中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1829～1846
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
论 文

变指数鞅空间理论的新进展

献给吴从炘教授 85 华诞

刘培德

武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: pdliu@whu.edu.cn

收稿日期: 2020-06-01; 接受日期: 2020-07-11; 网络出版日期: 2020-12-09
国家自然科学基金 (批准号: 11471251) 资助项目

摘要 本文阐述近年发展起来的变指数鞅空间理论中的若干问题, 分别就可数生成 σ- 代数序列和一般 σ- 代数序列两种情形介绍了此类鞅空间中的基本不等式, 包括 Doob 极大不等式和 Burkholder-Gundy-Davis 不等式, 以及各种类型的 Hardy 鞅空间和 Lorentz-Hardy 鞅空间. 列举这些空间的相互连续嵌入关系以及原子分解、共轭空间、分数次积分及其在二进 Fourier 分析中的应用. 同时还介绍 Musielak-Orlicz 鞅空间的有关情形. 最后提出研究中的一些公开问题.

关键词 模空间 变指数空间 鞅不等式 Doob 极大算子 原子分解 次线性算子 分数次积分 Fourier 分析

MSC (2010) 主题分类 60G46, 60G42, 46E30, 42B25, 42B35

1 引言

变指数函数空间理论及其应用应该说是分析数学中崭新的分支, 尽管它的概念被确定得很早, 但是其蓬勃的发展还只是最近十几年的事. 一个在 $\mathbb{R}^n$ 上满足条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, u(x))dx < \infty$$

的可测函数 u 的集合称为模空间, 其中 Φ 是满足一定条件的二元可测函数. 20 世纪 30 年代初 Orlicz [1] 给出了这个定义. 如果 $\Phi(x, u(x)) = |u(x)|^{p(x)}$, 这里 $p(x)$ 是某个事先给定的正可测函数, 则所得到的空间就是变指数 Lebesgue 空间 (参见文献 [2], 本节所涉及的概念与记号, 其意义详见下节), 记为 $L_{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, 它是模空间的特殊情形. 在以后的年代里对于一般模空间的研究进展并不大, 只是在本次千禧年的前后事情才有了转机, 这得益于变指数空间在其应用方面的进展. 例如, 20 世纪 90 年代, 德国数学家 Ružička [3] 研究了电流学中的一些问题, 其中涉及下面泛函的极值:

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p(x)}dx, \quad \forall\, u \in K,$$

英文引用格式: Liu P D. Progress in the theory for martingale spaces with variable exponents (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1829–1846, doi: 10.1360/SSM-2020-0170

这里 K 是某个可测函数的集合. 事实证明, 变指数空间主要与具有非标准局部增长条件的各种问题相联系. 在此条件下的流体力学、非线性弹性理论、大气环流问题 (天气预报) 和图像恢复等的数学模型中就常常导致变指数的极值问题、变分问题和变系数的微分算子等.

在空间理论方面, 1991 年 Kováčik 和 Ràkosnik [4] 及 2001 年 Fan 和 Zhao [5] 等分别研究了在 $\mathbb{R}^n$ 上定义的变指数 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间的基本属性与不等式, 包括 Hölder 不等式、空间完备性、等价范数、稠密性、可分性、共轭空间和自反性等, 并且考察了它们在微分方程边值问题、Lagrange 函数的正则性、含有 $p(x)$-Laplace 算子方程的极值原理和变指数 Sobolev 空间的嵌入定理等问题中的应用. 这些研究为变指数函数空间理论的发展及其应用提供了可靠的基础.

关于变指数 Lebesgue 空间 $L_{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ 上极大算子有界性的研究是变指数调和分析理论发展的关键. 先是已经知道卷积算子 $f*g$ 在一般变指数空间上不再是有界的, 即变指数的 Young 不等式一般不再成立. Lerner [6] 甚至证明了 Young 不等式成立当且仅当指数 $p(x)$ 为常数. Samko [7] 发现了当 $p(x)$ 具有 log-Hölder 连续性时, 卷积 $f*\phi_\varepsilon$ 点态并且以空间范数收敛于 f, 这里 ϕ_ε 是逼近单位. 这导致了对于 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $L_{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界性的研究. 所谓 $p(x)$ 具有 log-Hölder 连续性是指

$$
\begin{aligned}
|p(x)-p(y)| &\leqslant \frac{C}{-\log|x-y|}, \quad |x-y|<\frac{1}{2},\\
|p(x)-p_\infty| &\leqslant \frac{C}{\log(\mathrm{e}+|x|)}, \quad |x|\gg 0,
\end{aligned}
$$

其中 p_∞ 是某个常数. 之后, Diening [8]、Cruz-Uribe 等 [9] 和 Nekvinda [10] 等先后完善了在 $p(x)$ 满足 log-Hölder 连续性的条件下, M 是 $L_{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界算子的证明.

在极大算子有界性的条件被确定之后, 变指数函数空间在包括理论和应用的更加广阔的领域里开始向纵深快速发展, 相关研究成果日新月异. 在涉及函数空间理论、调和分析、偏微分方程理论以及与流体力学等有关的问题中都有很好的结果. 时至今日, 有关变指数 Lebesgue 空间及其应用的研究已经有了相当丰富的内容和一定雏形的理论体系. 当然, 仍有许多经典理论中的问题没有相应的类比, 一些公开问题仍有待解决. 这方面较为详细的介绍可参见文献 [11,12], 另参见文献 [13–16].

众所周知, 鞅论与调和分析理论的关系十分密切. 鞅空间理论是调和分析、随机过程理论与泛函分析结合的产物. 把经典鞅论与经典函数空间理论进行比较, 我们会发现经典函数空间理论中的主要成果, 如 L^1 与 BMO 的对偶、H_p 空间的原子分解、许多算子之间的 Φ 不等式、内插理论甚至 A_p 权与加权理论等大多已经在鞅论中有了令人满意的对应 (参见文献 [17–20]). 反过来, 鞅论的思想方法也被广泛地应用到调和分析中, 二者相互交融、相互渗透. 从某种意义上可以说, 鞅空间理论就是概率空间上的调和分析. 鞅论的技巧还被应用于数学的其他很多分支, 从随机过程到随机分析, 从 Banach 空间几何学到数理金融, 从信息论到生物数学等, 形成一个庞大的体系. 总之, 无论作为理论还是技巧方法, 鞅论都有重要的研究价值.

带着鞅论与函数空间理论这种彼此融汇、相互促进的关系反观变指数鞅空间理论与变指数函数空间理论的发展状况, 我们会发现两者明显的差异. 究其原因, 一个基本的事实在于: 一般的函数空间中的元素是定义在既具有线性结构又具有拓扑结构的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 而鞅空间中的元素却是定义在两者都不具备的概率空间之上的, 仅有一个 σ- 代数流可供利用. 所以要证明类似的结果所使用的工具与方法都有很大不同. 在变指数情形, 这一点表现得更加明显. 这里不妨略举几个变指数函数空间与经典鞅空间中的基本工具不再适用于变指数鞅空间的事实:

(1) 变指数函数空间中关于指数 $p(x)$ 的 log-Hölder 连续性在概率空间上无从定义.

(2) 在经典函数空间与鞅空间中成立 Jensen 不等式, 它导致在经典鞅论中条件期望算子的压缩性与鞅序列按 L_p 范数的单调性. 对于变指数 $p(x)$, Jensen 不等式不再成立. 因此对于一般变指数空间中的鞅, 它们失去了这些优越特性.

(3) 在经典函数空间与鞅空间中成立范数的分布函数表达式. 它在证明一系列不等式的时候是十分方便的工具, 例如, 在一系列由好 λ 不等式导出范数不等式的证明中就是如此. 现在对于变指数情形, 此表达式不再好用, 如果不是完全没用的话.

(4) 变指数空间不再是重排不变的.

还可以举出一些. 由于这些非常基础的条件和工具不具备, 为新空间的研究造成了很大障碍, 以至于至今一般情形下 Doob 极大算子有界性的充分必要条件仍是未决的. 由此可知, 变指数鞅空间的研究方法与最终形态既与变指数函数空间不同, 也与经典鞅论不同, 需要另辟蹊径.

其实, 在关于变指数函数空间研究的同时, 变指数鞅空间也受到人们的关注. 考虑在概率空间 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ 上定义的鞅 $f=(f_n)$ $(=(f_n,\Sigma_n)_{n\geqslant 0})$, 2009 年 Aoyama [21] 试图得到变指数 Lebesgue 鞅空间中弱型和强型 Doob 极大不等式成立的条件. 其中证明了当 p 满足对于每个停时 τ 成立

$$\frac{1}{p}\leqslant C\mathrm{E}\bigg(\frac{1}{p}\bigg|\Sigma_\tau\bigg) \tag{1.1}$$

时, Doob 极大函数 Mf 满足弱型不等式

$$\mathrm{P}(Mf>\lambda)\leqslant C\mathrm{E}\bigg|\frac{f_\infty}{\lambda}\bigg|^p,\quad \forall\,\lambda>0, \tag{1.2}$$

这里 $f=(f_n)$ 是一致可积鞅, f_∞ 是 f_n 的点态极限, C 是仅与 p 有关的常数; 当 p 关于每个 Σ_n $(n\geqslant 0)$ 都可测时, 强型极大不等式成立. 不难看出, 无论对于弱型还是强型不等式, 这些条件都太强. 2013 年, Nakai 和 Sadasue [22] 运用乘子方法证明了 Doob 极大算子 M 在加权 $L_{p(\cdot)}$ 空间上是有界的, 条件是每个 Σ_n 是由至多可数多个原子生成的, σ- 代数族是正则的并且 $1<p^-\leqslant p^+<\infty$, 此外权函数属于 A_p.

