基于旋转交错网格伪谱法和L-S理论的热弹性介质波场模拟与特征分析

李元燮, 刘财^{*}, 郭智奇, 刘洋, 冯珣, 田有, 鹿琪

吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026

^{*} 通讯作者, E-mail: liucan@jlu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-09; 收修改稿日期: 2021-01-27; 接受日期: 2021-02-10; 网络版发表日期: 2021-06-15

国家自然科学基金项目(批准号: 41874125、41430322)和国家重点研发计划专项(编号: 2018YFC0603701、2017YFC06061301)资助

摘要 基于L-S热弹性理论, 采用旋转交错网格伪谱法, 实现了均匀各向同性介质的一阶速度-应力-温度微分方程组的数值求解和波场模拟. 其中, 用时间分裂法解决方程组的刚性问题, 用旋转交错伪谱算子计算空间一阶导数, 用中心伪谱算子计算空间二阶导数; 对于热导率变化比较大的双层介质模型和参考温度随深度按梯度分布的模型, 用Crank-Nicolson显式方法取代旋转交错网格伪谱法进行计算; 讨论了热耦合波场性质和传播规律, 对比了常规伪谱法、交错网格伪谱法和旋转交错网格伪谱法热耦合波场模拟效果. 数值模拟结果表明: 基于L-S热弹性理论, 用时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法对均匀各向同性介质的波场计算, 能够得到稳定的、高精度的模拟结果, 但是在热导率变化剧烈的情况下不能用大时间步长进行求解, 而且在参考温度不均匀分布的情况下算法不稳定. 本文在网格剖分方式与数值算法的优化组合应用方面进行了探索, 为将这些方法推广到孔隙热弹性、热黏弹性和各向异性研究奠定了基础.

关键词 热弹性波, L-S理论, 旋转交错网格伪谱法, 地震波场模拟, 时间分裂法

1 引言

经典地震波传播理论将地下介质视为等温或绝热变形条件下的完全弹性介质, 实际上地下介质受温度等环境影响并非是完全弹性介质. 研究波在高温介质中的传播规律对于开展深部地质资源勘探、地震层析成像等工作具有重要意义, 这正是近年来地震波研究日益重视热弹性理论的原因. 热弹性理论是弹性理论的一种推广, 主要研究材料的弹性(或应力)与温度(或

热传导)之间的关系, 它分为耦合热弹性理论和广义热弹性理论.

耦合热弹性理论始于1956年Biot的工作, 主要研究如何通过温度场分布求取应力场分布. 基于傅里叶热传导定律, Biot(1956)导出了热传导/热弹性耦合方程, 给出了温度场和应力场之间的关系. 由于热传导方程属于抛物型扩散方程, 它的解表达了一个有悖于狭义相对论的特性: 即扰动可以在瞬间传播到空间各处. 尽管这种特性对很多常规的热弹性问题是可以接

中文引用格式: 李元燮, 刘财, 郭智奇, 刘洋, 冯珣, 田有, 鹿琪. 2021. 基于旋转交错网格伪谱法和L-S理论的热弹性介质波场模拟与特征分析. 中国科学: 地球科学, 51(8): 1355–1374, doi: 10.1360/SSTe-2020-0120

英文引用格式: Li Y, Liu C, Guo Z, Liu Y, Feng X, Tian Y, Lu Q. 2021. Simulation and characteristics analysis of a wavefield in a thermoelastic medium adopting the rotated staggered-grid pseudo-spectral method and L-S theory. Science China Earth Sciences, 64(8): 1390–1408, <https://doi.org/10.1007/s11430-020-9742-x>

受的,但是在解决超高速、微尺度等热传导问题(这种问题必须考虑有限的热传播速度)时具有很大的局限性。

广义热弹性理论是基于修正的傅里叶热传导定律,用温度场求取应力场分布的理论,它克服了热扰动传播速度无限大的悖论。目前最常见的广义热弹性理论有:(1) L-S理论(Lord和Shulman, 1967),它引入一个热弛豫时间来修正傅里叶热传导定律,从而得出有波动性质的双曲型方程,保证了有限的热传播速度;(2) G-L理论(Green和Lindsay, 1972),它引入两个热弛豫时间来修正运动方程和热传导方程,使运动方程和热传导方程均为双曲型方程而不违反经典傅里叶热传导定律;(3) G-N理论(Green和Naghdi, 1991),它引入熵平衡理论,在线性理论条件下,用三种类型的本构方程描述均匀各向同性材料的热弹性响应。

