 和 R, 存在正常数 b 和 C_N, 使得

$$|D_x^\alpha G^2(x,t)| \leqslant C_N t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \mathrm{e}^{-bt}\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N}. \tag{2.20}$$

接下来还需要研究高频部分 $\widehat{G}^3(\xi,t)$, 其中 R 充分大. 首先 $\lambda_\pm$ 可以重新写为

$$\lambda_\pm = -\frac{\mu}{2}|\xi|^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2|\xi|^4-4|\xi|^2} = |\xi|^2\left(-\frac{\mu}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mu^2-4|\xi|^{-2}}\right).$$

由于 $|\xi|$ 很大, 故可以把 $|\xi|^{-2}$ 看成一个整体, 利用 Taylor 展开, 可得

$$\lambda_+ = -\frac{1}{\mu}+\sum_{j=1}^m a_j^+|\xi|^{-2j}+O(|\xi|^{-2(m+1)}), \tag{2.21}$$

$$\lambda_- = -\mu|\xi|^2+\frac{1}{\mu}+\sum_{j=1}^m a_j^-|\xi|^{-2j}+O(|\xi|^{-2(m+1)}), \tag{2.22}$$

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_+-\lambda_-} = -\frac{\mu}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2-\frac{4}{|\xi|^2}}}+\frac{1}{2} = \sum_{j=1}^m b_j^+|\xi|^{-2j}+O(|\xi|^{-2(m+1)}),$$

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+-\lambda_-} = -\frac{\mu}{2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2-\frac{4}{|\xi|^2}}}-\frac{1}{2} = -1+\sum_{j=1}^m b_j^-|\xi|^{-2j}+O(|\xi|^{-2(m+1)}),$$

$$\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-} = \frac{1}{|\xi|^2}\frac{1}{\sqrt{\mu^2-\frac{4}{|\xi|^2}}} = \sum_{j=1}^m b_j^0|\xi|^{-2j}+O(|\xi|^{-2(m+1)}).$$

然后, 将 $\widehat{G}^3$ 拆分为两部分: $\widehat{G}^3=\widehat{G}^3_+ + \widehat{G}^3_-$, 其中

$$\widehat{G}^3_+(\xi,t) = \begin{bmatrix} \chi_3\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3} & \chi_3|\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3} \\ -\chi_3|\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3} & -\chi_3\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{G}^3_-(\xi,t) = \begin{bmatrix} -\chi_3\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_- t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3} & -\chi_3|\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_- t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3} \\ \chi_3|\xi|(\frac{\mathrm{e}^{\lambda_- t}}{\lambda_+-\lambda_-})I_{3\times3} & \chi_3\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_- t}}{\lambda_+-\lambda_-}I_{3\times3} \end{bmatrix}.$$

由 (2.22) 知, 存在 $\theta>0$ 使得 $\mathrm{e}^{\lambda_-(\xi)t}\leqslant C\mathrm{e}^{-2\theta|\xi|^2t}$. 因此结合文献 [19, 引理 4.1] 可得如下命题, 证明从略.

命题 2.3 存在正的常数 b 和 C, 使得

$$|D_x^\alpha G^3_-(x,t)| \leqslant Ct^{-\frac{3+|\alpha|}{2}}\mathrm{e}^{-bt}\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N}. \tag{2.23}$$

当 $|\xi|$ 很大时, 结合 λ_+ 的表达式 (2.21) 和指数函数的 Taylor 展开, 可得

$$\mathrm{e}^{\lambda_+(\xi)t} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\mu}}\left(1+\left(\sum_{j=1}^m a_j^+|\xi|^{-2j}\right)t+\cdots+\frac{1}{m!}\left(\sum_{j=1}^m a_j^+|\xi|^{-2j}\right)^m t^m+p^1(t)O(|\xi|^{-2(m+1)})\right),$$

其中 $p^1(t)$ 是一个次数不超过 $m+1$ 的 t 的多项式. 因此有

$$\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t}}{\lambda_+-\lambda_-} = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\mu}}\left(\sum_{j=1}^m p_j^+(t)|\xi|^{-2j}+p_{m+1}^+(t)O(|\xi|^{-2(m+1)})\right),$$

$$\frac{\lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-\frac{t}{\mu}} \bigg(-1 + \sum_{j=1}^{m} p_j^-(t)|\xi|^{-2j} + p_{m+1}^-(t)O(|\xi|^{-2(m+1)}) \bigg),$$
$$\frac{e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} = e^{-\frac{t}{\mu}} \bigg(\sum_{j=1}^{m} p_j^0(t)|\xi|^{-2j} + p_{m+1}^0(t)O(|\xi|^{-2(m+1)}) \bigg),$$

