

基于等效滑移与潜在硬化机制的多晶金属亚宏观弹塑性模型

梁乃刚 刘洪秋 王自强

(LNM, 中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 将多晶材料中晶片之间与晶粒界面上的滑移作为消耗塑性功的主要物理机制, 提出一个由亚宏观滑移系作为耗能构元的材料模型, 并用功共轭方法得到了亚宏观滑移系的等效滑移剪切率. 重新给出了滑移系自身运动硬化、潜在硬化及 Bauschinger 效应的力学描述, 导出了本构方程. 在探讨材料性质参数对后继屈服面形状及尺寸变化影响的基础上, 论述了模型的基本性质. 与以晶粒为基本构元的多晶体自洽理论比较, 所得到的本构方程具有简洁的数学表达, 而且能精确有效地预测多晶金属材料在复杂加载条件下的宏观弹塑性力学行为.

关键词 滑移 潜在硬化 Bauschinger 效应 本构关系 复杂加载的弹塑性响应

近年来, 随着显微观察、材料试验技术的发展与电子计算机容量、运算速度的提高, 塑性理论发展的一个明显趋势是从材料细观变形机制出发研究其弹塑性本构关系. 单晶体塑性理论的开创性研究可以追溯到 Taylor 与 Elam 年代, Hill 与 Rice 完成了近代的数学与力学描述. Asaro 曾对这一领域的重要成果作过综述^[1], Hutchinson 还对几种以晶粒为基本构元的多晶体自洽理论作了数值计算比较^[2], 其中的 Lin 模型、K-B-W 模型与 Hill 模型都得到了日益广泛的重视与应用. 利用自洽模型可以由单晶力学性质直接导出材料的宏观弹塑性本构关系, 不再需要预先设定塑性势或热力学内变量的演化方程. 自洽模型的建立是塑性理论发展的一个里程碑.

随着研究的深入, 人们发现现有细观塑性理论模型仍难尽人意. 首先, 对晶粒力学性质进行精密测量困难重重, 单晶硬化律仍然是唯象的; 一个宏观研究对象包含为数众多的微小晶粒, 晶界与缺陷的存在又使得细观应力应变分布异常复杂, 从细观量到宏观量的统计平均问题仍有许多令人困惑之处. 其次, 用扫描电子显微镜与透射电子显微镜的观察结果表明, 多晶金属的真实细观结构比现有细观模型复杂得多; 滑移变形不仅发生在晶粒内部, 也发生在晶粒之间; 在超塑性变形中, 晶粒之间的滑移变形甚至起主导作用; 在晶粒内部, 具有相同晶体学位向的滑移系并不均匀开动, 滑移集中在相互间隔一定距离的滑移面上, 应当说是晶片间的滑动; 晶粒的

1994-01-12 收稿, 1995-01-06 收修稿

* 国家自然科学基金资助项目

破碎与再结晶,亚晶界、晶界及其它缺陷的形成与演化,相变与损伤等都不断改变着细观结构;现有的材料细观模型并非真正的物理模型。此外,数值计算效率也有待进一步提高。

另一方面,多晶结构金属构件的尺寸比晶粒大得多,其宏观力学行为只是细观结构响应的平均效应,许多颇为复杂的细观现象对宏观性质的影响并不甚显著。Tokuda^[3]等发现,面心立方与体心立方单晶体构成的多晶金属的宏观力学行为有很多共性,甚至具有类似的应力应变曲线。他们用平面三滑移系晶体模型成功地模拟了多种金属材料在复杂变形过程中的宏观响应。类似的简化可以追溯到40年代末,Batdorf与Budiansky^[4]提出简单滑移模型时假设每个晶粒只有一个滑移系。Sanders^[5]发现这种模型能归并到经典塑性理论框架中,从而提出了逐段线性加载面模型。Martin^[6]甚至假定多晶金属中的滑移能沿材料单元内所有剖面上发生。Wang^[7]也提出了一种八滑移系材料模型,数值计算相当简洁有效。实际上,尽管位错运动形成了晶体塑性变形,但晶塑性理论以位错的平均效应——滑移,而不是位错本身,作为基本运动学变量反而抓住了问题的关键而避开了数学处理上许多不必要的麻烦。看起来,选择合理尺度上的物理量作为基本变量对材料模型的合理有效至关重要。对于包函成千上万个晶粒的宏观材料单元,以预测宏观应力应变为目的,值得尝试使用尺度比晶粒更大的基本构元建立多晶金属材料的弹塑性模型。

实验表明,多晶金属变形时,尽管细观滑移极不规则、剪应力最大的宏观剖面并不是晶体学易滑移平面,但最早出现的滑移线总是剪应力最大的剖面与试件表面的交线,同一种材料的临界分解剪应力又相当一致。这意味在宏观平均意义上多晶材料内的任意剖面都可能作为滑移面,沿滑移面的滑动是大量微小组分群体行为的平均。如果能够找到这种滑移面上的等效滑移率与硬化率,就可将其作为基本构元构成材料模型。Liang与Cheng^[8]曾提出这样的材料模型,并成功地预测了一些材料在复杂变形过程中的弹塑性行为。但其中的滑移系不能独立开动,主要针对晶界约束较强的多晶材料。