国内外学者围绕热弹性波场的求解和模拟开展了大量研究。在解析法方面,王志伟等研究了L-S广义热弹性方程的格林函数(Wang等, 2020b)。在数值法方面,众多学者提出并发展了各种热弹性微分方程组的数值解法,如特征值数值积分法(Sumi, 2001)、有限体积法(Berezovski等, 2000, 2003; Berezovski和Maugin, 2001, 2002; Berezovski和Berezovski, 2013)、有限差分法与交错网格有限差分法(Chen等, 2003; Veres等, 2013)、谱元法(Chakraborty和Gopalakrishnan, 2004)、有限元法(Hosseini等, 2010)、边界元法(符力耘和牟永光, 1994)、无网格法(Hosseini等, 2011; Hosseini, 2014)、基于傅里叶微分算子的龙格-库塔积分法结合时间分裂法(Carcione等, 2019a, 2019b)等。

在地球物理学领域,基于热弹性方程组开展地震波场正演模拟正在成为一个活跃的研究方向。但是热弹性方程组具有刚性特征(Carcione等, 2019a),其数值解涉及稳定性问题,这一点决定了热弹性地震波场模拟具有复杂性。为了保证数值求解刚性偏微分方程组的稳定性,通常要求采用极小的时间步长,因而使计算量和内存大大增加。为了解决这一问题, Carcione和Quiroga-Goode(1995)引入了时间分裂方法,该方法将刚性偏微分方程组分解为刚性和非刚性两部分并进行交替求解。在求解过程中,将一个方程组的解作为另一个方程组的初始解,时间步长可由非刚性方程组的算法确定,从而解决了时间步长过小的问题;他们用这种方法求解了热弹性和孔隙热弹性方程(Carcione等,

2019a, 2019b)。

当前的主要数值方法各有利弊。有限差分法(Madariaga, 1976; Virieux, 1984; 董良国等, 2000)的优点是易于实现、占用内存小、计算速度快,缺点是精度低,仅适合相对简单的地质模型。尤其在用有限的离散网格近似无限介质时,如果网格剖分较大,震源主频过高,则该算法会导致严重的波形畸变和数值频散。有限元法(Lysmer和Drake, 1972; Marfurt, 1984; Serón等, 1990; Padovani等, 1994; Sarma等, 1998)的优点是网格剖分灵活,能够精确模拟复杂地质体,缺点是不适用于高阶算法,计算量大(Afanasiev等, 2019)。边界元法(Brebbia, 1978; Sánchez-Sesma, 1983; Kawase, 1988; Bouchon等, 1989)能够克服边界问题,但计算量大、计算效率低。伪谱法的优点是,在取较小时间步长时空间精度高,压制网格空间频散效果好,其精度可以看作是高阶有限差分法的空间差分阶数达到无穷时的极限情况,而且收敛速度好于有限差分法。不过常规的伪谱法也有内在缺陷:一是不能解决奈奎斯特波数处的不连续性问题,会导致均匀介质的波场快照出现井字形振铃伪影,各向异性介质的波场快照中出现环形伪影;二是不能很好地处理边界以及介质内部物性差异较大的问题。如果介质内部存在物性的间断或突变,会在计算时产生局部干扰并影响整个波场。借助非常规的网格剖分形式,如交错网格法(Özdenvar和McMechan, 1996),可以使这些问题得到改善。

网格剖分形式对计算效率和模拟精度有着重要影响。标准交错网格法(Madariaga, 1976; Virieux, 1984)是为了求解弹性非均匀介质中速度-应力微分方程组而提出的,它将速度和应力分配到两套不同的网格中,使速度、应力得到很好的耦合。但是当介质材料存在较高物性差异时,它可能变得不稳定(Robertsson, 1996)。旋转交错网格法(Saenger等, 2000)克服了标准交错网格法的不足,将所有应力分量定义在单元格的同一个位置,速度分量定义在单元格的另一个位置,可以得到更稳定、更可信的解。

本文基于Carcione等(2019b)的工作,针对基于L-S理论的热弹性方程,首先进行平面波分析,研究热弹性波的频散和衰减特征,随后推导离散格式,在此基础上选用旋转交错网格伪谱法实现热弹性波场的数值模拟(Carcione等采用常规伪谱法)。其中,采用中心伪谱算子计算热弹性方程的空间二次导数,采用旋转交错伪

谱算子计算空间一次导数, 用二阶中心差分计算时间导数(Carcione等采用四阶显式龙格-库塔法). 在模拟结果的基础上, 对常规伪谱法、交错网格伪谱法和旋转交错网格伪谱法进行了比较. 最后通过建立温度梯度模型, 考察参考温度和热导率对波场的影响. 本文采用的模拟方法可以进一步推广到孔隙热弹性、黏弹性和各向异性等情况, 为高温高压储层的理论研究和探测技术提供有益的参考.