其中 $p_j^+(t)$、$p_j^-(t)$ 和 $p_j^0(t)$ 是次数不超过 j 的 t 的多项式. 结合以上公式, 可将 $\widehat{G}_+^3$ 进一步整理如下:

$$\widehat{G}_+^3(\xi,t) = e^{-\frac{t}{\mu}} \begin{bmatrix} (\sum_{j=1}^m p_j^+(t)|\xi|^{-2j})I_{3\times3} & (|\xi|\sum_{j=1}^m p_j^+(t)|\xi|^{-2j})I_{3\times3} \\ -(|\xi|\sum_{j=1}^m p_j^+(t)|\xi|^{-2j})I_{3\times3} & -(-1+\sum_{j=1}^m p_j^-(t)|\xi|^{-2j})I_{3\times3} \end{bmatrix}$$
$$+ e^{-\frac{t}{\mu}} \tilde{p}_{m+1}(t)O(|\xi|^{-2(m+1)}).$$

这个系统的 $\widehat{G}_+^3(\xi,t)$ 与可压缩的 Navier-Stokes 方程中对应的 $\widehat{G}_+^3(\xi,t)$ 很相似. 因此, 利用文献 [19, 命题 4.4] 和 [15, 定理 3.1], 可得如下命题, 证明略.

命题 2.4 存在常数 C 和 $b>0$ 使得

$$|D_x^\alpha(G_+^3(x,t) - \chi_3(D)F_{|\alpha|})| \leqslant Ce^{-2bt}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-N},$$

这里的 $\chi_3(D)F_{|\alpha|}$ 满足

$$\chi_3(D)F_{|\alpha|}(x,t) = e^{-\frac{t}{\mu}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{3\times3} \end{bmatrix} \delta(x) + f(x),$$
$$|f(x)| \leqslant e^{-bt}S(x), \quad S(x)\in L^1, \quad S(x) = \begin{cases} C|x|^{-2}, & |x|\leqslant R+1, \\ C_N|x|^{-N}, & |x|>R+1. \end{cases}$$

综上所述, 可得如下定理.

定理 2.5 当 $t>0$ 时, 有

$$|D_x^\alpha(G(x,t) - \chi_3(D)F_{|\alpha|}(x,t))| \leqslant C_\alpha t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}} \bigg(\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N} + \bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-N} \bigg). \tag{2.24}$$

3 非线性系统的逐点估计

定理 1.1 的证明 首先, 由文献 [2, 定理 3.1] 可得系统 (1.1) 的小初值解的整体存在性和唯一性, 具体如下.

定理 3.1 假设 $v_0 \in H^6(\mathbb{R}^3)$, $F_0 - I \in H^6(\mathbb{R}^3)$ 满足限制条件 (1.3) 和 (1.4), 且

$$\|v_0\|_{H^6(\mathbb{R}^3)} + \|F_0 - I\|_{H^6(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon_0,$$

则当 ε_0 充分小时, 系统 (1.1) 有唯一的整体经典解 (F,v), 满足 (1.5) 和 (1.6), 且 $(F-I,v) \in L^\infty([0,\infty); H^6(\mathbb{R}^3))$, $\nabla v \in L^2([0,\infty); H^6(\mathbb{R}^3))$,

$$\|(F-I,v)\|_{L^\infty([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))} + \|\nabla v\|_{L^2([0,\infty);H^6(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\varepsilon_0.$$

由 Sobolev 嵌入定理, 可得

$$\|\nabla^\alpha(F-I,v)\|_{L^\infty([0,\infty);L^\infty(\mathbb{R}^3))}\leqslant C\varepsilon_0,\quad \forall\,|\alpha|\leqslant 4. \tag{3.1}$$

结合前面对 $G(x,t)$ 的逐点分析, 考虑 (2.6) 和 (2.7) 中分别对应的线性解部分 $\bar{v}(x,t)$ 和 $\bar{E}(x,t)$, 有

$$\bar{v}^k(x,t)=\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)*_x v_0^k+\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)*_x E_0^{kj}=:R_1+R_2 \tag{3.2}$$