为此,本文将从论证Martin^[6]多滑移面假设的细观物理基础入手,用功共轭方法找到沿晶粒内晶片间与晶界上各种取向微小滑移面滑动的等效滑移率,建立亚宏观材料模型;给出滑移系自身运动硬化、潜在硬化与Bauschinger效应的数学表述,通过模型结构的应力应变响应导出本构方程,进而讨论材料性质参数对材料力学行为的影响,给出用该材料模型预测的一些后继屈服面,以便检验文中采用的假定是否合理;最后论述该模型的基本性质。限于篇幅,本文暂不涉及有限变形效应与具有滑移软化特性的材料。

1 亚宏观本构模型的建立

众所周知,多晶材料的塑性变形主要是由内部组织的相对滑移形成的,本文假定滑移是唯一塑性变形机制。与单晶类似,多晶晶粒内的滑移并不均匀,滑动发生在微小的晶片之间而晶片只产生弹性变形。晶粒间也发生滑动,当变形率与温度合适时甚至会成为塑性变形的主要形式。由于晶体学取向与环境约束条件的差异,各个微小滑移面的滑动发生某个确定的方向上。这种取向各异、随机分布的晶体学或非晶体学微小滑移面上的滑移是消耗塑性功的实体。

考查体积为 ΔV 的一个材料单元。依照应力均匀假定,设各微小滑移面上的剪应力等于相应的宏观分解剪应力,记滑移面法线方向落在 n 的 $d\Omega$ 立体角邻域内而滑移方向落在 m 的

$d\Psi$ 平面角邻域内的微小滑移面面积与相对滑动速率分别为 Δs_i 与 v_i ($i=1,2,\dots$), 则滑移面上的剪应力

$$\tau = m \otimes n: T = P: T, \quad (1)$$

式中 T 为应力张量, 而

$$P = \frac{1}{2} (m \otimes n + n \otimes m). \quad (2)$$

在 Martin^[6] 的多滑移面理论中也使用了 (1) 式, 这是采用应力均匀假定的必然结果. 这些滑移面滑动所消耗的功率

$$\Delta \dot{\omega} = \sum v_i \tau \Delta s_i = \sum (v_i \Delta s_i) P: T. \quad (3)$$

因而, 单位体积材料内各种取向微小滑移面上消耗的总功率为

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\Delta V} \left[\int_{\Omega} \int_{\Psi} \sum (\tilde{v}_i \Delta \tilde{s}_i) \tilde{P} d\Omega d\Psi \right] : T = \left[\int_{\Omega} \int_{\Psi} \tilde{\gamma} \tilde{P} d\Omega d\Psi \right] : T, \quad (4)$$

式中积分号内一些变量冠以“ $\sim$ ”号, 如 $\tilde{\gamma}$, $\tilde{P}$ 等, 表示它们是积分变量的函数, 不冠以“ $\sim$ ”号的变量不是积分变量, 下同. 上式中

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\Delta V} \sum v_i \Delta s_i = \sum \frac{v_i}{l} \cdot \frac{l \Delta s_i}{\Delta V}. \quad (5)$$

(5) 式揭示了 $\dot{\gamma}$ 的物理意义. 设想以 Δs_i 为横断面割出一个高为 l 的棱柱, 若 v_i 是两端面的相对滑动速率, v_i/l 则为该棱柱内的剪切率. $l \Delta s_i$ 是棱柱的体积, 与 ΔV 之比则为该棱柱所占的体积百分比. (5) 式表明 $\dot{\gamma}$ 是同一方位上所有微小滑移面滑动引起剪切变形率的体积平均, 即微小滑移面个数与面积增减、滑移率改变的总效应. 它与法线为 n 的平面上沿 m 方向的剪应力功共轭. 若设想材料内法向为 n 的剖面上沿方向 m 的滑移形成一个滑移系, 其等效剪切率为 $\dot{\gamma}$. 对于尺寸远大于晶粒的初始各向同性材料单元, 显然可以假设空间所有方位上均匀分布着这样的滑移系, 它们的开动形成了材料的塑性变形. 与晶体学意义下晶粒内的滑移系相比, 这种滑移系比细观尺度大、是宏观的. 由此建立的材料模型具有传统唯象模型所没有的内部耗能构元, 因而可称谓亚宏观模型.

滑动消耗的塑性功率 $\dot{\omega}$ 又等于宏观塑性应变率与宏观应力的数量积 $D^p: T$, 再由 (4) 式得

$$D^p = \int_{\Omega} \int_{\Psi} \tilde{\gamma} \tilde{P} d\Omega d\Psi. \quad (6)$$

虽然上式曾被 Martin^[6] 使用过, 在单晶体塑性理论^[1] 中也导出了与它对应的求和形式, 但都是在应变均匀假设的条件下得到的. 本文根据功共轭条件得到了 (6) 式, 因而 D^p 是与宏观应力 T 功共轭的宏观表征量, 并不要求细观应变均匀. 本文推导 (5) 式的过程阐明了应变均匀假定的统计意义.