2 L-S热弹性微分方程

Lord和Shulman(1967)在热流与温度梯度的关系中考虑了热导率, 基于热力学第一、第二定律引入一个时间弛豫因子, 从而得到了广义热弹性理论的控制方程. 在均匀各向同性介质的假设下, 需要用到如下关系.

2.1 应变-位移关系

应变-位移关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \varepsilon = \varepsilon_{ii}, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 采用重复指标隐式求和约定, $i, j=1, 2, 3$; ε_{ij} 为应变张量, u_i 为位移分量(量纲: m); 下标中的“ i ”表示求 i 方向的一阶空间偏导数.

2.2 应力-应变关系

应力-应变关系为(Biot, 1956)

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \Delta T \delta_{ij} + f_{ij}, \quad (2)$$

$$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha, \quad (3)$$

其中, σ_{ij} 为应力张量(量纲: $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$), λ 和 μ 为拉梅常数, δ_{ij} 为克罗内克函数, β 为各向同性的体热膨胀系数(又称热弹性耦合参数), ΔT 为零应力和零应变状态下参照参考温度 T_0 的温度增量(量纲: K), f_{ij} 为外力张量(量纲: $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$), α 为线热膨胀系数.

2.3 应力-位移关系

应力-位移关系为

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i + f_i, \quad (4)$$

其中, ρ 为密度(量纲: kg m^{-3}), 变量上方的双点符号表示时间二阶导数, f_i 为外力分量(量纲: $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-2}$).

2.4 基于L-S理论的热传导定律

L-S热传导方程为(Lord和Shulman, 1967):

$$K(\Delta T)_{,ii} = c(\Delta \dot{T} + \tau \Delta \ddot{T}) + T_0 \beta (\dot{\varepsilon} + \tau \ddot{\varepsilon}) + R, \quad (5)$$

其中, K 为热导率(量纲: $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3} \text{K}^{-1}$), c 为零应变情况下单位质量的比热(量纲: $\text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$), Δ 为拉普拉斯算子, 变量上方的单点符号表示时间一阶导数, τ 为热弛豫时间(量纲: s), R 为热源(量纲: $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3}$), “ $_{,ii}$ ”表示 i 方向的二阶空间偏导数.

2.5 一阶速度-应力-温度微分方程

结合公式(1)~(5), 得到一阶速度-应力-温度微分方程组(Carcione等, 2019b):

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \Phi_i = \frac{1}{\rho}(\sigma_{ij,j} - f_i), \\ \Delta \dot{T} = \zeta, \\ \dot{\sigma}_{ij} = \lambda v_{i,i} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) - \beta \zeta \delta_{ij} + f_{ij}, \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{c\tau} \{K(\Delta T)_{,ii} - R - T_0 \beta (v_{i,i} + \tau \Phi_{i,i})\} - \frac{\zeta}{\tau}. \end{cases} \quad (6)$$

3 平面波分析

将式(2)代入式(4), 并结合式(1), 得出质点位移分量和温度的波动方程(Carcione等, 2019b):

$$\begin{cases} \mu \mu_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} - \beta (\Delta T)_j = \rho \ddot{u}_j, \\ K(\Delta T)_{,ii} = c(\Delta \dot{T} + \tau \Delta \ddot{T}) + T_0 \beta (\ddot{u}_{i,i} + \tau \ddot{u}_{i,i}) + R. \end{cases} \quad (7)$$

设位移、温度平面波的通解为(Carcione等, 2019b)

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp[i\omega(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})], \\ T = T_0 \exp[i\omega(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x})], \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{u}$ 为位移向量, $\mathbf{u}_0$ 为初始位移向量, i 为虚数单位, ω 为角频率, $\mathbf{s}$ 慢度向量, 且 $\mathbf{s} = \mathbf{k}/\omega$ ($\mathbf{k}$ 为复波数, 其实部反映常规波数, 虚部反映波的衰减特性), $\mathbf{x}$ 为位置向量, T 为绝对温度.

定义慢度面为 $\mathbf{s}(l_1, l_2, l_3)^T$, 其中, l_i ($i=1, 2, 3$)为传播方向的方向余弦(由于介质为各向同性, 这些余弦并不

参与计算). 平面S、P波分析如下(Carcione等, 2019b).

3.1 S波的情况

此时有 $u_{li}=0$, 位移向量垂直于波传播方向. 将平面波解式(8)中的位移方程代入式(7), 得到频散关系式(Carcione等, 2019b):

$$\mu k^2 - \rho \omega^2 = 0. \quad (9)$$

据此得出S波的相速度为

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (10)$$

可见, 由于剪切应力与温度无关, 所以热弹性S波的特性与弹性S波并无区别.