和

$$\bar{E}^{kj}=\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)*_x v_0^k+\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(-\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)*_x E_0^{kj}. \tag{3.3}$$

由于初值满足 (1.9), 根据引理 A.5, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\bigg|D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)-\chi_3(D)F_{|\alpha|}^{11}\bigg)*_x v_0^k\bigg|\\
&\leqslant C_\alpha\varepsilon_0 t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\int_{\mathbb{R}^3}\bigg(\bigg(1+\frac{(|x-y|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N}+\bigg(1+\frac{|x-y|^2}{1+t}\bigg)^{-N}\bigg)(1+|y|^2)^{-\frac{5}{2}}dy\\
&\leqslant C_\alpha\varepsilon_0 t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}+\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}\bigg),\quad |\alpha|\leqslant 1.
\end{aligned}$$

此外, 由文献 [15, 命题 4.1] 的类似证明, 可得

$$|D_x^\alpha\chi_3(D)F_{|\alpha|}^{11}*_x v_0^k|\leqslant C\varepsilon_0(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}},\quad |\alpha|\leqslant 1.$$

因此可得

$$|R_1|\leqslant C_\alpha\varepsilon_0 t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}+\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}\bigg),\quad |\alpha|\leqslant 1.$$

类似地, 对于 R_2 和 $D_x^\alpha\bar{E}^{kj}$, 可得如下估计:

$$|D_x^\alpha\bar{v}^k|+|D_x^\alpha\bar{E}^{kj}|\leqslant C_\alpha\varepsilon_0 t^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\bigg(\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}+\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}\bigg),\quad |\alpha|\leqslant 1. \tag{3.4}$$

接下来估计 (2.6) 和 (2.7) 中对应的非线性部分. 令

$$\psi(x,t)=(1+t)^{-2}\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}+(1+t)^{-2}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}, \tag{3.5}$$

$$M(T)=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\bigg\{\sum_{|\alpha|=0}^{1}\|D_x^\alpha(v,E)(x,t)(1+t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\psi^{-1}\|_{L^\infty}\bigg\}. \tag{3.6}$$

利用插值定理、(3.1) 和 (3.6), 可得

$$\|\nabla^2(v,E)\|_{L_x^\infty}\leqslant C(1+t)^{-1}\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}},\quad \|\nabla^3(v,E)\|_{L_x^\infty}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_0^{\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{4}}. \tag{3.7}$$

记 (2.6) 和 (2.7) 中对应的非线性部分分别为 $D_x^\alpha\tilde{v}(x,t)$ 和 $D_x^\alpha\tilde{E}(x,t)$, 即

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha\tilde{v}^k=&-\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^k-E^{lr}E^{kr})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\
&-\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\frac{\xi^r\xi^j}{|\xi|^2}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds\\
=:&\,R_4+R_5+R_6+R_7
\end{aligned}\tag{3.8}$$

和

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha\tilde{E}^{kj}=&\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(-\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^k-E^{lr}E^{kr})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(-\mathrm{i}\xi^r\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x\nabla_l(E^{lj}E^{kr}-E^{lr}E^{kj})(\cdot,s)ds\\
&+\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(-\frac{\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds\\
=:&\,R_8+R_9+R_{10}+R_{11}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

先考虑

$$R_4=-\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^l\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^k-E^{lr}E^{kr})(\cdot,s)ds.$$

结合 G 的估计过程, 可得

$$\begin{aligned}
&\bigg|D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^l\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)-\chi_3(D)F_1\bigg)\bigg|\\
&\quad\leqslant C_\alpha t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\bigg(\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-N}+\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-N}\bigg),\quad |\alpha|\leqslant 1,
\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中

$$|\chi_3(D)F_1(x,t)|\leqslant\mathrm{e}^{-bt}S(x),\quad S(x)\in L^1,\quad S(x)=\begin{cases}C|x|^{-2}, & |x|\leqslant R+1,\\ C_N|x|^{-N}, & |x|>R+1.\end{cases}$$

根据 (3.6), 可计算得

$$|v|^2+|E|^2\leqslant CM^2(1+t)^{-4}\bigg(\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-3}+\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-3}\bigg).\tag{3.11}$$

利用文献 [15, 命题 4.2] 的类似证明, 可得如下命题, 证明略.