2 本构方程

只有当滑移系的分解剪应力达到某个临界值时, 它才能开动. 记正反两个方向的临界分解剪应力为 $\tau_{\pm\alpha}$. 大量实验结果表明, 塑性变形发生以后, 无论滑移系开动与否, 其临界分解剪应力都会有所改变. 这就是潜在硬化现象. 潜在硬化的微观物理机制异常复杂, 两两滑移

系之间的潜在硬化会因其相对位向的差异而不同. 以往把潜在硬化作为两两滑移系之间的强化作用. 由于滑移系开动的组合状态较多, 实验研究与理论研究的难度很大. 然而, 将多晶金属作为均匀连续介质对待时, 不管滑移系开动组态如何, 其结果都可以用宏观塑性应变率 $\mathbf{D}^p$ 表征. 因而, 可以把潜在硬化作为塑性应变率对各滑移系的强化作用处理, 不必深究塑性应变率是由哪些滑移系开动形成的, 也不必分别处理滑移系成对的众多组态, 滑移系的潜在硬化率将取决于它们各自对塑性应变率的相对取向及塑性应变率的大小.

试验结果表明^[9], 若选用比例极限作为屈服点, 多晶金属的后继屈服面具有 3 个明显的共同特征. (1) 存在显著的 Bauschinger 效应: 加载时, 整个屈服面随载荷移动并伴有形状改变; (2) 无横向伸缩效应: 屈服面沿垂直于加载方向的尺寸基本保持不变; (3) 存在尖点效应: 屈服面上加载点附近曲率增大而反向相对部位的曲率减小.

在并矢量空间中, 滑移系取向张量 $\mathbf{P}^{(\alpha)}$ 与塑性应变率张量 $\mathbf{D}^p$ 都是矢量. 上述实验现象说明潜在硬化的大小强烈依赖于它们的夹角, 一个合理的假定是

$$\dot{\tau}_\chi = \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \quad (7)$$

其中 χ 是潜在硬化模数, 影响后继屈服面上加载点处的曲率变化. 较大的值能使屈服面上加载点附近变得较为平坦. 当 $\chi=0$ 时, 加载点会逐步成为尖点^[2]. 一般地说, χ 随塑性变形的发展而变化. 应当说明, 本文中的潜在硬化是指宏观塑性应变率对各滑移系临界分解剪应力的影响, 是一种背应力耦合强化效应^[10].

对于开动的滑移系, 其分解剪应力率应当等于滑移硬化率与潜在硬化率之和, 即

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_\alpha = \dot{\tau}_a + \dot{\tau}_\chi = h\dot{\gamma} + \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \quad (8)$$

式中 h 是滑移硬化模量.

设滑移系可以在正反两个方向开动, 其开动状态将有四种情况. 滑移系沿正向或反向开动算两种; 滑移系不开动也分两种, 潜在硬化方向与滑移系正方向或反方向相同. 当滑移系遵循经典塑性理论中的随动强化律时, 其正反两个方向的临界分解剪应力 $\tau_{\pm cr}$ 之差将保持不变. 实验表明, 这个差值会随滑移系的开动过程 (如累计滑移量的增加) 而变化, 这里引用另一个材料性质参数 $2\beta = (\tau_{+cr} - \tau_{-cr}) / \tau_{cr0}$, 其中 τ_{cr0} 是初始临界分解剪应力. 经典随动强化对应于 $\beta=1$. 当 β 变化时, $\tau_{\pm cr}$ 之差将相应改变. 由于 β 值用于表示 $\tau_{\pm cr}$ 伴随变化的情况而且决定了宏观 Bauschinger 效应的强弱, 可称谓伴随 Bauschinger 效应系数. 这样, 滑移系的开动状态与硬化律将是

$$\begin{cases} \tau = \tau_{+cr} \text{ 而且 } \dot{\tau} > \dot{\tau}_\chi, & \text{则 } \dot{\gamma} > 0, \dot{\tau}_{+cr} = \dot{\tau} = h\dot{\gamma} + \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \text{ 而且 } \dot{\tau}_{-cr} = \dot{\tau}_{+cr} - 2\dot{\beta}\tau_{cr0}; \\ \tau = \tau_{-cr} \text{ 而且 } \dot{\tau} < \dot{\tau}_\chi, & \text{则 } \dot{\gamma} < 0, \dot{\tau}_{-cr} = \dot{\tau} = h\dot{\gamma} + \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \text{ 而且 } \dot{\tau}_{+cr} = \dot{\tau}_{-cr} + 2\dot{\beta}\tau_{cr0}. \\ \text{否则 } \dot{\gamma} = 0, & \text{若 } \dot{\tau}_\chi \geq 0, \text{ 则 } \dot{\tau}_{+cr} = \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \text{ 而且 } \dot{\tau}_{-cr} = \dot{\tau}_{+cr} - 2\dot{\beta}\tau_{cr0}; \\ & \text{若 } \dot{\tau}_\chi < 0, \text{ 则 } \dot{\tau}_{-cr} = \chi \mathbf{P} : \mathbf{D}^p, \text{ 而且 } \dot{\tau}_{+cr} = \dot{\tau}_{-cr} + 2\dot{\beta}\tau_{cr0}. \end{cases} \quad (9)$$

从后面的例子中将要看到, 上式描述的滑移系开动状态能保证理论预测的后继屈服面具有上述 3 个特征.