3.2 P波的情况

此时有 $u_{li}=1$, 即位移向量指向波传播方向. 可以得到P波的频散关系式, 其复速度 $v_{\text{复}}$ 满足(Carcione等, 2019b)

$$\begin{cases} v_{\text{复}}^4 + (v_{\text{P绝热}}^2 + M)v_{\text{复}}^2 + Mv_{\text{P等温}}^2 = 0, \\ M = \frac{i\omega a^2}{1 + i\omega\tau}, \end{cases} \quad (11)$$

其中, $a^2 = K/c$, M 为Maxwell黏弹模型的复数核, $v_{\text{P等温}}$ 为等温P波相速度, $v_{\text{P绝热}}$ 为绝热P波相速度, 分别为(Rudgers, 1990)

$$\begin{cases} v_{\text{P等温}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \\ v_{\text{P绝热}} = \sqrt{v_{\text{P等温}}^2 + b^2}, \end{cases} \quad (12)$$

其中, $b = \beta(T_0/\rho c)^{1/2}$. 由式(12)可知, $v_{\text{P绝热}} > v_{\text{P等温}}$.

式(11)的解为

$$v_{\text{复}} = \sqrt{\frac{v_{\text{P绝热}}^2 + M \pm \sqrt{(v_{\text{P绝热}}^2 - M)^2 - 4Mv_{\text{P等温}}^2}}{2}}. \quad (13)$$

该式表明: 第一, 复速度 $v_{\text{复}}$ 有两个“准P波”解, 当“ $\pm$ ”号取正时为E波(准弹性P波), 取负时为T波(准热P波); 第二, L-S热弹性模型可以与黏弹性模型做类比, 它本质上是一种具有角频率依赖性的、用复杂复函数形式表示黏度的黏弹性模型. 用Maxwell黏弹模型核 M 表示L-S热弹性理论的频散关系会更简洁.

3.3 弛豫时间 τ 的选定与L-S热弹性P波的频散

本文采用Rudgers(1990)为其晶格模型选取的热弛豫时间:

$$\tau = \frac{K}{c \cdot v_{\text{P等温}}^2}. \quad (14)$$

根据式(11)和(13), 当 $\omega=0$ 时, $M=0$, 得到两个实数解 $v_{\text{复}}=0$ (T波)、 $v_{\text{复}}=v_{\text{P绝热}}$ (E波). 当 $c \rightarrow \infty$ 时, 得到 $v_{\text{复}}=v_{\text{P等温}}$; 当 $K \rightarrow 0$ 时, 得到 $v_{\text{复}}=v_{\text{P绝热}}$. 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $M \rightarrow a_2/\tau = v_{\text{P绝热}}^2$, 因而得到

$$v_{\text{复}} = \sqrt{\frac{v_{\text{P绝热}}^2 + v_{\text{P等温}}^2 \pm \sqrt{(v_{\text{P绝热}}^2 - v_{\text{P等温}}^2)^2 - 4v_{\text{P等温}}^4}}{2}}.$$

由于选定了式(14), 所以可以用 $K \rightarrow \infty$ 、 $c \rightarrow 0$ 来代替 $\omega \rightarrow \infty$ 的情况. 若分别用 $v_{\text{E}\infty}$ 和 $v_{\text{T}\infty}$ 来表示E波和T波速度的高频极限, 则有 $v_{\text{E}\infty} > v_{\text{P绝热}} > v_{\text{P等温}} > v_{\text{T}\infty}$ (Carcione等, 2019b).

对于该结果有必要做两点说明. 首先, 由于复速度依赖于Maxwell模型核 M 并因此而依赖于频率 ω , 所以热弹性P波不仅是频散的, 而且由于其速度的复数性质而存在衰减. 其次, 热弹性P波在波长趋于零时以等温相速度传播, 在波长趋于无穷大时以绝热相速度传播, 并且有 $v_{\text{P绝热}} > v_{\text{P等温}}$. 关于这一点, Zener(1948)、Deresiewicz(1957)、Boley和Weiner(1960)、Achenbach(1973)先后从物理学角度给出了解释. 其中Zener(1948)认为热膨胀改变了等温情况下的体积模量. 除了水、锑、铋、镓、硫化镍等具有反常膨胀性质的少数物质外, 大多数物质都是温度升高和体积增加同时发生, 故可以解释E波速度高于纯弹性情况下P波速度的现象. 刘文堂等(2008)认为P波在弹性介质中的传播问题只是在热弹性介质中传播问题的一个特例.