近年来, 国内鞅空间理论研究者对于变指数鞅论予以高度重视并且进行了多方面的研究. 2016 年, Jiao 等 [23] 就可数生成 σ- 代数的情形提出了一种关于指数 p 的限制性条件

$$\mathrm{P}(A)^{p^-(A)-p^+(A)}\leqslant C_p,\quad \forall\,A\in\bigcup A(\Sigma_n) \tag{1.3}$$

以代替函数空间情形的 log-Hölder 连续性, 成功地证明了此种情形下的 Doob 弱型与强型极大不等式. 同时通过原子型空间与相应空间的等价性建立了几类变指数鞅空间的原子分解定理及相互连续嵌入关系. 作为应用, 证明了变指数鞅空间的 John-Nirenberg 定理, 给出了一类小指数空间的共轭, 证明了关于鞅的分数次积分算子的有界性 (参见文献 [24,25]). 事实证明, (1.3) 在由可数原子生成的 σ- 代数情形是十分重要的条件. 进一步地, 他们还开发了关于变指数 Lorentz-Hardy 和 Musielak-Orlicz 等类型鞅空间的不等式及其在二进 Fourier 分析中应用的研究, 得到了丰富的结果.

众所周知, 在经典鞅论中, Burkholder-Gundy-Davis (B-G-D) 不等式和 Doob 极大不等式是两个起着重要支柱作用的不等式. 近年来, 作者开展了对于一般 σ- 代数序列情形下变指数鞅的 B-G-D 不等式和强弱型 Doob 极大不等式的研究. 首先通过推广关于随机序列的 Dellacherie 定理我们得到了包括 B-G-D 不等式在内的一系列著名不等式的变指数类比 (参见文献 [26]). 对于 Doob 不等式, 文献 [27] 给出了不等式 (1.2) 的最优系数 (无需条件 (1.1)). 在条件期望算子族 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in T}$ 一致有界

$$\|\mathrm{E}_\tau u\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|u\|_{p(\cdot)},\quad \forall\,u\in L_{p(\cdot)} \tag{1.4}$$

条件下, 证明了另一类弱型 Doob 极大不等式 $\|Mf\|_{\omega L_{p(\cdot)}} \leqslant C_p\|f_\infty\|_{p(\cdot)}, \forall f=(f_n)$. 同样在条件 (1.4) 之下, 援用文献 [28] 的方法, 我们还证明了不等式 $\|Mf\|_{\varepsilon p(\cdot)} \leqslant C_p\|f_\infty\|_{p(\cdot)}, \forall f=(f_n)$, 这里 $0<\varepsilon<1$ 是任一实数. 事实证明, (1.4) 对于建立一般 σ- 代数情形下变指数鞅的 Doob 极大不等式具有重要性.

本文余下内容安排如下: 第 2 节介绍预备知识之后, 第 3 节着重叙述在可数生成 σ- 代数情形下变指数鞅 Lebesgue 空间与 Hardy 空间的有关结论. 第 4 节叙述一般 σ- 代数情形下变指数鞅与 B-G-D 不等式有关的结论. 第 5 节叙述一般 σ- 代数情形下变指数鞅强弱型 Doob 极大不等式. 第 6 节叙述变指数鞅的 Lorentz-Hardy 空间及其在二进 Fourier 分析中的应用. 第 7 节介绍 Musielak-Orlicz 鞅空间的若干不等式. 最后一节提出变指数鞅空间理论研究中的几个公开问题.

尽管关于变指数鞅空间的研究已有不少成果, 但就总体而言, 由于高度的概括性和在许多实践领域的广泛应用, 其理论和应用的研究仍具有巨大的发展空间, 新的结果会不断涌现. 本文目的仅在于对一些成果做一点梳理, 篇幅所限不可能企求全面覆盖.

2 预备知识

设 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ 是完备概率空间, $L^0_+(\Omega)$ 是 $(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ 上正的可测函数的全体, 其中的每个元称为变指数. 对于 $p\in L^0_+(\Omega)$, 记 $\Omega_\infty=\{\omega\in\Omega: p(\omega)=\infty\}$, 随机变量 (可测函数) u 的模是

$$\rho_{p(\cdot)}(u)=\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty}|u(\omega)|^{p(\omega)}d\mathrm{P}+\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega_\infty}|u(\omega)|,$$

$(\Omega,\Sigma,\mathrm{P})$ 上的变指数 Lebesgue 空间及其上的范数分别是

$$\begin{aligned}&L_{p(\cdot)}=\{u:\exists\,\gamma>0,\rho_{p(\cdot)}(\gamma u)<\infty\},\\&\|u\|_{p(\cdot)}\ (=\|u\|_{L_{p(\cdot)}})=\inf\left\{\gamma>0:\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{u}{\gamma}\right)\leqslant 1\right\},\quad \forall\,u\in L_{p(\cdot)}.\end{aligned}$$

$L_{p(\cdot)}$ 是一个拟 Banach 空间, 当 $p(\omega)\geqslant 1$ 时是 Banach 空间. 有时候会考虑满足

$$\|u\|_{\omega L_{p(\cdot)}}=\sup_{\lambda>0}\lambda\|\chi_{|u|>\lambda}\|_{p(\cdot)}$$

的随机变量全体, 记为 $\omega L_{p(\cdot)}$, $\omega L_{p(\cdot)}$ 也是拟 Banach 空间. 当 $p(\omega)\geqslant 1$ 时, $L_{p(\cdot)}\subset\omega L_{p(\cdot)}$. 对于 $p\in L^0_+(\Omega)$, $A\in\Sigma$, 记

$$p_A^-=\operatorname*{ess\,inf}_{\omega\in A}p(\omega),\quad p_A^+=\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in A}p(\omega),$$

分别称其为 p 在 A 上的下指数和上指数. 特别地, 记 $p^-=p^-_\Omega$, $p^+=p^+_\Omega$, $p'=\frac{p}{p-1}$ 是 p 的共轭指数. 此外, 为了方便, 记 $\mathcal{P}=\{p\in L^0_+(\Omega), 0<p^-\leqslant p^+<\infty\}$.

以下引理参见文献 [4,5] 或 [11,12].

引理 2.1 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}&\|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}\leqslant\rho_{p(\cdot)}(u)\leqslant\|u\|_{p(\cdot)}^{p^-},\quad 若\ \|u\|_{p(\cdot)}\leqslant 1,\\&\|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}\leqslant\rho_{p(\cdot)}(u)\leqslant\|u\|_{p(\cdot)}^{p^+},\quad 若\ \|u\|_{p(\cdot)}\geqslant 1.\end{aligned}$$

引理 2.2　若 $p,q\in\mathcal{P}$, $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|u\|_{r(\cdot)}\leqslant C\|u\|_{p(\cdot)}\|v\|_{q(\cdot)},\quad \forall\, u\in L_{p(\cdot)},\quad v\in L_{q(\cdot)}.$$

引理 2.3　若 $p,q\in\mathcal{P}$, 则 $L_{p(\cdot)}\subset L_{q(\cdot)}$ 当且仅当 $q(\cdot)\leqslant p(\cdot)$ a.e., 在此情形下,

$$\|u\|_{q(\cdot)}\leqslant 2\|u\|_{p(\cdot)},\quad \forall\, u\in L_{p(\cdot)}.$$

引理 2.4　若 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则

$$\|u\|_{p(\cdot)}\leqslant \sup_{\|v\|_{p'(\cdot)}\leqslant 1}|\mathrm{E}uv|\leqslant 2\|u\|_{p(\cdot)},\quad \forall\, u\in L_{p(\cdot)}.$$

引理 2.5　若 $p\in\mathcal{P}$, $0<s<\infty$, $sp^-\geqslant 1$, 则

$$\||u|^s\|_{p(\cdot)}=\|u\|^s_{sp(\cdot)}.$$

设 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 是 Σ 中的递增子 σ- 代数序列, E 是期望, E_n 是关于 Σ_n 的条件期望. 对于鞅 $f=(f_n)$, 称序列 $df_n=f_n-f_{n-1}$ $(n\geqslant 0)$ 是 f 的鞅差, 其中 $f_{-1}\equiv 0$, $\Sigma_{-1}=\{\emptyset,\Omega\}$. f 的极大函数、均方函数和条件均方函数分别记为

$$Mf\ (=f^*)=\sup_{n\geqslant 0}|f_n|,\quad S(f)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|df_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad s(f)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}_{n-1}|df_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