与经典塑性理论中随动强化模型对照, (7) 式成立表明塑性应变率将诱发出与之取向相同的背应力率 $\dot{T}_{back}$ 并由它决定各个滑移系的潜在硬化率, 即

$$\dot{T}_{back} = \chi \mathbf{D}^p, \text{ 而且 } \dot{\tau}_\chi = \dot{T}_{back} : \mathbf{P}, \quad (10)$$

在小变形条件下,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{T}}. \quad (11)$$

如果认为塑性变形不影响材料的弹性性质, 则有

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{T}}, \quad (12)$$

式中 $\mathbf{D}$ 是应变率张量, $\mathbf{C}^e$ 是弹性柔度张量. 记 $\mathbf{D} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{D}$, 其中 $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$ 表示四阶单位张量, 它与二阶对称张量的缩并积仍为该二阶对称张量. 将 (11), (12) 式随同 (6) 式代入 (8) 式能得到

$$\left\{ \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \int_{\Omega} \int_{\Psi} \frac{\chi}{h} \tilde{\mathbf{P}} \otimes \tilde{\mathbf{P}} d\Omega d\Psi \right\} : \mathbf{D} = \left\{ \mathbf{C}^e + \int_{\Omega} \int_{\Psi} \frac{1}{h} [\tilde{\mathbf{P}} \otimes \tilde{\mathbf{P}} + \chi \tilde{\mathbf{P}} \otimes \tilde{\mathbf{P}} : \mathbf{C}^e] d\Omega d\Psi \right\} : \dot{\mathbf{T}}, \quad (13)$$

从而不难写出率型刚度(柔度)张量, 其中只含有滑移硬化模量 h (视未开动滑移系的滑移硬化模量为无穷大) 与潜在硬化模量 χ 两个材料性质参数, 材料的宏观力学行为完全由它们的初值及演化规律所决定. 伴随 Bauschinger 效应系数 ' β ' 并没有在这里出现, 原因是 ' β ' 描写的是滑移系从当前开动状态反回到相反方向开动时的分解剪应力的变化范围, 只有当应力改变方向后才能显示出它的影响.

虽然 (13) 式形式上是率型本构方程的显式表示式, 但滑移系的开动状态与材料性质参数的当前值要由变形历史及当前应力率决定. 实际计算中应将加载过程分成适当的增量步进行. 下述算法, 同样可以算得材料的应力应变响应, 不必通过 (13) 式.

将 (6) 与 (11) 式代入 (8) 式, 可以得到

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{P} : \dot{\mathbf{T}}}{h} - \frac{\chi}{h} \int_{\Omega} \int_{\Psi} (\mathbf{P} : \tilde{\mathbf{P}}) \tilde{\gamma} d\Omega d\Psi, \quad (14)$$

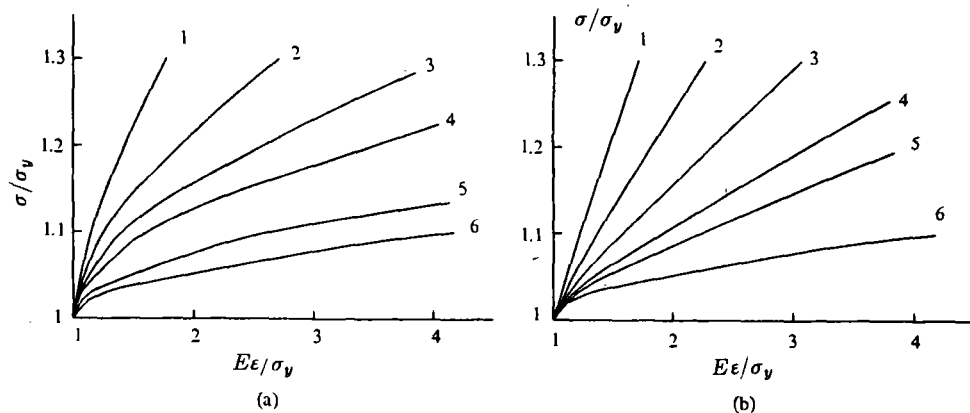
上式是关于 $\dot{\gamma}$ 的第三类 Fredholm 积分方程, 而且具有对称的积分核 $\mathbf{P} : \tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}} : \mathbf{P}$. 如果潜在强化系数 $h > 0$, 解存在且唯一. 把滑移系法线取向范围半个立体角 2π 划分为相等的 N 份, 滑移方向取值范围半个平面角 π 划分为相等的 M 份, 就得到了具有 $M \cdot N$ 个离散滑移系的模型供数值计算使用. 此时, (6), (13) 与 (14) 式中的积分变成求和, 例如 (14) 式成为

$$\dot{\gamma}^{(j)} = \frac{1}{h^{(j)}} \mathbf{P}^{(j)} : \dot{\mathbf{T}} - \frac{2\pi^2}{MN} \frac{\chi}{h^{(j)}} \sum_{i=1}^{MN} (\mathbf{P}^{(j)} : \mathbf{P}^{(i)}) \dot{\gamma}^{(i)} \quad (\text{对所有开动的滑移系}), \quad (15)$$