命题 3.2 如果 $t>1$, 且

$$|D_x^\alpha H(x,t)| \leqslant C(1+t)^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}+\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N}\right),$$
$$|D_x^\alpha K(x,t)| \leqslant C(1+t)^{-\frac{8+|\alpha|}{2}}\left(\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-3}+\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-3}\right),$$

则当 N 充分大时, 有

$$\left|D_x^\alpha\left(\int_0^t H(t-s)*K(s)ds\right)\right| \leqslant C(1+t)^{-\frac{4+|\alpha|}{2}}\left(\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}+\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

因此结合 (3.10) 和 (3.11) 的估计及命题 3.2, 有

$$\left|\int_0^t\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\xi^l\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)-\chi_3(D)F_1\right)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^k-E^{lr}E^{kr})(\cdot,s)ds\right| \leqslant CM^2\psi(x,t).$$

此外, 利用文献 [19, 命题 7.6] 的证明方法, 可得如下命题, 证明略.

命题 3.3 如果 $|\alpha|\leqslant 1$, 且 v 和 E 满足 (3.6), 则存在常数 C 使得

$$\left|\int_0^t(\chi_3(D)F_1)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^k-E^{lr}E^{kr})(\cdot,s)ds\right| \leqslant CM^2\psi(x,t).$$

所以, 可得 $|R_4|$ 的估计

$$|R_4| \leqslant CM^2\psi(x,t), \quad |\alpha|=0. \tag{3.12}$$

利用 (3.6), 可得

$$|\nabla v||v|+|\nabla E||E| \leqslant CM^2(1+t)^{-\frac{7}{2}}\left(\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-3}+\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-3}\right).$$

类似地, 利用文献 [15, 命题 4.2] (或文献 [19, 引理 7.1 和 7.2]) 的证明方法, 类似于 (3.12) 的证明, 可得

$$|R_4| \leqslant CM^2(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1. \tag{3.13}$$

接下来考虑

$$\begin{aligned}R_5 &= \int_0^t D_x^\alpha\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\mathrm{i}\xi^l\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\right)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds\\ &=: \int_0^t D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\widehat{R}_5^1)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})ds.\end{aligned}$$

当 $|\xi|$ 很小时, 可以得出 $\widehat{R}_5^1$ 对应的主项为

$$\hat{g}_5^1=-\mathrm{i}\xi^l\xi^m\xi^k\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)+\mathrm{i}\xi^l\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}.$$

通过引理 2.1 中的方法, 可直接估计 $D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\hat{g}_5^1)$ 中的第一项

$$\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(-\mathrm{i}\xi^l\xi^m\xi^k\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\left(\frac{\mu}{2}-\frac{\mu^2}{8}|\xi|^2t\right)\right)\right| \leqslant C_Nt^{-\frac{6+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}. \tag{3.14}$$

接下来, 在下面引理中, 估计 $D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\hat{g}_5^1)$ 中的第二项.

引理 3.4 当 $|\xi|$ 很小、$N\geqslant 3$ 且 $t>1$ 时, 有

$$\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(\xi^l\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\cos(|\xi|t)\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}.$$

证明 因为

$$|D_\xi^\gamma\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}|=O(1)\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma,\,|\gamma_1|\geqslant|\gamma_2|\geqslant 0}|\xi|^{|\gamma_1|-|\gamma_2|}t^{|\gamma_1|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t},$$

所以,

$$||\xi|^{|\gamma|}D_\xi^\gamma\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}|=O(1)\sum_{|\gamma_1|\leqslant|\gamma|}|\xi|^{2|\gamma_1|}t^{|\gamma_1|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}=O(1)(1+|\xi|^2t)^{1+|\gamma|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}.$$

那么,

$$\begin{aligned}\left|D_\xi^\beta\left(\xi^\alpha\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\right)\right|&=O(1)\left|\sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}(D_\xi^{\beta_1}\xi^\alpha)\left(D^{\beta_2}\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\right)(D^{\beta_3}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t})\right|\\&=O(1)|\xi|^{|\alpha|-|\beta|}(1+|\xi|^2t)^{1+|\beta|}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}.\end{aligned}$$

由引理 A.1, 有

$$\left|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{3+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-2N}.$$

再结合引理 A.2 和 A.3, 有

$$\left|D_x^\alpha w_t*D_{x_l}\mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2t}\right)\right|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N},$$