变指数的 Lebesgue 鞅空间 $L_{p(\cdot)}$ 与 Hardy 鞅空间 $H^*_{p(\cdot)}$、$H^S_{p(\cdot)}$ 和 $H^s_{p(\cdot)}$ 分别定义为

$$L_{p(\cdot)}=\{f=(f_n):\|f\|_{p(\cdot)}=\sup\|f_n\|_{p(\cdot)}<\infty\},\quad H^*_{p(\cdot)}=\{f=(f_n):\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}=\|f^*\|_{p(\cdot)}<\infty\},$$
$$H^S_{p(\cdot)}=\{f=(f_n):\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}=\|S(f)\|_{p(\cdot)}<\infty\},\quad H^s_{p(\cdot)}=\{f=(f_n):\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}=\|s(f)\|_{p(\cdot)}<\infty\}.$$

设有非负单增适应序列 $\lambda=(\lambda_n)$, $\lambda_\infty=\lim_{n\to\infty}\lambda_n$, Λ 是满足 $\lambda_\infty\in L_{p(\cdot)}$ 的此种序列的全体. 定义

$$\mathcal{Q}_{p(\cdot)}=\Big\{f=(f_n):\exists\,\lambda\in\Lambda, S_n(f)\leqslant\lambda_{n-1},\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}=\sup_{\lambda\in\Lambda}\|\lambda_\infty\|_{p(\cdot)}<\infty\Big\},$$
$$\mathcal{D}_{p(\cdot)}=\Big\{f=(f_n):\exists\,\lambda\in\Lambda, |f_n|\leqslant\lambda_{n-1},\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}=\sup_{\lambda\in\Lambda}\|\lambda_\infty\|_{p(\cdot)}<\infty\Big\},$$

这些空间在 $1\leqslant p^-\leqslant p^+<\infty$ 情形都是 Banach 空间, 在 $0<p^-\leqslant p^+<\infty$ 情形是拟 Banach 空间.

关于 σ- 代数序列 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 的停时全体记为 $\mathcal{T}$. 称可测函数 a 是一个 $(1,p,\infty)$ 原子, 如果存在停时 $\tau\in\mathcal{T}$, 使得

(1) $\mathrm{E}(a\mid\Sigma_\tau)=0$, $\forall\, n\leqslant\tau$;

(2) $\|s(a)\|_\infty\leqslant\|\chi_{\tau<\infty}\|^{-1}_{p(\cdot)}$.

将 (2) 中的 $s(a)$ 换为 $S(a)$ 或 Ma, 则分别称其为 $(2,p,\infty)$ 原子或 $(3,p,\infty)$ 原子.

称 σ- 代数序列 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 是正则的[29], 若存在 $R>0$ 使得对于每个与之适应的非负鞅, 成立

$$f_n\leqslant Rf_{n-1},\quad n\geqslant 0.$$

字母 C 总是代表一个常数, C_p 代表仅与 p 有关的常数, 其余类推. 不过它们每一次出现时可能代表不同的值. 记号 $A\lesssim B$ 表示存在 $C>0$ 使得 $A\leqslant CB$, $A\approx B$ 表示 $A\lesssim B$ 并且 $B\lesssim A$.

3 可数生成 σ- 代数情形: Hardy 空间

本节叙述在可数生成 σ- 代数情形下的 Doob 极大不等式、Hardy 空间的原子分解及其应用, 以及各类空间的连续嵌入. 首先, 文献 [23] 证明了弱型极大不等式.

定理 3.1 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, $f=(f_n)$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 有界鞅 $(\sup_{n\geqslant 0}\|f_n\|_{p(\cdot)}<\infty)$, 则

$$\mathrm{P}(Mf>\lambda)\leqslant C_p\int_\Omega\left|\frac{f_\infty}{\lambda}\right|^p d\mathrm{P},\quad \forall\,\lambda>0.$$

相对于可数生成的 σ- 代数, 函数关于它的条件期望具有显式表达. 例如, 设 $\mathcal{F}_n$ 是由至多可数多个原子生成的, 记其原子集合为 $\mathcal{D}_n=\{A_j^n\}_{j\geqslant 1}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(\mathcal{D}_n)$. 此时对于每个可积函数 f, 有

$$\mathrm{E}(f\mid\mathcal{F}_n)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{P}(A_j^n)}\int_{A_j^n}fd\mathrm{P}\right)\chi_{A_j^n}.$$

借助于这一显式表达, 文章给出了强型 Doob 极大算子的有界性估计.

定理 3.2 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), $p^->1,(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ 是可数生成 σ- 代数, 则存在常数 $C_p>0$, 使得

$$\|Mf\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|f\|_{p(\cdot)},\quad \forall\,f=(f_n).$$

条件 (1.3) 在其证明中起到关键作用. 文献 [23] 中关于条件 (1.3) 属性的讨论很有意义.

定理 3.3 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), 则

(1) $\frac{1}{p}$ 满足条件 (1.3);

(2) p' 满足条件 (1.3);

(3) 若 q 也满足条件 (1.3), 则 $p+q$ 满足条件 (1.3);

(4) 若 q 也满足条件 (1.3), $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 则 r 满足条件 (1.3).

定理 3.4 设 $p,q\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), 则

(1) $\mathrm{P}(B)^{\frac{1}{p_B^-}}\approx\mathrm{P}(B)^{\frac{1}{p_B^+}}\approx\|\chi_B\|_{p(\cdot)},\forall\,B\in\Sigma$;

(2) 若 $p^-\geqslant 1$, 则 $\mathrm{P}(B)\approx\|\chi_B\|_{p(\cdot)}\|\chi_B\|_{p'(\cdot)},\forall\,B\in\Sigma$;

(3) 若 $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, 则 $\|\chi_B\|_{r(\cdot)}\approx\|\chi_B\|_{p(\cdot)}\|\chi_B\|_{q(\cdot)},\forall\,B\in\Sigma$.

借助于上述定理和原子分解 (稍后叙述), 文章给出了它的若干应用. 定义变指数有界平均震荡空间 $\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}$ 是满足下面条件的鞅 $f=(f_n)$ 的全体:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}}=\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\frac{\|f-f^{\tau-1}\|_{p(\cdot)}}{\|\chi_{\tau<\infty}\|_{p(\cdot)}}<\infty.$$

定理 3.5 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), $p^-\geqslant 1$, 则存在常数 $C_1,C_2>0$, 使得对任意 $f\in\mathrm{BMO}_1$, 有

$$\|\chi_{\{\tau<\infty\}\bigcap\{f-f^{\tau-1}\geqslant t\}}\|_{p(\cdot)}\leqslant C_1\mathrm{e}^{-\frac{C_2t}{\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}}}\|\chi_{\tau<\infty}\|_{p(\cdot)},\quad\forall\,\tau\in\mathcal{T},\quad t>0.$$

在此基础上, 文献 [23] 证明了著名的 John-Nirenberg 定理的变指数形式.

定理 3.6 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), $p^-\geqslant 1$, 则

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathrm{BMO}_1},\quad\forall\,f=(f_n).$$

设 $\frac{1}{\alpha}\in L^0_+(\Omega)$ 并且 $1\leqslant q<\infty$ 是实数, 定义满足下面条件:

$$\|f\|_{\Lambda_q(\alpha(\cdot))}=\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\frac{\|f-f^\tau\|_q}{\|\chi_{\tau<\infty}\|_{\frac{1}{\alpha(\cdot)}}\|\chi_{\tau<\infty}\|_q}<\infty$$

的 $f\in L_q$ 的集合为 $\Lambda_q(\alpha(\cdot))$. $\Lambda_q(\alpha(\cdot))$ 是变指数的 Lipschitz 鞅空间.

定理 3.7　设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), $p^+\leqslant 1$, 则共轭空间

$$(H^s_{p(\cdot)})^*=\Lambda_2(\alpha(\cdot)),\quad \alpha=\frac{1}{p}-1.$$

事实证明原子分解在变指数情形仍是有力的工具. 设 $p\in\mathcal{P}$, 所谓原子空间 $H^{s,at}_{p(\cdot)}$ 是指满足

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k a^k,\quad \text{a.e.} \tag{3.1}$$

和

$$\mathcal{A}(\{\mu_k\},\{a^k\},\{\tau_k\})=\bigg\|\bigg\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\bigg(\frac{\mu_k\chi_{\tau<\infty}}{\|\chi_{\tau<\infty}\|_{p(\cdot)}}\bigg)^{\underline{p}}\bigg\}^{\frac{1}{\underline{p}}}\bigg\|_{p(\cdot)}<\infty$$

的 $f=(f_n)$ 全体, 其中 a^k 是 $(1,p,\infty)$ 原子, $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一列非负实数, τ_k 是与 a^k 相应的停时, $\mathbb{Z}$ 是全体整数, $\underline{p}=p^-\wedge 1$. 此外,

$$\|f\|_{H^{s,at}_{p(\cdot)}}=\sup\mathcal{A}(\{\mu_k\},\{a^k\},\{\tau_k\}),$$

这里上确界是关于所有满足以上条件的三元组而取的. 文章接着证明了如下定理:

定理 3.8　设 $p\in\mathcal{P}, H^{s,at}_{p(\cdot)}$, a^k 如上, 则

(1) $\|a^k\|_{H^{s,at}_{p(\cdot)}}\leqslant 1$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$;

(2) $\|f\|_{H^{s,at}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}$, $\forall\, f\in H^s_{p(\cdot)}$.