这是一组具有对称正定系数矩阵的线性方程组, 其中, $M \cdot N$ 个滑移系的滑移率可以通过迭代方法求出. 迭代从滑移率的一组猜想值, 例如滑移率为零, 开始. 将 $\dot{\gamma}$ 代入 (6) 式即能得到塑性应变率, 而弹性应变率可由 Hooke 定律算出.

3 材料性质参数对后继屈服面的影响

将本文提出的本构模型用于具体材料的模拟计算时, 尽管也需要确定材料滑移硬化模量 h 与潜在硬化模量 χ 的演化方程, 非比例加载条件下还需要确定伴随 Bauschinger 效应系数的演化方程, 但描述对象只是单自由度的滑移系. 它们的演化规律可以用材料常数与变形历史参数表达出来, 而材料常数可通过传统材料试验曲线标定. 限于篇幅, 这里暂不涉及具体材

图1 当 h 与 χ 取不同常数值时的单轴拉伸曲线

(a) 模拟拉伸应力应变曲线 ($\chi=0$), 1— $h=0.2E$, 2— $h=0.1E$, 3— $h=0.5E$, 4— $h=0.3E$, 5— $h=0.01E$, 6— $h=0.005E$; (b) 模拟拉伸应力应变曲线 ($h=0.005E$), 1— $\chi/h=40$, 2— $\chi/h=30$, 3— $\chi/h=20$, 4— $\chi/h=10$, 5— $\chi/h=6$, 6— $\chi/h=0$

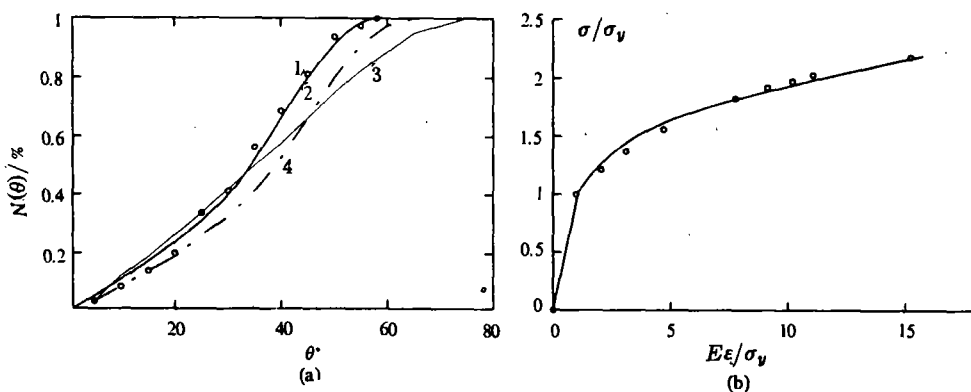


图2 模型预测结果与文献[11~13]实验与理论结果的对比

(a) 不同方向滑移线累计数, 1—实验点, 2—本文预测, 3—文献[4]预测, 4—文献[9]预测; (b) 2S-O 铝合金拉伸应力应变曲线, $\circ$ 为实验点, — 为模拟曲线

料, 使用最典型的简单材料性质参数研究模型的基本特性。

图1为 h 与 χ 取不同常数值时的单轴拉伸曲线, 伴随 Bauschinger 效应系数对单调比例加载时的宏观性质没有影响。

若材料的潜在硬化模量 $\chi=0$, 而伴随 Bausinger 效应系数 $\beta=1$, 本文导出的本构方程将与简单滑移模型^[4]的相同。由于简单滑移模型不考虑潜在硬化的影响, 难以对多晶材料晶粒中滑移线取向分布作出精确预测。图2(a)将本模型的预测结果与文献[11~13]报道的实验及理论结果作了对比, 其中 θ 是晶粒中滑移线与试件横断面的夹角, $N(\theta)$ 是慢滑移方向落在 $0^\circ \sim \theta^\circ$ 之间的晶粒个数占全部具有滑移线的晶粒总数的百分比。图2(b)给出了所选用材料常数对应的预测应力应变曲线。本模型的预测与实验结果良好吻合的原因如下: 对于单向拉伸应力 σ , 45° 方向滑移系的分解剪应力系数最大, 等于 $\frac{1}{2}$ 。当它达到开动临界条件时, 拉应力也

达到临界值 σ_c . 现考察拉应力增大到 $2\sigma_c$ 时的滑移系开动情况. 显然, 如果没有潜在硬化, 凡是分解剪应力系数大于 $\frac{1}{4}$, 即取向在 $15^\circ \sim 75^\circ$ 范围内的滑移系都将开动. 实际上, 当邻近 45° 方向的滑移系开动以后, 尚未开动滑移系的临界分解剪应力受潜在硬化作用而增大, 因而开动滑移系的取向范围要缩小. 对于 2S-O 铝合金, 潜在硬化作用将这个范围限制在 $30^\circ \sim 60^\circ$ 之间.