相速度 v_{P} 和衰减因子 A 可以分别从复速度得出(Carcione, 2014):

$$v_{\text{P}} = \left[\text{Re}(v_{\text{复}}^{-1}) \right]^{-1}, \quad A = -\omega \text{Im}(v_{\text{复}}^{-1}). \quad (15)$$

Deresiewicz(1957)引入了衰减系数 L , 它是每次应力循环的耗散能量与总振动能量的比值:

$$L = 4\pi \cdot \frac{Av_{\text{P}}}{\omega}. \quad (16)$$

对于衰减的微观物理机制, Zener(1948)认为是晶间热流感生阻尼导致了振幅衰减.

上述分析阐明了关于热弹性波传播的一些基本性质,正如Deresiewicz(1957)所指出的:在非耦合情况下,弹性波动方程控制纯弹性的运动,热传导方程控制纯热的运动.而在热弹性情况下,两种运动同时存在且相互耦合,其中一个运动模式由纯弹性运动主导,称为E模式;另一个运动模式由纯热运动主导,称为T模式.

4 波传播方程的数值解法

4.1 旋转交错网格伪谱法基本原理

Saenger等(2000)提出的旋转交错网格在标准交错网格的基础上增加了网格旋转.在热弹性波场数值模拟中,旋转交错网格伪谱法(Zou和Cheng, 2016, 2018)将应力、温度增量、温度增量的时间一阶导数、比热、体热膨胀系数、热导率定义在同一网格点,将质点速度和密度定义在同一网格点(图1).这种物理量放置形式,可以在离散化热弹性波传播方程时直接应用对应网格点处的热弹性常量(即不需要对热弹性常量进行插值处理),避免了因均值引入的误差,得到比标准交错网格更稳定的解.该技术目前广泛应用于物性变化剧烈(如裂隙)和一般各向异性介质的波场模拟(Lu等, 2020; Wang等, 2020a).

中心网格函数的交错算子与交错网格函数(Witte和Richards, 1987)的中心算子是等价的(Corrêa等, 2002).但是用交错伪谱算子计算空间二阶导数或用中心伪谱算子计算空间一阶导数,在奈奎斯特波数附近会产生数值振荡.这是因为在用中心伪谱算子(常规伪谱法)计算空间一阶导数时,傅里叶正变换输入序列经过变换后,场量偶数点在奈奎斯特波数处的值为纯实数,乘以复波数之后变为纯虚数,导致傅里叶反变换输入序列违背了Hermitian对称性,经过反变换后得到一阶微分的复序列值,为了确保结果为纯实数而对其取实部,从而导致计算误差;而用交错算子计算二阶空间导数时,同样会导致反变换输入序列违背Hermitian对称性,进而产生计算误差.这种数值振荡会导致振铃伪影.“振铃伪影”在信号处理(尤其是在数字图像处理)中表示出现在信号急速变化位置附近的伪影.“振铃”是指输出信号在输入信号突变位置附近以衰减的速率振荡,类似于被敲击之后的铃的状态变化.对于伪谱法波场模拟和滤波器设计而言,使振铃伪影最小

图1 旋转交错网格单元示意图

化是一个研究方向.为了消除振铃伪影,吴宝年等(2012)用交错算子计算空间一阶导数,用中心算子计算空间二阶导数.本文将采用类似的联合算子求导方法,用旋转交错伪谱算子计算空间一阶导数.

计算空间一阶导数的旋转交错伪谱算子为(Zou和Cheng, 2018)

$$\begin{cases} D_{x[\text{RS-PSO}]}^{\pm} \phi = \sum_{k_x=0}^{k_x(n)} i k_x \exp \left[\pm i \left(k_x \frac{\Delta x}{2} + k_z \frac{\Delta z}{2} \right) \right] \tilde{\phi}(k_x) \exp(i k_x x), \\ D_{z[\text{RS-PSO}]}^{\pm} \phi = \sum_{k_z=0}^{k_z(n)} i k_z \exp \left[\pm i \left(k_z \frac{\Delta z}{2} + k_x \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \tilde{\phi}(k_z) \exp(i k_z z), \end{cases} \quad (17)$$

其中, $D_{i[\text{RS-PSO}]}^{\pm} \phi$ 表示求取 i 方向空间一阶导数的旋转交错伪谱算子, $\pm$ 表示相位前移/后移(Tracewell, 1978), 下角标 $i=x, z$ 为求微分的方向, [RS-PSO] 为旋转交错伪谱算子的缩写, ϕ 为场量, $\tilde{\phi}(k_x)$ 为场量偶数点数 (2^n) 的傅里叶正变换, k_x 和 k_z 分别表示 x, z 方向的波数, $k_x(n) = \pi/\Delta x$ 和 $k_z(n) = \pi/\Delta z$ 分别为 x, z 方向的奈奎斯特波数, $\Delta x, \Delta z$ 为 x, z 空间采样步长.