将空间 $H^s_{p(\cdot)}$ 换为空间 $H^S_{p(\cdot)}$ 或者 $H^*_{p(\cdot)}$, $(1,p,\infty)$ 原子相应地换为 $(2,p,\infty)$ 原子或者 $(3,p,\infty)$ 原子, 文献 [24,25] 分别得到了关于空间 $H^S_{p(\cdot)}$ 和 $H^*_{p(\cdot)}$ 的类似原子空间和相应的原子分解定理. 这里不再引述.

所谓 $f=(f_n)$ 的 α 阶分数次积分是指鞅变换 $I_\alpha f=((I_\alpha f)_n)_{n\geqslant 0}$, 其中 $\alpha>0$ 是某个常数,

$$(I_\alpha f)_0=f_0,\quad (I_\alpha f)_n=\sum_{k=1}^n b^\alpha_{k-1}d_kf,\quad n\geqslant 1.$$

其中 b_k 关于 Σ_k 可测, 若 B 是 Σ_k 中的原子, 则 $b_k(\omega)=\mathrm{P}(B)$, $\forall\,\omega\in B$.

在正则性条件下, 借助于原子分解, 文献 [24,25] 分别证明了鞅的分数次积分的有界性.

定理 3.9　设 $p,q\in\mathcal{P}$ 都满足条件 (1.3), $p<q$, $\alpha\geqslant\sup_{\omega\in\Omega}(\frac{1}{p(\omega)}-\frac{1}{q(\omega)})$, $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 是正则的, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{Q}_{q(\cdot)}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{Q}_{q(\cdot)}},\quad \forall\, f=(f_n).$$

定理 3.10　设 $p,q\in\mathcal{P}$ 都满足条件 (1.3), $p^+\leqslant 1\leqslant q^-$, $\alpha\geqslant\sup_{\omega\in\Omega}(\frac{1}{p(\omega)}-\frac{1}{q(\omega)})$, $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 是正则的, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{D}_{q(\cdot)}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_{q(\cdot)}},\quad \forall\, f=(f_n).$$

称算子 $T:X\to Y$ 是 σ- 次可加的, 其中 X 是鞅空间, Y 是可测函数空间, 如果

$$\left|T\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|T(f_k)|,\quad |T(\alpha f)|=|\alpha||T(f)|,\quad \forall\,\alpha.$$

由原子分解可得到次可加算子的有界性, 文献 [30] 进而得到了几类 Hardy 空间的相互嵌入关系.

定理 3.11 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), $1<r<\infty$, $p^+<r$, 若 $T:H_r^s\to L_r$ 是有界 σ- 次可加的, 并且对于每个 $(1,p,\infty)$ 原子 a, 有 $T(a)\chi_F=T(a\chi_F)$, $\forall\,F\in\Sigma_\tau$, 则

$$\|T(f)\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}},\quad \forall\,f=(f_n)\in H^s_{p(\cdot)}.$$

定理 3.12 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足条件 (1.3), 则对于任意 $f=(f_n)$, 有

$$\begin{aligned}&\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}},\quad \|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}},\quad 0<p^-\leqslant p^+\leqslant 2,\\&\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}},\quad \|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\\&\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\quad \|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}},\\&\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}.\end{aligned}$$

如果 $(\Sigma_n)_{n\geqslant0}$ 是正则的, 则 5 类空间都是等价的:

$$\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}.$$

4 一般 σ- 代数情形: B-G-D 不等式

文献 [26] 通过指数逼近的方法推广了关于随机序列的 Dellacherie 定理, 从而得到了一般 σ- 代数情形下 B-G-D 不等式及其他几个重要不等式的变指数类比.

引理 4.1 设 $p\in\mathcal{P}$, 则存在单调增加的适应简单函数序列 p_n, $p^-\leqslant p_n$, $p_n\to p$, a.e.

下面是经典鞅论中 Dellacherie 定理的变指数化.

定理 4.1 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant1, v$ 是非负随机变量, $(u_n)_{n\geqslant0}$ 是非负单调增加适应序列 $(u_0=0)$, 满足

$$\mathrm{E}(u_\infty-u_{n-1}\mid\Sigma_n)\leqslant\mathrm{E}(v\mid\Sigma_n),\quad \forall\,n\geqslant0,$$

或者当 $(u_n)_{n\geqslant0}$ 还是可料序列时,

$$\mathrm{E}(u_\infty-u_n\mid\Sigma_n)\leqslant\mathrm{E}(v\mid\Sigma_n),\quad \forall\,n\geqslant0,$$

则存在 $C=C_p>0$ 使得

(1) $\mathrm{E}u_\infty^p\leqslant p^+\mathrm{E}vu_\infty^{p-1}$;

(2) $\rho_{p(\cdot)}(u_\infty)\leqslant C\rho_{p(\cdot)}(v)$;

(3) $\|u_\infty\|_{p(\cdot)}\leqslant C\|v\|_{p(\cdot)}$, 若 $v\in L_{p(\cdot)}$.

由此定理首先可以得到两个引理, 其中引理 4.3 是变指数的凸性引理. 在经典鞅论中, 凸性引理是时常用到的.

引理 4.2　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1,(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ 是任一非负随机变量序列, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$\bigg\|\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{E}(\xi_n\mid\Sigma_n)\bigg\|_{p(\cdot)}\leqslant\bigg\|\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\bigg\|_{p(\cdot)}.$$

引理 4.3　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 2$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$\|s(f)\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|S(f)\|_{p(\cdot)},\quad\forall f=(f_n).$$

其次, 可以证明著名的 B-G-D 不等式的变指数类比.

定理 4.2　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$C_p^{-1}\|Mf\|_{p(\cdot)}\leqslant\|S(f)\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|Mf\|_{p(\cdot)},\quad\forall f=(f_n).$$

进一步地可以证明下面变指数的 Chevalier 不等式, 它可以看成 B-G-D 不等式的延伸与深化. 对于鞅 $f=(f_n)$, 记

$$\overline{M}f=Mf\vee S(f),\quad\underline{m}(f)=Mf\wedge S(f).$$

定理 4.3　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$\|\overline{M}(f)\|_{p(\cdot)}\leqslant C_p\|\underline{m}(f)\|_{p(\cdot)},\quad\forall f=(f_n).$$

关于可料控制的两类变指数空间 $\mathcal{Q}_{p(\cdot)}$ 和 $\mathcal{D}_{p(\cdot)}$, 像经典情形一样可以证明它们是彼此范数等价的. 为此引进 (变差有界) 空间

$$\mathcal{A}_{p(\cdot)}=\bigg\{f=(f_n);\|f\|_{\mathcal{A}_{p(\cdot)}}=\bigg\|\sum_{n=0}^{\infty}|df_n|\bigg\|_{p(\cdot)}<\infty\bigg\}.$$

定理 4.4　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}},\quad\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\quad\forall f=(f_n).$$

定理 4.5　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则

(1) 对于每个 $f=(f_n)\in H^S_{p(\cdot)}$, 存在分解 $f=g+h$, $g\in\mathcal{Q}_{p(\cdot)}$, $h\in\mathcal{A}_{p(\cdot)}$, 使得

$$\|g\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}},\quad\|h\|_{\mathcal{A}_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}};$$

(2) 对于每个 $f=(f_n)\in H^*_{p(\cdot)}$, 存在分解 $f=g+h$, $g\in\mathcal{D}_{p(\cdot)}$, $h\in\mathcal{A}_{p(\cdot)}$, 使得

$$\|g\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}},\quad\|h\|_{\mathcal{A}_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}.$$

在此基础上可以得到上面所说的等价性及相关结果.

定理 4.6　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$C_p^{-1}\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}\leqslant\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\quad\forall f=(f_n).$$

定理 4.7　设 $p\in\mathcal{P}$, $p^-\geqslant 1$, 则存在 $C_p>0$ 使得

$$\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\quad\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}\leqslant C_p\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\quad\forall f=(f_n)\quad(f_0=0).$$

如果 σ- 代数序列 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 是正则的, 那么 5 种变指数鞅空间 $H^*_{p(\cdot)}$、$H^S_{p(\cdot)}$、$H^s_{p(\cdot)}$、$\mathcal{D}_{p(\cdot)}$ 和 $\mathcal{Q}_{p(\cdot)}$ 都是彼此范数等价的:

$$\|f\|_{H^*_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{H^S_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{H^s_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot)}}.$$

5 一般 σ- 代数情形: Doob 极大不等式

设 $p \in \mathcal{P}$, 如果每个 Σ_n 都不包含原子, 而条件 (1.3) 对于每个 $A \in \Sigma$ 都成立, 则 p 一定是一个常数. 如此一来, 变指数空间的问题就返回到经典情形. 加上在非原子情形, 条件期望没有方便可用的显式表达, 所以可数生成 σ- 代数情形所使用的方法在一般 σ- 代数情形不再能用, 为了研究一般 σ- 代数情形变指数鞅的问题就须另找出路. 事实表明, 它们处理起来要复杂一些. 特别是关于 Doob 极大不等式, 至今没有令人满意的结果. 本节叙述在文献 [27] 中关于它的若干初步结论.