按照本文提出的潜在硬化律 (见图 3(a) 与图 6(b)), 潜在硬化效应的特征主要有两个. 一是影响后继屈服面加载点处的曲率, 无潜在硬化时会出现尖点而潜在硬化很强时, 加载点处的曲率几乎能保持不变. 二是能减少后继屈服面的横向收缩.

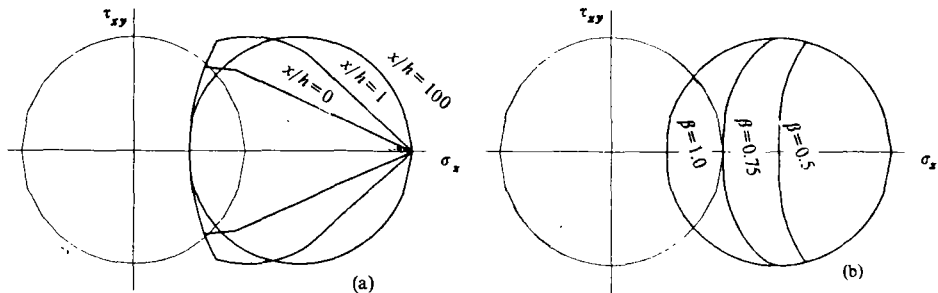


图 3 潜在硬化律与 Bauschinger 效应

(a) 潜在硬化的尖点效应与横向伸缩效应, (b) Bauschinger 效应 ($\chi/h=15$)

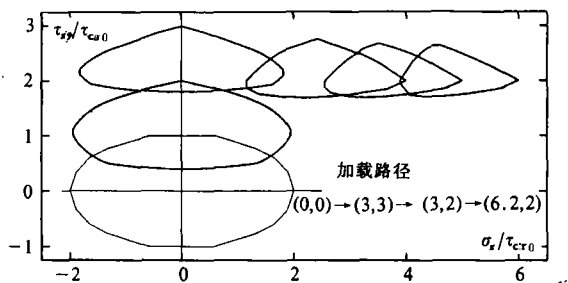


图 4 后继屈服面的演化

伴随 Bauschinger 效应系数 β 的作用见图 3(b).

图 4 为屈服面演化的模拟结果, 加载过程是纯剪后再施加拉应力. 作者也对其它几种典型复杂加载条件下后继屈服面演化作了模拟, 理论预测都与文献[9]提供的实验结果基本吻合. 少许差别是本模型中尚未考虑粘性效应, 实验条件下的粘性效应对实验结果是有影响的.

4 模型的基本性质

(1) 本构方程 (13) 表明, 当知道材料滑移硬化模量 h 、潜在硬化模量 χ 与伴随 Bauschinger 系数 β 时, 本材料模型能直接预测材料的宏观应力应变响应, 不再需要预先设定塑性势或热力学内变量的演化方程. 对于初始各向同性材料, 各种取向的滑移系性质相同而且正反对称. 由于滑移系各有一个运动自由度, 而且材料宏观性质是各个滑移系的综合效应, 便于发挥数值计算的效率.

(2) 对于平面应力状态, 如果不计静水压力的差别、忽略弹性变形, 可以证明经典塑性形变理论^[14]中的单一曲线假设严格成立. 事实上, 这时的应力是方向不同的纯剪切, 由于本模型构造的几何对称性, 各种取向滑移系的性质又无差异, 因而如果让坐标轴随着载荷方向变

化, 不仅等效应力应变曲线相同, 连应力应变分量都不会有差别. 对于一般的比例加载, 可以验证这一假设是一个误差很小的良好近似.

(3) 从理论上讲, 宜将屈服限定义为塑性变形的开始, 即最早开动滑移系上的分解剪应力达到其临界值. 本模型中任一滑移系的上下两个屈服限是

$$T: P = \tau_{\pm\alpha}. \quad (16)$$

在并矢量空间中, P 可被看成是常矢量, 上式是应力矢量在该常矢量方向上的投影. 这个应力分量的线性表达式表示两个临界超平面^[9], 给出了应力空间中不能使滑移系开动的应力范围. 各个滑移系都有自己的临界超平面. 它们的内包络曲面就是屈服面. 在应力空间中, 屈服面显然是凸曲面. 在初始状态, 各滑移系的临界分解剪应力都相同, 初始屈服条件遵循 Tresca 准则. 任意时刻的后继屈服面都由当时的 $\tau_{\pm\alpha}$ 所决定. 对于法向与滑移方向都处在同一平面内的平面模型, 图 5 对比了 $\tau_{\pm\alpha}$ 随滑移系取向角 θ 的空间分布与屈服面形状的关系. 在这种意义