计算空间二阶导数的伪谱法中心算子为

$$D_{x[\text{C-PSO}]}^2 \phi = \sum_{k_x=0}^{k_x(n)} (i k_x)^2 \tilde{\phi}(k_x) \exp(i k_x x), \quad (18)$$

其中, $D_{i[\text{C-PSO}]}^2$ 为二阶中心伪谱微分算子, [C-PSO] 为中心伪谱算子的缩写, 上角标“2”表示二阶.

场量和介质物性参数分配在网格角点或网格中心(图1).将弹性参数、体热膨胀系数、热导率定义在网格中心(即应力和温度处),介质密度定义在网格角点(速度分量处).这些参数在更新应力时不用进行平均.

4.2 刚性问题

考虑二维情况, 式(6)可以写成矩阵形式(Carcione等, 2019b):

$$\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{s} = \mathbf{M}\mathbf{v}, \quad (19)$$

其中, $\mathbf{v} = [v_x, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \Delta T, \xi]^T$ 为未知波场向量,

$$\mathbf{s} = \left[\frac{f_x}{\rho}, \frac{f_z}{\rho}, f_{xx}, f_{zz}, f_{xz}, 0, -\frac{q}{c\tau} \right]^T \text{ 为源向量, } \mathbf{M} \text{ 为传播矩阵,}$$

它由空间导数算子和物性参数构成.

满足初始条件 $\mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0$ 的式(19)的解可以写成(Carcione等, 2019b)

$$\mathbf{v}(t) = \exp(t\mathbf{M})\mathbf{v}_0 + \int_0^t \exp(\tau\mathbf{M})\mathbf{s}(t-\tau)d\tau, \quad (20)$$

其中, $\exp(t\mathbf{M})$ 称为演化算子.

$\mathbf{M}$ 的特征值可能有负实部而且大小相差悬殊. 如果很大的特征值与很小的特征值共存, 则问题是刚性的. 刚性方程组的数值解存在稳定性问题. 为了证明本文的热弹性方程组具有刚性, 考虑式(6)的一维情况(用下角标 x 表示). S波不受热效应的影响, 故令 $\mu=0$. 在忽略外力的情况下:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{1}{\rho}\sigma_{x,x} = \Phi_x, \\ \dot{\sigma}_x = \lambda v_{x,x} - \beta_x \xi_x, \\ \Delta \dot{T} = \xi_x, \\ \dot{\xi} = \frac{1}{c\tau} \left\{ K(\Delta T)_{,xx} - T_0 \beta (v_{x,x} + \tau \Phi_{x,x}) \right\} - \frac{\xi}{\tau}, \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\beta=3\lambda\alpha$, 场向量变为 $\mathbf{v} = [v_x, \sigma_x, \Delta T, \xi]^T$. 考虑平面波:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp[i(\omega_{\text{复}} t - \kappa x)], \quad (22)$$

其中, $\omega_{\text{复}}$ 为复角频率, κ 为实波数. 当特征值 $\zeta = i\omega_{\text{复}}$ 时, 公式(21)给出求解矩阵行列式的特征值方程:

$$\mathbf{M} - \eta \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} -\zeta & -i\frac{\kappa}{\rho} & 0 & 0 \\ -i\lambda\kappa & -\zeta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -\zeta & 1 \\ \frac{i\beta T_0 \kappa}{c\tau} & \frac{\beta \tau T_0 \kappa^2}{\rho K} & -\frac{K\kappa^2}{c\tau} & \frac{1}{\tau} - \zeta \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中, $\mathbf{I}_4$ 为 4×4 单位矩阵. 数值离散化所用的波数域为 $[0, \pi/\Delta x]$, 其中 Δx 为空间步长. 当 $\kappa=0$ 时, 有三个特征值等于0, 第四个特征值为 $-1/\tau$. 因此证明了热弹性方程

组存在刚性(Carcione等, 2019b).

为了保持数值计算稳定性, 必须采用与热弛豫时间同一量级的时间步长. 对工程材料热弛豫时间的研究表明, 绝大多数材料的热弛豫时间在 $10^{-9} \sim 10^{-12}$ s的量级上(Nettleton, 1960; Chester, 1963; Maurer, 1969; Francis, 1972), 因此适用于热弹性波场数值计算的时间步长非常小, 导致占用大量内存和计算时间. 因此, 求解热弹性方程需要一种数值方法, 在保证结果稳定性的同时, 能以较大时间步长进行计算.