下面先来叙述关于变指数鞅的范数收敛定理. 回顾一个函数族 $B = \{u\}$ 称为一致可积的, 若

$$\lim_{C \to +\infty} \sup_{u \in B} \int_{\{|u|>C\}} |u| d\mathrm{P} = 0.$$

定理 5.1 设 $p \in \mathcal{P}$, $p^- \geqslant 1$, $f = (f_n)$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 中的鞅, 则下面条件等价:

(1) $\{|f_n|^p, n \geqslant 0\}$ 是一致可积的;

(2) $\rho_{p(\cdot)}(f_n) \to \rho_{p(\cdot)}(f_\infty)$;

(3) $\|f_n\|_{p(\cdot)} \to \|f_\infty\|_{p(\cdot)}$;

(4) $\|f_n - f_\infty\|_{p(\cdot)} \to 0$.

下面是弱型 Doob 极大不等式, 它的好处是明确了不等式中的最优系数.

定理 5.2 设 $p \in \mathcal{P}$, $p^- \geqslant 1$, 则不等式

$$\mathrm{P}(Mf > \lambda) \leqslant \frac{p^+}{p^-} \int_{\{Mf>\lambda\}} \left| \frac{f_\infty}{\lambda} \right|^p d\mathrm{P}$$

对于每个一致可积并且 $L_{p(\cdot)}$ 有界鞅或非负下鞅成立.

仍记关于 $(\Sigma_n)_{n \geqslant 0}$ 的停时全体为 $\mathcal{T}$. 当 $\tau \in \mathcal{T}$ 时, 记关于 τ 的条件期望为 E_τ, 当 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ 满足条件 (1.4) 时, 称 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界的. 下面定理关系到这种一致有界条件的某些属性.

定理 5.3 设 $p \in \mathcal{P}$, $p^- \geqslant 1, (\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}} L_{p(\cdot)}$ 一致有界, 则

(1) $\forall\, g \in L_{p(\cdot)}$, $g_n = \mathrm{E}(g \mid \Sigma_n)$ 以 $L_{p(\cdot)}$ 范数收敛于 g;

(2) $\forall\, s > 1, (\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ 同样是 $L_{sp(\cdot)}$ 一致有界的;

(3) $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界的当且仅当它是 $L_{p'(\cdot)}$ 一致有界的.

设 $A \in \Sigma$, 记 $|A| = \mathrm{P}(A)$, 对于 $A \in \Sigma$, $|A| > 0$, 定义平均算子

$$T_A : L^1 \to L^1, \quad T(A) = \frac{1}{|A|} \int_A u d\mathrm{P} \chi_A, \quad \forall\, u \in L^1.$$

考虑另一类弱型 Doob 极大不等式 (定理 5.4(2)), 在经典情形下, 它是至为明显的; 而在变指数情形, 事情就不那么简单了.

定理 5.4 设 $p \in \mathcal{P}$, $p^- \geqslant 1$, 则对于下面条件, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) 成立.

(1) $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}} L_{p(\cdot)}$ 一致有界;

(2) 存在 $C_p > 0$ 使得对于每个一致可积的 $L_{p(\cdot)}$ 有界鞅 $f = (f_n)$,

$$\|Mf\|_{\omega L_{p(\cdot)}} \leqslant C_p \|f_\infty\|_{p(\cdot)}; \tag{5.1}$$

(3) 平均算子族 $\{T_A; A \in \Sigma\}$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界的: 存在 $C_p > 0$ 使得

$$\sup_{A \in \Sigma} \|T_A u\|_{p(\cdot)} \leqslant C_p \|u\|_{p(\cdot)}, \quad \forall\, u \in L_{p(\cdot)};$$

(4) $\forall\, A \in \Sigma$, $|A| \approx \|\chi_A\|_{p(\cdot)} \|\chi_A\|_{p'(\cdot)}$.

关于强型极大不等式, 首先应用 Rubio de Francia 迭代算法并通过逆向 Hölder 不等式将 $L_{p(\cdot)}$ 的每个元转化为一个 A_1 权, 其思路来自变指数函数空间的情形 (参见文献 [12]). 然后可以证明下面的定理.

定理 5.5 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^->1$, 则对于下面条件, (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) 成立, 若 $(\Sigma_n)_{n\geqslant 0}$ 还是正则的, 三者彼此等价.

(1) Doob 极大算子 $ML_{p(\cdot)}$ 有界;

(2) $\forall\, s>1, ML_{sp(\cdot)}$ 有界;

(3) 存在 r_0 ($\frac{1}{p^-}<r_0<1$) 使得 M 是 $L_{rp(\cdot)}$ 有界的 ($r_0<r<1$).

现在转到强极大算子本身. 由定理 5.4, 特别是 (5.1), 借助于文献 [28] 中的方法, 得到下面的定理:

定理 5.6 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^->1$, r 是实数, $1<r<p^-$, 定义

$$|||u|||=\sup_{0<|A|\leqslant 1}|A|^{\frac{1}{p^-}}\left(\frac{1}{|A|}\int_A|u|^r d\mathrm{P}\right)^{\frac{1}{r}},$$

则 $|||u|||$ 是 $\omega L_{p(\cdot)}$ 上的完备范数, 并且存在 $C_p>0$ 使得

$$|||u|||\leqslant C_p\|u\|_{\omega L_{p(\cdot)}},\quad \forall\, u\in\omega L_{p(\cdot)}.$$

类似地可以证明下面的定理:

定理 5.7 设 $p\in\mathcal{P}$, $p^->1$, 则对于任何实数 ε ($\frac{1}{p^-}<\varepsilon<1$), 存在 $C_{p,\varepsilon}>0$ 使得

$$\|u\|_{\varepsilon p(\cdot)}\leqslant C_{p,\varepsilon}\|u\|_{\omega L_{p(\cdot)}},\quad \forall\, u\in\omega L_{p(\cdot)}.$$

若 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ 是 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界的, 则存在 $C_{p,\varepsilon}>0$ 使得

$$\|Mf\|_{\varepsilon p(\cdot)}\leqslant C_{p,\varepsilon}\|f_\infty\|_{p(\cdot)},\quad \forall\, f=(f_n).$$

6 变指数 Lorentz-Hardy 空间及其应用

文献 [30] 研究了在可数生成 σ- 代数情形下变指数的 Lorentz-Hardy 鞅空间, 并且给出了它们在二进 Fourier 分析中的应用.

设 $p\in\mathcal{P}$, $0<q<\infty$ 为常数, 变指数的 Lorentz 空间 $L_{p(\cdot),q}$ 是满足下面条件的可测函数全体:

$$\|u\|_{L_{p(\cdot),q}}=\left(\int_0^\infty\lambda^q\|\chi_{|u|>\lambda}\|_{p(\cdot)}^q\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty,$$

此外, 定义 $L_{p(\cdot),\infty}=\omega L_{p(\cdot)}$. 有时候应用等价范数是方便的:

$$\|u\|_{L_{p(\cdot),q}}\approx\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{kq}\|\chi_{|u|>2^k}\|_{p(\cdot)}^q\right)^{\frac{1}{q}},\quad \|u\|_{L_{p(\cdot),\infty}}\approx\sup_{k\in\mathbb{Z}}2^k\|\chi_{|u|>2^k}\|_{p(\cdot)}.$$

利用这种范数, 如同在第 2 节所做的那样, 对于 $p\in\mathcal{P}$, $0<q\leqslant\infty$ 可以定义鞅空间 $L_{p(\cdot),q}$、$H_{p(\cdot),q}^*$、$H_{p(\cdot),q}^S$、$H_{p(\cdot),q}^s$ 与可料控制鞅空间 $\mathcal{Q}_{p(\cdot),q}$、$\mathcal{D}_{p(\cdot),q}$ 及 (d,p,q) 原子, 其中 $d=1,2,3$. 现在再定义 $H_{p(\cdot),q}^{at,d,\infty}$

是满足 (3.1) 的鞅 $f=(f_n)$ 的全体, 其中 a^k 是 (d,p,q) 原子, $\mu_k=3\cdot 2^k\|\chi_{\tau_k<\infty}\|_{p(\cdot)}, \tau_k$ 是与 a^k 相应的停时, 并且

$$\|f\|_{H^{at,d,\infty}_{p(\cdot),q}}=\inf\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{kq}\|\chi_{\tau_k<\infty}\|^q_{p(\cdot)}\right)^{\frac{1}{q}}\approx\|(\mu_k)_{k\in z}\|_{\ell_q},$$

这里下确界是关于所有如此的原子分解而取的. 文献 [30] 证明了如下定理:

定理 6.1 设 $p\in\mathcal{P}$, $0<q\leqslant\infty$, 则在等价范数意义下,

$$H^s_{p(\cdot),q}=H^{at,1,\infty}_{p(\cdot),q},\quad \mathcal{Q}_{p(\cdot),q}=H^{at,2,\infty}_{p(\cdot),q},\quad \mathcal{D}_{p(\cdot),q}=H^{at,3,\infty}_{p(\cdot),q}.$$

定理 6.2 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足 (1.3), $0<q\leqslant\infty$, 如果 (Σ_n) 还是正则的, 则在等价拟范数意义下,

$$H^S_{p(\cdot),q}=H^{at,2,\infty}_{p(\cdot),q},\quad H^*_{p(\cdot),q}=H^{at,3,\infty}_{p(\cdot),q}.$$

定理 6.3 设 $p\in\mathcal{P}$ 满足 (1.3), $0<q\leqslant\infty$, 则存在 $C=C_{p,q}>0$ 使得对于任何 $f=(f_n)$, 有

$$\begin{aligned}
&\|f\|_{H^*_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{H^s_{p(\cdot),q}},\quad \|f\|_{H^S_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{H^s_{p(\cdot),q}},\quad \text{若 } 0<p^-\leqslant p^+\leqslant 2,\\
&\|f\|_{H^*_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot),q}},\quad \|f\|_{H^S_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot)}},\\
&\|f\|_{H^s_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot),q}},\quad \|f\|_{H^s_{p(\cdot),q}}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot),q}},\\
&\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot),q}}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot),q}}.
\end{aligned}$$

如果 (Σ_n) 还是正则的, 则在等价拟范数意义下,

$$\|f\|_{H^*_{p(\cdot),q}}\approx\|f\|_{\mathcal{D}_{p(\cdot),q}}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_{p(\cdot),q}}\approx\|f\|_{H^s_{p(\cdot),q}}\approx\|f\|_{H^S_{p(\cdot),q}}.$$

将变指数鞅的方法应用于二进 Fourier 分析是非常有意义的事情, 它大大扩展了经典情形的结果. 众所周知, 二进调和分析在信号处理等实践领域有着重要应用. 这里仅提及若干主要结果. 下面先来介绍 Walsh-Dirichlet 核与 Walsh-Fejer 核等概念和记号.