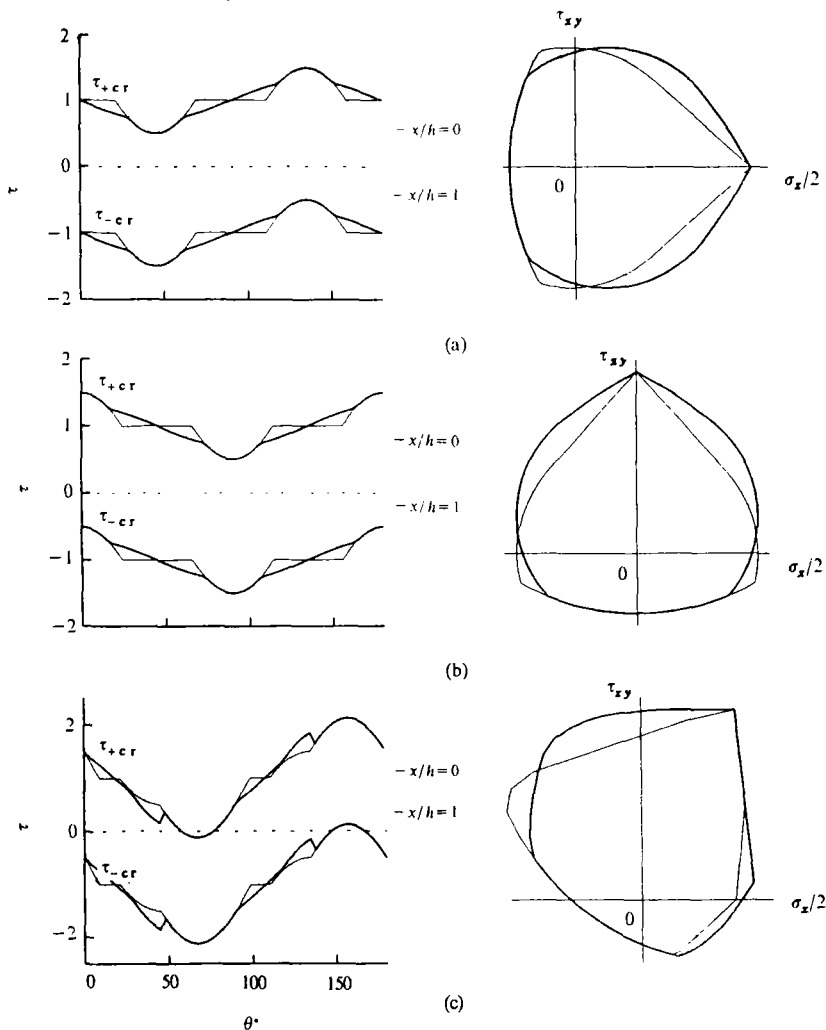


图 5 临界分解剪应力分布与后继屈服面对应关系

(a) 拉伸以后, (b) 剪切以后, (c) 拉伸-剪切以后

上, $\tau_{\pm cr}$ 可以作为材料的内变量, (9) 式描述了内变量的演化规律.

(4) 由于本模型中滑移系上下临界分解剪应力的变化受伴随 Bauschinger 效应系数的约束 (见 (9) 式), 文献 [13] 对 Sanders 理论进一步改进的设想得以实现. 当滑移系承载能力有最大限额时, 本模型将有一个极限加载面, 限定后继屈服面的最大活动范围. 在这种情况下, 文献 [15] 中的多屈服面理论是本模型的一个特例.

(5) 只要滑移系保持正的滑移硬化模量, 即 $h > 0$, 材料必然是稳定的, 后继屈服面是塑性势函数表现. 因而能否合理预测屈服面的演化能够反映材料模型对各种加载条件下材料力学响应的模拟能力. 本模型利用滑移系自身运动硬化模量、潜在硬化模量与伴随 Bauschinger 系数能够控制后继屈服面演化过程中的尖点效应, 横向伸缩效应与 Bauschinger 效应, 说明了它具备模拟各种加载条件下材料力学响应的能力. 例如, 图 6(b) 表明当 h 随 χ 增大而相应减小时, 本模型预测的后继屈服面在加载点处的形状差别. 如果 $\chi/h = 0$, 后继屈服面很尖, 与简单滑移模型^[4] 预测的相同. 如果 χ/h 值很大, 后继屈服面与初始屈服面的形状几乎相同, 类似于经典随动强化理论的预测. 虽然这五种参数组合对应的单轴拉伸曲线相同 (见图 6(a)), 但后继屈服面的差别意味着当载荷方向改变时将有不同的应变响应. 图 6(c) 与图 6(d) 为在拉伸状态下扭转时的塑性拉应变与剪应变. 这表明必须根据复杂变形时应力应变响应决定各个硬化参数.