其中 $\hat{w}_t=\cos(|\xi|t)$, 于是引理 3.4 得证. □

利用 (3.14) 和引理 3.4 可推知,

$$|D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\hat{g}_5^1)|\leqslant C_Nt^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}.$$

对于 $D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\chi_1\widehat{R}_5^1)$ 的余项、$D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\chi_2\widehat{R}_5^1)$ 和 $D_x^\alpha\mathscr{F}^{-1}(\chi_3\widehat{R}_5^1)$, 可以如估计 G 中的对应部分一样进行估计, 得到

$$\begin{aligned}&\left|D_x^\alpha\left(\mathscr{F}^{-1}\left(\xi^l\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\frac{\lambda_+\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\lambda_-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)-\chi_3(D)F_2\right)\right|\\&\quad\leqslant C_\alpha t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}}\left(\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}+\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N}\right),\quad |\alpha|\leqslant 1,\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中

$$|\chi_3(D)F_2(x,t)|\leqslant\mathrm{e}^{-bt}S(x),\quad S(x)\in L^1,\quad S(x)=\begin{cases}C|x|^{-2}, & |x|\leqslant R+1,\\ C_N|x|^{-N}, & |x|>R+1.\end{cases}$$

结合 (3.11)、(3.15)、命题 3.2 和 3.3, 利用 (3.13) 的类似证明, 可得

$$|R_5| \leqslant CM^2(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1. \tag{3.16}$$

易知, R_6 与 R_5 的估计相同. 利用 R_4 的类似估计方法, 可以得到 R_7 的低频和中频部分的估计,

$$\begin{aligned}
&\bigg|\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}(\chi_1+\chi_2)\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds\bigg|\\
&\quad=\bigg|\int_0^t D_x^\alpha\nabla_r\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}(\chi_1+\chi_2)\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(v^kE^{rj})\\
&\qquad-D_x^\alpha\nabla_l\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}(\chi_1+\chi_2)\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(v^lE^{kj})(\cdot,s)ds\bigg|\\
&\quad\leqslant CM^2(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

对于 R_7 的高频部分, 由定理 2.5, 可得

$$\bigg|\chi_3(D)D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)-F_3\bigg)\bigg|\leqslant C_\alpha\mathrm{e}^{-bt}\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-N}, \quad b>0, \quad |\alpha|\leqslant 1, \tag{3.18}$$

其中

$$|\chi_3(D)F_3(x,t)|\leqslant \mathrm{e}^{-bt}S(x), \quad S(x)\in L^1, \quad S(x)=\begin{cases}C|x|^{-2}, & |x|\leqslant R+1,\\ C_N|x|^{-N}, & |x|>R+1.\end{cases}$$

由 (3.6), 可计算得

$$\begin{aligned}
|\nabla(vE)|&\leqslant CM^2(1+t)^{-\frac{7}{2}}\bigg(\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-3}+\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-3}\bigg),\\
|\nabla^2(vE)|&\leqslant C(M^2+\varepsilon_0^2)(1+t)^{-3}\bigg(\bigg(1+\frac{|x|^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}+\bigg(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\bigg)^{-\frac{3}{2}}\bigg).
\end{aligned}$$

结合 (3.18), 利用文献 [19, 引理 7.1、7.2 和命题 7.6] 的证明方法, 可得

$$\begin{aligned}
&\bigg|\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\mathrm{i}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\chi_3\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(\nabla_r(v^kE^{rj})-\nabla_l(v^lE^{kj}))(\cdot,s)ds\bigg|\\
&\quad\leqslant C(M^2+\varepsilon_0^2)(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

那么, 再结合 (3.8)、(3.13)、(3.16) 和 (3.17), 可得

$$|D_x^\alpha\tilde{v}^k|\leqslant C(M^2+\varepsilon_0^2)(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1. \tag{3.20}$$

利用 R_7 的类似证明, 可知 (3.9) 中 $D_x^\alpha\tilde{E}^{kj}$ 的三项 R_8、R_{10} 和 R_{11} 有相同的估计结果,

$$|R_8|+|R_{10}|+|R_{11}|\leqslant C(M^2+\varepsilon_0^2)(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\psi(x,t), \quad |\alpha|=0,1. \tag{3.21}$$