设 $\Omega=[0,1), I_{k,n}=[k2^{-n},(k+1)2^{-n})$ 是二进区间, $0\leqslant k<2^n$, $n\geqslant 1$. n 固定时, 由 2^n 个 $I_{k,n}$ 生成的 σ- 代数记为 $\mathcal{F}_n$. 设 $r(x)=\chi_{[0,2^{-1})}-\chi_{[2^{-1},1)}$ 是 Rademacher 函数, $r_n(x)=r(2^nx)$. Walsh 函数系是

$$\omega_n=\prod_{k=1}^{\infty}r_k^{n_k},\quad \text{若 } n=\sum_{k=0}^{\infty}n_k2^k,\quad n_k=0,1,\quad n\geqslant 1.$$

Walsh-Dirichlet 核和 Walsh-Fejer 核分别是

$$D_n=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k,\quad K_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_k,\quad n\in\mathbb{N}.$$

设 $f\in L^1$, $\hat{f}(n)=\mathrm{E}f\omega_n$ 是 f 的第 n 个 Walsh-Fourier 系数, 相应级数的部分和及 Fejer 平均是

$$s_nf=\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}(n)\omega_k,\quad \sigma_nf=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}s_k(f).$$

即

$$s_n f(x) = \int_0^1 f(t) D_n(x \dot{+} t) dt, \quad \sigma_n f(x) = \int_0^1 f(t) K_n(x \dot{+} t) dt, \quad n \geqslant 1,$$

其中加法是指二进加法. 容易验证 $s_{2^n} f = f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_n)$, 它表达了 Fourier 级数的部分和与二进鞅之间的关系.

定理 6.4　设 $p \in \mathcal{P}$ 满足 (1.3), $1 < p^- \leqslant p^+ < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, 则存在 C_p $(C_{p,q}) > 0$ 使得

$$\sup_{n \geqslant 1} \|s_n f\|_{p(\cdot)} \leqslant C_p \|f\|_{p(\cdot)} \quad \Big(\sup_{n \geqslant 1} \|s_n f\|_{p(\cdot),q} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{p(\cdot),q}\Big), \quad \forall f \in L_{p(\cdot)} \ (L_{p(\cdot),q}).$$

从而对于每个 $f \in L_{p(\cdot)}$ $(L_{p(\cdot),q})$, $s_n f$ 点态地并且以 $L_{p(\cdot)}(L_{p(\cdot),q})$ 范数收敛于 f.

文献 [30] 还研究了某些算子的有界性. 注意二进 σ- 代数序列是典型的正则 σ- 代数序列, 正像上面有关定理所断言的, 在最终的结果中, 5 类空间都是等价的. 所以只需用 $H_{p(\cdot)}$ 或 $H_{p(\cdot),q}$ 代表各自 5 类空间的任何一类.

设 $f \in L^1$, $f_n = \mathrm{E}(f \mid \mathcal{F}_n)$, $0 < s < \infty$, 定义

$$U_s f(x) = \sup_{n \geqslant 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \chi_{I_{k,n}}(x) \sum_{j=0}^{n-1} 2^{(j-n)s} \bigg| \frac{1}{\mathrm{P}(I_{k,n}^j)} \int_{I_{k,n}^j} f_n d\mathrm{P} \bigg|,$$

其中 $I_{k,n}^j = I_{k,n} \dot{+} 2^{-j-1}$.

定理 6.5　设 $p \in \mathcal{P}$ 满足 (1.3), $0 < q \leqslant \infty$, $0 < s < \infty$. 如果 $\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} < s$, 则存在 C_p $(C_{p,q}) > 0$ 使得

$$\|U_s f\|_{p(\cdot)} \leqslant C_p \|f\|_{p(\cdot)} \quad (\|U_s f\|_{p(\cdot),q} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{p(\cdot),q}), \quad \forall f \in L_{p(\cdot)} \ (L_{p(\cdot),q}).$$

若 $0 < \alpha, s < \infty$, 定义

$$V_{\alpha,s} f(x) = \sup_{n \geqslant 1} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \chi_{I_{k,n}}(x) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} 2^{(j-n)\alpha} 2^{(j-i)s} \bigg| \frac{1}{\mathrm{P}(I_{k,n}^{j,i})} \int_{I_{k,n}^{j,i}} f_n d\mathrm{P} \bigg|,$$

其中 $I_{k,n}^{j,i} = I_{k,n} \dot{+} [2^{-j-1}, 2^{-j-1} \dot{+} 2^{-i})$. 文章类似地证明了

定理 6.6　设 $p \in \mathcal{P}$ 满足 (1.3), $0 < q \leqslant \infty$, $0 < \alpha$, $s < \infty$. 如果 $\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} < \alpha + s$, 则存在 C_p $(C_{p,q}) > 0$ 使得

$$\|V_{\alpha,s} f\|_{p(\cdot)} \leqslant C_p \|f\|_{p(\cdot)} \quad (\|V_{\alpha,s} f\|_{p(\cdot),q} \leqslant C_{p,q} \|f\|_{p(\cdot),q}), \quad \forall f \in L_{p(\cdot)} \ (L_{p(\cdot),q}).$$

对于 Fejer 平均极大算子 $\sigma_* f = \sup_{n \geqslant 1} |\sigma_n f|$, 文章还证明了

定理 6.7　设 $p \in \mathcal{P}$ 满足 (1.3), $0 < q \leqslant \infty$. 如果 $\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} < 1$, $\frac{1}{2} < p^- < \infty$, 则存在 C_p $(C_{p,q}) > 0$ 使得

$$\|\sigma_* f\|_{p(\cdot)} \leqslant C_p \|f\|_{H_{p(\cdot)}} \quad (\|\sigma_* f\|_{p(\cdot),q}) \leqslant C_{p,q} \|f\|_{H_{p(\cdot),q}}), \quad \forall f \in H_{p(\cdot)} \ (H_{p(\cdot),q}).$$

此时对于每个 $f \in H_{p(\cdot)}$ $(H_{p(\cdot),q})$, $\sigma_n f$ 几乎处处并且以空间范数收敛, 若 $p^- \geqslant 1$, 则 $\sigma_n f \to f$, a.e.

7 Musielak-Orlicz 空间

文献 [31, 32] 研究了 Musielak-Orlicz 鞅空间. 此类空间不仅是一种颇具广泛性的空间形式, 而且其定义方式又把加权与非加权空间的表述统一起来. 为此文章引入了新概念, 使用了新方法. 由于篇幅所限, 这里仅就强型空间的有关结果加以介绍.

函数 $\varphi : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 称为 Musielak-Orlicz 函数, 如果

(1) $\forall \omega \in \Omega$, $\varphi(\omega,\cdot) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是 Orlicz 函数, 非降, $\varphi(\omega,0)=0$, $\varphi(\omega,t)\to\infty$ $(t\to\infty)$;

(2) $\forall t \in [0,\infty)$, $\varphi(\cdot,t)$ 是 Σ 可测函数.

Musielak-Orlicz 空间 $L^{\varphi}(\Omega)$ 是使下面数值有限的可测函数的全体:

$$\|u\|_{L^{\varphi}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda \in (0,\infty); \int_{\Omega} \varphi\left(\omega, \frac{|u(\omega)|}{\lambda}\right) d\mathrm{P} \leqslant 1\right\}.$$

如果 $f=(f_n)$ 是鞅, 应用 $L^{\varphi}(\Omega)$ 范数, 像以前所做的那样可以定义 Musielak-Orlicz 鞅空间 $L^{\varphi}(\Omega)$、Musielak-Orlicz Hardy 鞅空间 $H^*_{\varphi}(\Omega)$、$H^S_{\varphi}(\Omega)$、$H^s_{\varphi}(\Omega)$ 以及可料控制鞅空间 $\mathcal{Q}_{\varphi}(\Omega)$ 和 $\mathcal{D}_{\varphi}(\Omega)$, 这里不再复述.