4.3 时间分裂法

为了解决热弹性方程组的刚性问题, Carcione和Quiroga-Goode(1995)引入了一种时间分裂解法(Jain, 1984). 该方法将刚性方程组分为刚性和非刚性两部分, 以刚性部分的解作为非刚性部分的解的初始值进行交替求解. 由于非刚性方程组的算法可以决定时间步长, 因此可以解决时间步长过小的问题. 我们将时间分裂法与旋转交错网格伪谱法结合起来, 作为本文主要的数值求解算法.

对方程组式(6)进行分解. 刚性方程组为(Carcione等, 2019b)

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ii} = -\beta \xi, \\ \dot{\xi} = -\frac{\xi}{\tau}. \end{cases} \quad (24)$$

非刚性方程组为(Carcione等, 2019b)

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \frac{1}{\rho}(\sigma_{ij,j} - f_i) = \Phi_i, \\ \dot{\sigma}_{ij} = \lambda v_{i,i} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + f_{ij}, \\ \Delta \dot{T} = \xi, \\ \dot{\xi} = \frac{1}{c\tau} \left\{ K(\Delta T)_{,ii} - R - T_0 \beta (v_{i,i} + \tau \Phi_{i,i}) \right\}. \end{cases} \quad (25)$$

式(19)的传播矩阵分解为正则矩阵和含有量 K 和耦合项的刚性矩阵(Carcione等, 2019b):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{正则}} + \mathbf{M}_{\text{刚性}}. \quad (26)$$

演化算子可以表示为 $\exp[(\mathbf{M}_{\text{正则}} + \mathbf{M}_{\text{刚性}})t]$.

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{M}dt) &= \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{M}_{\text{刚性}}dt\right) \\ &\quad \times \exp(\mathbf{M}_{\text{正则}}dt) \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{M}_{\text{刚性}}dt\right). \end{aligned} \quad (27)$$

将等式(27)两边的各项做泰勒展开, 不难证明其在 Δt 上具有二阶精度(Carcione等, 2019b).

将时间变量离散化为 $t = n\Delta t$, 并用上角标“中间”表示中间场, 它是为了根据 $n\Delta t$ 处的场求解 $(n+1)\Delta t$ 处的场而设立的. 根据式(28)解析求解式(20), 得(Carcione等, 2019b)

$$\begin{cases} \sigma_{ii}^{\text{中间}} = \sigma_{ii}^{(n)} + \tau\beta \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) - 1 \right] \zeta_i^{(n)}, \\ \zeta_i^{\text{中间}} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \zeta_i^{(n)}. \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} v_{x_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = v_{x_{i,j}}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + \Delta t \cdot \left[\frac{1}{\rho_{i,j}} \left(D_{x[\text{RS-PSO}]}^+ \sigma_{xx_{i,j}}^{\text{中间}} + D_{z[\text{RS-PSO}]}^+ \sigma_{xz_{i,j}}^{(n)} \right) \right] = v_{x_{i,j}}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + \Delta t \cdot \Phi_{x_{i,j}}^{(n)}, \\ v_{z_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = v_{z_{i,j}}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + \Delta t \cdot \left[\frac{1}{\rho_{i,j}} \left(D_{x[\text{RS-PSO}]}^+ \sigma_{xz_{i,j}}^{(n)} + D_{z[\text{RS-PSO}]}^+ \sigma_{zz_{i,j}}^{\text{中间}} \right) \right] = v_{z_{i,j}}^{\left(n-\frac{1}{2}\right)} + \Delta t \cdot \Phi_{z_{i,j}}^{(n)}, \\ \sigma_{xx_{i,j}}^{(n+1)} = \sigma_{xx_{i,j}}^{\text{中间}} + \Delta t \cdot \left(c_{11_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{x[\text{RS-PSO}]}^- v_{x_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + c_{13_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{z[\text{RS-PSO}]}^- v_{z_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right), \\ \sigma_{zz_{i,j}}^{(n+1)} = \sigma_{zz_{i,j}}^{\text{中间}} + \Delta t \cdot \left(c_{13_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{x[\text{RS-PSO}]}^- v_{x_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + c_{33_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{z[\text{RS-PSO}]}^- v_{z_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right), \\ \sigma_{xz_{i,j}}^{(n+1)} = \sigma_{xz_{i,j}}^{(n)} + \Delta t \cdot \left(c_{55_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{x[\text{RS-PSO}]}^- v_{z_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + c_{55_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} D_{z[\text{RS-PSO}]}^- v_{x_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right), \\ \Delta T_{i,j}^{(n+1)} = \Delta T_{i,j}^{(n)} + \Delta t \cdot \zeta_{i,j}^{(n+1)}, \\ \zeta_{i,j}^{(n+1)} = \zeta_{i,j}^{\text{中间}} + \Delta t \cdot \left\{ \frac{1}{c_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \tau_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \left[K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cdot \left(D_{x[\text{C-PSO}]}^2 \Delta T_{i,j}^{(n)} + D_{z[\text{C-PSO}]}^2 \Delta T_{i,j}^{(n)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - T_0 \beta_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left[D_{x[\text{RS-PSO}]}^- v_{x_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + D_{z[\text{RS-PSO}]}^- v_{z_{i,j}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} + \tau_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \cdot \left(D_{x[\text{RS-PSO}]}^- \Phi_{x_{i,j}}^{(n)} + D_{z[\text{RS-PSO}]}^- \Phi_{z_{i,j}}^{(n)} \right) \right] \right\}, \end{cases} \quad (29)$$