我们把 R_9 写为

$$R_9=-\int_0^t D_x^\alpha\bigg(\mathscr{F}^{-1}\bigg(\xi^l\frac{\xi^m\xi^k}{|\xi|^2}\xi^j\frac{\mathrm{e}^{\lambda_+t}-\mathrm{e}^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\bigg)\bigg)(\cdot,t-s)*_x(v^lv^m-E^{lr}E^{mr})(\cdot,s)ds$$

$$=: \int_0^t D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}(\widehat{R}_9^1)(\cdot, t-s) *_x (v^l v^m - E^{lr}E^{mr})ds.$$

当 $|\xi|$ 很小时, 可得 $\widehat{R}_9^1$ 对应的主项

$$\hat{g}_9^1 = \xi^l \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \xi^j \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} - \xi^l \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \xi^j \cos(|\xi|t) \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \frac{\mu^2}{8} |\xi|^2 t.$$

首先, 估计主项 $\hat{g}_9^1$ 中的第一项.

引理 3.5　当 $|\xi|$ 很小、$N \geqslant 3$ 且 $t > 1$ 时, 有

$$\left| D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}\left(\xi^l \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \xi^j \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \right) \right| \leqslant C_N t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}} \left(1 + \frac{(|x|-t)^2}{1+t} \right)^{-N}.$$

证明　因为

$$|D^\gamma \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t}| = O(1) \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma,\, |\gamma_1|>|\gamma_2|} |\xi|^{|\gamma_1|-|\gamma_2|} t^{\gamma_1} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t},$$

所以,

$$||\xi|^{|\gamma|} D^\gamma \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t}| = O(1) \sum_{|\gamma_1| \leqslant |\gamma|} |\xi|^{2|\gamma_1|} t^{|\gamma_1|} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} = O(1)(1+|\xi|^2 t)^{1+|\gamma|} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t},$$

那么,

$$\begin{aligned} \left| D^\beta \left(\xi^\alpha \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \right) \right| &= O(1) \left| \sum_{\beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta} (D^{\beta_1} \xi^\alpha) \left(D^{\beta_2} \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \right) (D^{\beta_3} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t}) \right| \\ &= O(1) |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} (1+|\xi|^2 t)^{1+|\beta|} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t}. \end{aligned}$$

由引理 A.1, 有

$$\left| D^\alpha \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \right) \right| \leqslant C_N t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t} \right)^{-2N}.$$

再结合引理 A.2 和 A.3, 有

$$\left| D^\alpha w * D_{x_l} D_{x_j} \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \right) \right| \leqslant C_N t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}} \left(1 + \frac{(|x|-t)^2}{1+t} \right)^{-N},$$

其中 $\hat{w} = \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$, 于是引理 3.5 得证. □

利用引理 3.4, 可得 $\hat{g}_9^1$ 中第二项的如下估计:

$$\left| D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}\left(-\xi^l \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \xi^j \cos(|\xi|t) \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{2}|\xi|^2 t} \frac{\mu^2}{8} |\xi|^2 t \right) \right| \leqslant C_N t^{-\frac{6+|\alpha|}{2}} \left(1 + \frac{(|x|-t)^2}{1+t} \right)^{-N}. \tag{3.22}$$

由引理 3.5 和 (3.22) 可推知,

$$|D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}(\hat{g}_9^1)| \leqslant C_N t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}} \left(1 + \frac{(|x|-t)^2}{1+t} \right)^{-N}.$$

对于 $D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}(\chi_1 \widehat{R}_9^1)$ 和 $D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}(\chi_2 \widehat{R}_9^1)$, 利用 G 中对应部分的类似估计, 可得

$$\left|D_x^\alpha \mathscr{F}^{-1}\left(\xi^l \frac{\xi^m \xi^k}{|\xi|^2} \xi^j \frac{\mathrm{e}^{\lambda_+ t} - \mathrm{e}^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}(\chi_1 + \chi_2)\right)\right| \leqslant C_\alpha t^{-\frac{5+|\alpha|}{2}} \left(\left(1 + \frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N} + \left(1 + \frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N}\right).$$

结合 (3.11) 和命题 3.2, 可以估计 R_9 的低频和中频部分, 再利用 (3.19) 的类似讨论, 可以得到 R_9 的高频估计, 从而有

$$|R_9| \leqslant C(M^2 + \varepsilon_0^2)(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}} \psi(x,t), \quad |\alpha| = 0, 1. \tag{3.23}$$