若 $\varphi \in L^1(\Omega)$ 是严格正的, 对任意的 $t\in[0,\infty)$, 由 $\varphi(\cdot,t)$ 生成的鞅仍记为 $\varphi(\cdot,t) := (\varphi_n(\cdot,t))_{n\geqslant 0}$, 它可以看成一个特别的权, 称其满足一致 $A_p(\Omega)$ 条件, 若对于 $p>1$ 和 $p=1$ 分别有

$$\sup_{0<t<\infty} \varphi_n(\cdot,t)\{\mathrm{E}_n([\varphi(\cdot,t)]^{-\frac{1}{p-1}})\}^{p-1} \leqslant K, \quad \sup_{0<t<\infty} \varphi_n(\cdot,t)\varphi(\cdot,t)^{-1} \leqslant K,$$

其中 K 是常数. 记 $A_\infty(\Omega)=\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p(\Omega)$. 类似地像经典情形一样定义关于权的 S、S^+ 和 S^- 条件.

对于正实数 p, 若不等式

$$\varphi(\omega,st) \leqslant C_p s^p \varphi(\omega,t), \quad \omega\in\Omega, \quad t\in[0,\infty)$$

成立, 当 $s\in(0,1)$ 时就称 φ 是 p 一致下型的, 当 $s\in[1,\infty)$ 时就称 φ 是 p 一致上型的.

称 φ 是一个增长函数, 如果 (1) φ 是 Musielak-Orlicz 函数; (2) $\varphi\in A_\infty(\Omega)$; (3) φ 是 p $(0<p<1)$ 一致下型和 1 一致上型的. 称 φ 满足逆向 Hölder 条件 ($\varphi \in RH_q(\Omega), 1<q<\infty$), 若

$$\sup_{0<q<\infty} \sup_{\omega\in\Omega} (\mathrm{E}_n[\varphi(\omega,t)]^q)^{\frac{1}{q}} [\varphi_n(\omega,t)]^{-1} < \infty.$$

为了得到空间的原子特征, 若 $B\in\Sigma$, 记 $\varphi(B,t) := \int_B \varphi(\omega,t)d\mathrm{P}$, $\forall t\in[0,\infty)$. 给定 $1\leqslant q<\infty$, 定义 $L^q_{\varphi}(B)$ 是支撑在 B 的满足如下条件的可测函数全体:

$$\|u\|_{L^q_{\varphi}(B)} = \sup_{0<t<\infty}\left[\frac{1}{\varphi(B,t)}\int_B |u(\omega)|^q \varphi(\omega,t)d\mathrm{P}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

此外 $\|u\|_{L^\infty_{\varphi}(B)} = \|u\|_{L^\infty(B)}$. 为了保持与本文前面记号的一致性 (见第 2 节末), 这里称一个可测函数 a 为 (d,φ,q) 原子, $d=1,2,3$, 如果将原子定义中的条件 (2) 分别换为下面条件成立:

$$\|s(a)\|_{L^q_{\varphi}(\{\tau<\infty\})} (\|S(a)\|_{L^q_{\varphi}(\{\tau<\infty\})}, \|a^*\|_{L^q_{\varphi}(\{\tau<\infty\})}) \leqslant \|\chi_{\tau<\infty}\|^{-1}_{L^{\varphi}(\Omega)}.$$

记 $\mathcal{A}(1,\varphi,q)$ 是满足

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(B_{\tau_k}, \mu_k \|s(a^k)\|_{L^q_{\varphi}(B_{\tau_k})}) < \infty$$

的三元组 $\{\mu_k, a^k, \tau_k\}$ 的全体, 其中 a^k 是 $(1,\varphi,q)$ 原子, τ_k 是与 a^k 相应的停时, $B_{\tau_k}=\{\tau_k<\infty\}$, μ_k 是一列正实数. 再令

$$\Lambda_q^s(\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}})=\inf\left\{\lambda>0; \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(B_{\tau_k}, \frac{\mu_k\|s(a^k)\|_{L_\varphi^q(B_{\tau_k})}}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\}.$$

若将其中的 $(1,\varphi,q)$ 原子换为 $(2,\varphi,q)$ 原子或者 $(3,\varphi,q)$ 原子, 又可得到 $\mathcal{A}(2,\varphi,q)$ 和 $\mathcal{A}(3,\varphi,q)$ 并进而得到 $\Lambda_q^S(\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ 和 $\Lambda_q^*(\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}})$, 这里不予详述. 现在叙述文献 [31] 的主要结论如下:

定理 7.1　设 φ 是增长函数, $0<q\leqslant\infty$, 则存在 $C>0$ 使得对于每个 $f=(f_n)\in H_\varphi^s(\Omega)$ 都有一列三元组 $\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足 (3.1), 并且

$$\Lambda_q^s(\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}})\leqslant C\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)}.$$

反过来, 如果 $f=(f_n)$ 有如 (3.1) 的分解, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)}\leqslant C\inf\Lambda_q^s(\{\mu_k, a^k, \tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}). \tag{7.1}$$

此处下确界是关于 $\mathcal{A}(1,\varphi,q)$ 中的所有原子分解而取的. 事实上, (3.1) 中的式子还是依 $H_\varphi^s(\Omega)$ 的范数收敛的.

定理 7.2　设 φ 是增长函数, 若将定理 7.1 中的空间 $H_\varphi^s(\Omega)$ 和原子 $\mathcal{A}(1,\varphi,q)$ 换为空间 $\mathcal{Q}_\varphi(\Omega)$ 和原子 $\mathcal{A}(2,\varphi,q)$ 或者空间 $\mathcal{D}_\varphi(\Omega)$ 和原子 $\mathcal{A}(3,\varphi,q)$, 则类似的结论仍成立. 事实上, 相应的 (3.1) 依各自空间的范数收敛.

对于空间 $H_\varphi^S(\Omega)$ 和 $H_\varphi^*(\Omega)$, 文章也有讨论, 事实上对于它们, 类似于 (7.1) 的单边不等式成立.

利用上面定义的特别的权函数, 现在可以讨论几类鞅空间之间的嵌入关系.

定理 7.3　设 φ 是增长函数.

(1) 若 $\varphi\in A_\infty(\Omega)\cap S$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{H_\varphi^*(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)},\quad \forall f=(f_n).$$

(2) 若 $\varphi\in S^+$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{H_\varphi^S(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)},\quad \forall f=(f_n).$$

(3) 若 $\varphi\in S^-$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{Q}_\varphi(\Omega)},\quad \forall f=(f_n).$$

(4) 若 $\varphi\in A_\infty(\Omega)\cap S^-$, 则存在 $C>0$ 使得

$$\|f\|_{H_\varphi^s(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{D}_\varphi(\Omega)},\quad \forall f=(f_n).$$

(5) 若 $\varphi\in A_\infty(\Omega)\cap S$, 则

$$\|f\|_{\mathcal{D}_\varphi(\Omega)}\approx\|f\|_{\mathcal{Q}_\varphi(\Omega)},\quad \forall f=(f_n).$$

从而, $\mathcal{D}_\varphi(\Omega)=\mathcal{Q}_\varphi(\Omega)\subset H_\varphi^s(\Omega)\subset H_\varphi^S(\Omega)\cap H_\varphi^*(\Omega)$.

文章还给出了 $H^s_\varphi(\Omega)$ 的共轭空间. 为此先定义 Musielak-Orlicz 鞅空间 $\mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)$. 设 φ 既是 Musielak-Orlicz 函数又是特别权, 令 $\mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)$ 是满足如下条件:

$$\|f\|_{H^s_\varphi(\Omega)} = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \frac{1}{\|\chi_{\tau<\infty}\|_{L_\varphi(\Omega)}} \left\{ \int_\Omega \frac{|f(\omega)-f^\tau(\omega)|^2}{\varphi^\tau(\omega, \|\chi_{\tau<\infty}\|^{-1}_{L_\varphi(\Omega)})} d\mathrm{P} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

的鞅 $f=(f_n)$ 的全体, 其中 $f^\tau=(f_{\tau\wedge n})$ 是在 τ 停止的鞅. 又记加权空间 $L^2(\Omega,\varphi(\cdot,1))$ 是满足如下条件的可测函数全体:

$$\|f\|_{L^2(\Omega,\varphi(\cdot,1))} = \left\{ \int_\Omega |f(\omega)|^2 \varphi(\omega,1) d\mathrm{P} \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

如此, 则 $H^s_\varphi(\Omega)$ 的共轭空间是 $\mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)$. 具体表述如下:

定理 7.4 设 φ 是增长函数并且作为特别权, $\varphi \in RH_2(\Omega)\cap S$, 则

(1) 每个 $g\in \mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)$ 可以通过线性映射

$$L_g: f \to L_g(f) = \int_\Omega f(\omega) g(\omega) d\mathrm{P}, \quad \forall f \in L^2(\Omega,\varphi(\cdot,1)) \tag{7.2}$$

延拓为 $(H^s_\varphi(\Omega))^*$ 中的元, 并且存在与 g 无关的常数 $C>0$ 使得

$$\|L_g\|_{(H^s_\varphi(\Omega))^*} \leqslant C\|g\|_{\mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)};$$

(2) 反过来, 对于 $H^s_\varphi(\Omega)$ 上的每个连续线性泛函 L, 存在唯一的 $g\in \mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)$ 使得 $L=L_g$ 满足 (7.2), 并且存在与 L 无关的常数 $C>0$ 使得

$$\|g\|_{\mathrm{BMO}_\varphi(\Omega)} \leqslant C\|L\|_{(H^s_\varphi(\Omega))^*}.$$

8 公开问题

实际上, 某些关于函数空间 $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上至今未解的问题也可以就变指数鞅的情形提出来. 这里我们再提出几个在变指数鞅空间研究中的公开问题.