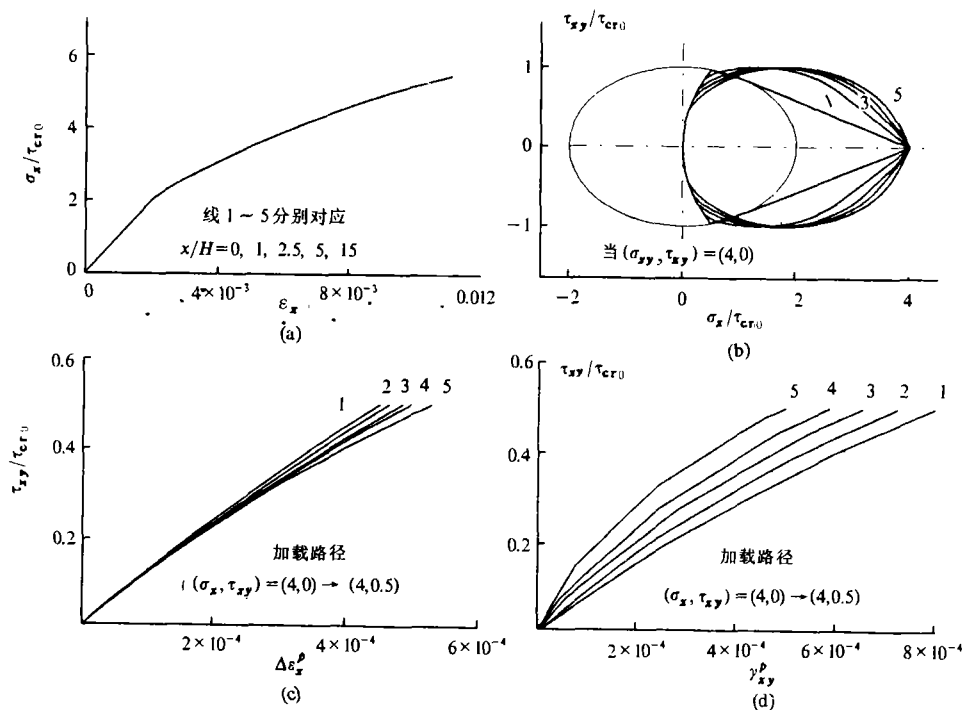


图 6 后继屈服面与载荷转向后的塑性拉应变及塑性剪应变
 (a) 不同硬化模量组合模拟的同一拉伸曲线, (b) 载荷转向时刻的后继屈服面,
 (c) 载荷转向后的塑性拉应变, (d) 载荷转向后的塑性剪应变

5 结束语

由于篇幅关系, 本文仅讨论了模型的建立、本构方程的推导与模型的基本性质, 未涉及具体的材料. 如何描述常用结构金属材料的性质参数的演化、标定其中的材料常数, 模拟各种复杂变形条件下材料响应能力的实验验证等见文献[16], 如何计及有限变形效应, 如何考虑塑性变形诱发的损伤, 如何考虑应变软化特性等问题将另文讨论.

参 考 文 献

- 1 Asaro R J. Crystal plasticity. *J Appl Mech (Trans ASME)*, 1983, 50: 921~934
- 2 Hutchinson J W. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. *Proc Roy Soc London*, 1970, A. 319: 247~272
- 3 Tokuda M, Kratochvil J, Ohashi Y. Mechanism of induced plastic anisotropy on polycrystalline metals. *Phys Stat Sol(a)*, 1981, 68: 629~635
- 4 Batdorf S B, Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, Technical Note 1871. Washington D C: National Advisory Committee for Aeronautics, 1949
- 5 Sanders J L Jr. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions: In: *Proc 2nd U S Nat Congr Appl Mech ASME*, New York, 1954, 455~460
- 6 Martin J B. Plasticity: Fundamentals and General Results. 1st ed. Cambridge USA: The Mit Press, 1975. Ch 7
- 7 Wang T C. Macro slip theory of plasticity for polycrystalline solid. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(4): 323~334
- 8 梁乃刚, 程品三. 基于纤维伸缩与滑移两种变形机制的弹塑性本构模型. *中国科学, A辑*, 1992, (11): 1179~1189
- 9 Phillips A, Tang J L. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *Int J Solids Structure*, 1972, 8: 463~474
- 10 梁乃刚, 徐 彤, 王自强. 晶体硬化系数表示式及材料常数标定. *中国科学, A辑*, 1995, 25(3): 280~287
- 11 Budiansky B, Dow N F, Peters R W *et al.* Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. In: *Proc 1st U S Nat Congr Appl Mech*, ASME, Chicago, 1951, 503~511
- 12 Hedgepeth J M. Theoretical distribution of slip angles in an aggregate of face-center cubic crystals. Technical Note 2777. Washington D C: National advisory committee for aeronautics, 1952
- 13 Hedgepeth J M. On the angular distribution of slip lines in polycrystalline aluminum. Technical Note 2577, Washington D C: National advisory committee for aeronautics, 1951
- 14 王 仁, 熊祝华, 黄文彬. 塑性力学基础. 北京: 科学出版社, 1982. 第四章
- 15 Mroz Z. On the description of anisotropic work hardening. *J Mech Phys Sol*, 1967, 15: 163~173
- 16 Liu, H Q, Liang N G, Wang T C. Mechanical-property parameters of polycrystalline metal and prediction of stress-strain responses under out-of phase circular deformation. In: Xu Bing, Yang We eds. *Advances in Engineering plasticity and its Applications*, Beijing, June 29-July 2, 1994. Beijing: International Academic Publishers, 1994. 438~445