那么, 结合 (3.9)、(3.21) 和 (3.23), 可得

$$|D_x^\alpha \tilde{E}^{kj}| \leqslant C(M^2 + \varepsilon_0^2)(1+t)^{\frac{|\alpha|}{2}} \psi(x,t), \quad |\alpha| = 0, 1. \tag{3.24}$$

由 (3.4)、(3.20) 和 (3.24), 可得当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} &|D_x^\alpha (v, E)(x,t)| \leqslant C(\varepsilon_0 + M^2(t))\psi, \\ &M(t) \leqslant C(\varepsilon_0 + M^2(t)). \end{aligned} \tag{3.25}$$

取 ε_0 足够小, 由 $M(T)$ 的连续性可推知, $M(t) \leqslant C\varepsilon_0$. 于是, 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时, (1.10) 成立. 由此, 本文的定理 1.1 得证. □

致谢 感谢审稿专家给予的宝贵的修改意见.

参考文献

1 Lei Z, Liu C, Zhou Y. Global solutions for incompressible viscoelastic fluids. Arch Ration Mech Anal, 2008, 188: 371–398
2 Chen Y M, Zhang P. The global existence of small solutions to the incompressible viscoelastic fluid system in 2 and 3 space dimensions. Comm Partial Differential Equations, 2006, 31: 1793–1810
3 Lin F H, Liu C, Zhang P. On hydrodynamics of viscoelastic fluids. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 1437–1471
4 Lin F H, Zhang P. On the initial-boundary value problem of the incompressible viscoelastic fluid system. Comm Pure Appl Math, 2008, 61: 539–558
5 Sideris T C, Thomases B. Global existence for three-dimensional incompressible isotropic elastodynamics via the incompressible limit. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 750–788
6 Qian J Z. Well-posedness in critical spaces for incompressible viscoelastic fluid system. Nonlinear Anal, 2010, 72: 3222–3234
7 Danchin R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. Invent Math, 2000, 141: 579–614
8 Zhang T, Fang D Y. Global existence of strong solution for equations related to the incompressible viscoelastic fluids in the critical L^p framework. SIAM J Math Anal, 2012, 44: 2266–2288
9 Fang D Y, Zhang T, Zi R Z. Dispersive effects of the incompressible viscoelastic fluids. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 38: 5261–5295
10 Lei Z. On 2D viscoelasticity with small strain. Arch Ration Mech Anal, 2010, 198: 13–37
11 Lei Z, Liu C, Zhou Y. Global existence for a 2D incompressible viscoelastic model with small strain. Commun Math Sci, 2007, 5: 595–616
12 Lei Z, Zhou Y. Global existence of classical solutions for the two-dimensional Oldroyd model via the incompressible limit. SIAM J Math Anal, 2005, 37: 797–814
13 Hu X P, Lin F H. On the Cauchy problem for two dimensional incompressible viscoelastic flows. arXiv:1601.03497, 2016
14 Shibata Y. On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation. Math Methods Appl Sci, 2000, 23: 203–226
15 Liu T P, Wang W K. The pointwise estimates of diffusion wave for the Navier-Stokes systems in odd multi-dimensions. Comm Math Phys, 1998, 196: 145–173