(1) 首先是在一般 σ- 代数情形下 Doob 极大不等式成立的条件. 文献 [27] 提出了一个条件 (1.4), 即条件期望族 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ 的 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界性, 它能保证某种弱型 Doob 极大不等式成立, 但在不附加其他条件的情形下就连 $L_{p(\cdot)} \to L_{p(\cdot)}$ 有界性仍是未经证明的. 鉴于 Doob 极大不等式在鞅论中的重要地位, 有必要弄清楚究竟保证 Doob 极大不等式成立的恰当条件是什么?

(2) 与此不无关系的是, 什么样的 p 能够保证条件期望算子族 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ 的 $L_{p(\cdot)}$ 一致有界性? 我们知道, 当 p 为常数时, 每个条件期望都是压缩的, 一致有界性当然不成问题. 当 p 至少取两个不同的值时, 情形变得复杂起来. 但从文献 [23] 的结论可以肯定, 常数并非是使得 $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}} L_{p(\cdot)}$ 一致有界的唯一条件. 于是解决这一问题就成为有意义的事情. 其实, $(\mathrm{E}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}} L_{p(\cdot)}$ 一致有界与 $(\mathrm{E}_n)_{n\geqslant 0} L_{p(\cdot)}$ 一致有界是否等价也尚属未知.

(3) 正如文献 [31] 所指出的, 文中所定义的 Musielak-Orlicz 鞅空间与此前所叙述的变指数鞅空间互不包含. 该文的成功深刻依赖于其所定义的特别权及 A_p 权的技巧. 由此一个问题出现了: 能否适当扩大此类鞅空间, 使其包含变指数鞅空间. 换句话说, 能否使变指数鞅的研究统一在更广泛的 Musielak-Orlicz 鞅空间的研究之中.

(4) 定理 5.5 说明, 若 Doob 极大算子 M 是 $L_{p(\cdot)}$ 有界的, 其中 $p\in\mathcal{P}, p^->1$, 则对于任何 $s>1, M$ 也是 $L_{sp(\cdot)}$ 有界的. 同样地, 对于适当小的 s $(1/p^-<s<1)$, M 也是 $L_{sp(\cdot)}$ 有界的. 于是有下面问题: 如果 Doob 极大算子 M 是 $L_{p(\cdot)}$ 有界的又是 $L_{q(\cdot)}$ 有界的, 其中 $p,q\in\mathcal{P}$, $p^->1$, 是否在一般情形下 M 是 $L_{p(\cdot)+q(\cdot)}$ 有界的? 甚至对于常数 $\alpha>0$, M 是否是 $L_{p(\cdot)+\alpha}$ 有界的? 后面这个问题是文献 [13] 中对于函数空间 $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 提出的.

(5) 在经典调和分析中有几类内插定理, 内插方法又分为实、复两种方法, 其中有的真实性已经在变指数函数空间得到证实. 例如, Riesz-Thorin 定理已有了变指数的类比 (参见文献 [13]). 换句话说, 由 M 的 (p_0,p_0) 型和 (p_1,p_1) 型, 其中 $p_0,p_1\in\mathcal{P}$, $p_0^-,p_1^->1$, 导致

$$[L_{\varphi_0(\cdot)}(\Omega),L_{\varphi_1(\cdot)}(\Omega)]_{[\theta]}\approx L_{\varphi_\theta(\cdot)}(\Omega),\quad \frac{1}{p_\theta}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad 0<\theta<1.$$

式中应用的是所谓复内插. 在某些特殊的空间, 其他类型的内插定理的变指数化也被考虑过. 鉴于内插在鞅空间理论中的重要作用, 应该考虑它们在鞅论中的适用性. 甚至于如果 θ 是介于 0 与 1 之间的可测函数, 类似的内插定理能否成立? 即使在函数空间情形, 这也是值得考虑的.

参考文献

1 Orlicz W. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math, 1931, 3: 200–211
2 Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034. Berlin: Springer-Verlag, 1983
3 Ružička M. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1748. Berlin: Springer-Verlag, 2000
4 Kováčik O, Ràkosnik J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math J, 1991 41: 592–618
5 Fan X, Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J Math Anal Appl, 2001, 263: 424–446
6 Lerner A K. Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces. Math Z, 2005, 251: 509–521
7 Samko S G. Convolution type operators in $L^{p(x)}$. Integral Transforms Spec Funct, 1998, 7: 123–144
8 Diening L. Maximal functions on generalized $L^{p(x)}$ spaces. Math Inequal Appl, 2004, 7: 245–253
9 Cruz-Uribe D V, Fiorenza A, Neugebauer C J. The maximal function on variable L_p spaces. Ann Acad Sci Fenn Math, 2003, 28: 223–238
10 Nekvinda A. Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(\cdot)}(R^n)$ spaces. Math Inequal Appl, 2004, 7: 255–266
11 Diening L, Harjulehto P, Hästö P, et al. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017. Heidelberg: Springer-Verlag, 2011
12 Cruz-Uribe D V, Fiorenza A. Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Basel: Birkhäuder, 2013
13 Diening L, Hästö P, Nekvinda A. Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces. In: FSDONA04 Proceedings, Czech Acad Sci, Milovy Czech Republic. Prague: Academy of Sciences of the Czech Republic, 2005, 38–58
14 Bandaliev R A. The boundedness of certain sublinear operator in the weighted variable Lebesgue spaces. Czechoslovak Math J, 2010, 60: 327–337
15 Nakai E, Sawano Y. Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces. J Funct Anal, 2012, 262: 3665–3748
16 Sawano Y. Atomic decompositions of Hardy spaces with variable exponents and its application to bounded linear operators. Integral Equations Operator Theory, 2013, 77: 123–148
17 Doob J L. Stochastic Processes. London: Chapman and Hall, 1953
18 Garsia A. Martingale Inequalities: Seminar Notes on Recent Progress. Mathematics Lecture Notes Series. Reading-London: W. A. Benjamin, 1973
19 Burkholder D L. Distribution function inequalities for martingales. Ann Probab, 1973, 1: 19–42
20 Long R L. Martingale spaces and inequalities. Beijing: Peking University Press, 1993
21 Aoyama H. Lebesgue spaces with variable exponent on a probability space. Hiroshima Math J, 2009, 39: 207–216

22 Nakai E, Sadasue G. Maximal function on generalized martingale Lebesgue spaces with variable exponent. Statist Probab Lett, 2013, 83: 2168–2171
23 Jiao Y, Zhou D J, Hao Z W, et al. Martingale Hardy spaces with variable exponents. Banach J Math Anal, 2016, 10: 750–770
24 Hao Z W. Atomic decomposition of predictable martingale Hardy space with variable exponents. Czechoslovak Math J, 2015, 65: 1033–1045
25 Hao Z W, Jiao Y. Fractional integral on martingale Hardy spaces with variable exponents. Fract Calc Appl Anal, 2015, 18: 1128–1145
26 Liu P D, Wang M F. Burkholder-Gundy-Davis inequality in martingale Hardy spaces with variable exponent. Acta Math Sci, 2018, 38: 1151–1162
27 Liu P D. Doob's maximal inequalities for martingales in variable Lebesgue spaces. Acta Math Sci, 2021, in press
28 Liu P D, Wang M F. Weak Orlicz spaces: Some basic properties and their applications to harmonic analysis. Sci China Math, 2013, 56: 789–802
29 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1568. Berlin: Springer-Verlag, 1994
30 Jiao Y, Weisz F, Wu L, et al. Variable martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis. Dissertationes Math (Rozprawy Mat), 2020, 550: 1–67
31 Xie G, Jiao Y, Yang D C. Martingale Musielak-Orlicz Hardy spaces. Sci China Math, 2019, 62: 1567–1584
32 Xie G, Yang D C. Atomic characterizations of weak martingale Musielak-Orlicz Hardy spaces and their applications. Banach J Math Anal, 2019, 13: 884–917

Progress in the theory for martingale spaces with variable exponents

Peide Liu

Abstract We summarize some results on variable martingale space theory which was developed in recent years. We separate two cases, countably generate σ-algebra sequences and general σ-algebra sequences, to introduce some kinds of basic inequalities, including Doob's maximal inequality and Burkholder-Gundy-Davis inequality, and some kinds of variable Hardy spaces, variable Lorentz-Hardy spaces. We enumerate continuous embeds between them and those results, including atomic decompositions, dual spaces, fractional integrals and their applications to dyadic Fourier analysis. Musielak-Orlicz Hardy spaces are also introduced. At last we isolate some open problems.

Keywords **modular space, variable exponent space, martingale inequality, Doob maximal operator, atomic decomposition, sub-linear operator, fractional integral, Fourier analysis**

MSC(2010) **60G46, 60G42, 46E30, 42B25, 42B35**

doi: 10.1360/SSM-2020-0170