16 Hoff D, Zumbrun K. Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow. Indiana Univ Math J, 1995, 44: 603–676
17 Hoff D, Zumbrun K. Pointwise decay estimates for multidimensional Navier-Stokes diffusion waves. Z Angew Math Phys, 1997, 48: 597–614
18 Liu T P, Zeng Y N. Large time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws. Mem Amer Math Soc, 1997, 125: 120pp
19 Liu T P, Noh S E. Wave propagation for the compressible Navier-Stokes equations. J Hyperbolic Differ Equ, 2015, 12: 385–445
20 Deng S J, Yu S H. Green's function and pointwise convergence for compressible Navier-Stokes equations. Quart Appl Math, 2017, 75: 433–503
21 Du L L, Wu Z G. Solving the non-isentropic Navier-Stokes equations in odd space dimensions: The Green function method. J Math Phys, 2017, 58: 101506
22 Wang W K, Yang T. The pointwise estimates of solutions for Euler equations with damping in multi-dimensions. J Differential Equations, 2001, 173: 410–450
23 Wu Z G, Li Y P. Pointwise estimates of solutions for the multi-dimensional bipolar Euler-Poisson system. Z Angew Math Phys, 2016, 67: 50
24 Wang W K, Wu Z G. Pointwise estimates of solution for the Navier-Stokes-Poisson equations in multi-dimensions. J Differential Equations, 2010, 248: 1617–1636
25 Wu Z G, Wang W K. Pointwise estimates of solution for non-isentropic Navier-Stokes-Poisson equations in multi-dimensions. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2012, 32: 1681–1702
26 Wu Z G, Wang W K. Refined pointwise estimates for the Navier-Stokes-Poisson equations. Anal Appl (Singap), 2016, 14: 739–762
27 Wu Z G, Wang W K. Pointwise estimates for bipolar compressible Navier-Stokes-Poisson system in dimension three. Arch Ration Mech Anal, 2017, 226: 587–638
28 Zhang T. Global strong solutions for equations related to the incompressible viscoelastic fluids with a class of large initial data. Nonlinear Anal, 2014, 100: 59–77
29 Wu Z G, Wang W K. The pointwise estimates of diffusion wave of the compressible micropolar fluids. J Differential Equations, 2018, 265: 2544–2576

附录 A

文献 [15,18,19,27,29] 中有如下几个引理, 在本文的证明中起了非常重要的作用.

引理 A.1 (参见文献 [15, 引理 2.2]) 如果 $\hat{f}(\xi,t)$ 有关于变量 ξ 的紧支集, 且存在常数 $b>0$, 使得 $\hat{f}(\xi,t)$ 满足

$$|D_\xi^\beta(\xi^\alpha\hat{f}(\xi,t))|\leqslant C|\xi|^{|\alpha|+k-|\beta|}(1+t|\xi|^2)^m\mathrm{e}^{-b|\xi|^2t},$$

其中 k 和 m 是任意给定的整数, α 和 β 是多重指标, 且 $|\beta|\leqslant 2N$, 则

$$|D_x^\alpha f|\leqslant C_Nt^{-\frac{3+|\alpha|+k}{2}}\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-N},$$

其中 N 是任意给定的整数.

引理 A.2 (参见文献 [29, 引理 4.1]) 设 $w(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的 Fourier 变换为

$$\hat{w}=\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|},\quad \hat{w}_t=\cos(|\xi|t),$$

则对任意的函数 $g(x)$, 有

$$w*g(x)=\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1}g(x+ty)dS_y,$$

$$w_t * g(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS_y + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} \nabla g(x+ty)\cdot y dS_y.$$

引理 A.3 (参见文献 [15, 引理 2.3]) 当 $N \geqslant 3$ 和 $t>1$ 时, 有如下不等式:

$$\left|\int_{|y|=1}\left(1+\frac{|x+ty|^2}{1+t}\right)^{-2N} dS_y\right| \leqslant C_N t^{-1}\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-N}.$$

引理 A.4 (参见文献 [19, 引理 2.3]) 当 $t>1$ 时, 存在常数 C 使得

$$\int_{|y|=1} \mathrm{e}^{-\frac{|x+ty|^2}{\mu t}} dS_y \leqslant Ct^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{|x-t|^2}{3\mu t}}.$$

引理 A.5 (参见文献 [18, 引理 4.6] 和 [27, 引理 4.1]) 当 $t>1$ 时, 存在常数 C 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+\frac{(|x-y|-t)^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{5}{2}}dy \leqslant C\left(1+\frac{(|x|-t)^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}, \tag{A.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left(1+\frac{(|x-y|)^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}(1+|y|^2)^{-\frac{5}{2}}dy \leqslant C\left(1+\frac{|x|^2}{1+t}\right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{A.2}$$

The pointwise estimates of solutions for the 3D incompressible viscoelastic fluids

Yige Bai & Ting Zhang

Abstract In this paper, we consider the Cauchy problem of the incompressible viscoelastic hydrodynamic model in dimension three. Firstly, we introduce the appropriate variable transformation, and study the Green's function of the linearized system for the transformed equations. Then, according to the pointwise estimation method of Green's function, combining the expressions of the solutions, we analyze the influence of Riesz operator and obtain the pointwise time-space estimates of the solutions.

Keywords **incompressible viscoelastic fluid system, Green's function, pointwise estimate**

MSC(2020) **76A10, 35Q35, 35B40**

doi: 10.1360/SSM-2020-0240