其中, 上角标 (n) 表示时间步, 下角标 i, j 表示网格点, $i+1/2, j+1/2$ 表示网格中心. Δt 为时间步长.

4.5 稳定性条件

本文基于Kosloff等(1984)的经验性结果 $v_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta d} \leq 0.2$ 选取时间步. 这里 $v_{\max}$ 采用高频极限E波速度. 对于适用于热弹性介质中的波传播的伪谱法稳定性条件, 有待于更加详细的数学公式推导.

将分量形式的中间场解 $\mathbf{v}_{\text{中间}} =$

$\left[v_x^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}, v_z^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}, \sigma_{xx}^{\text{中间}}, \sigma_{zz}^{\text{中间}}, \sigma_{xz}, \Delta T^{(n)}, \zeta^{\text{中间}} \right]^T$ 作为非刚性方程组数值求解过程的初始值. 对于非刚性方程组, 则采用旋转交错网格伪谱法进行求解.

4.4 非刚性方程组离散格式

根据式(18)和(19), 在网格计算域 $\{x, z \in R^+; i, j \in N^+ | i \in (0, z], j \in (0, x]\}$ 上对非刚性方程组式(29)进行离散, 忽略外力项, 有

5 数值算例与分析

5.1 单层模型

设计一个单层热弹性各向同性介质模型. 模型网格数为 255×255 , 网格大小为 $10\text{m} \times 10\text{m}$. 震源采用垂直震源和热源, 即将垂直震源加载在质点速度垂直分量上, 将热源加载在温度的时间一阶导数上. 震源中心点位置为 $(1270\text{m}, 1270\text{m})$, 震源时间函数采用Ricker子波:

$$f(t) = [1 - 2\pi^2 f_m^2 (t - t_0)^2] \exp[-\pi^2 f_m^2 (t - t_0)^2], \quad (30)$$

式中, f_m 为震源主频, t_0 为子波延迟时间, 这里设 $t_0=3/2f_m$. 主频取25Hz, 时间采样间隔为0.1ms. 热源亦采用这一函数. 但对于适合地球物理学应用的热源函数还有待于进一步研究.

经过测试, 在正演模拟中比较常用的Cerjan吸收边界条件和PML、CPML吸收边界条件的吸收效果并不理想, 对于适用于热弹性介质波场模拟的吸收边界条件也有待于进一步研究. 因此本文没有添加吸收边界条件.

介质物性参数选取与Carcione等(2019b)相同, 如表1所示.

根据物性参数, 可以计算出 $v_{P绝热}=3480\text{m s}^{-1}$. 根据Carcione等(2019b), 高频极限速度 $v_{E\infty}=3980\text{m s}^{-1}$. 设热导率单位为 $\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$ (下文提及热导率时, 不再出现单位), 当热导率为10.5和 4.5×10^6 时, 相速度、衰减系数随频率变化的曲线分别如图2a和2b所示, 这与Carcione等(2019b)的结果相同. 图2a中, 蓝色实线和虚线分别表示热导率为10.5和 4.5×10^6 时的E波相速度, 红色实线和虚线分别表示热导率为10.5和 4.5×10^6 时的T波相速度; 图2b中, 蓝色实线和虚线分别表示热导率为10.5和 4.5×10^6 时的E波衰减系数, 红色实线和虚线分别表示热导率为10.5和 4.5×10^6 时的T波衰减系数.

从图2a中可以看出, 当热导率为10.5时, E波速度曲线拐点频率大致为20MHz, 而当热导率为 4.5×10^6 时, 拐点频率在50Hz左右. 低频时, E波速度为绝热速度,

表 1 单层模型参数设置

物性参数	数量
介质密度 $\rho(\text{kg m}^{-3})$	2650
单位质量比热 $c(\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} \text{K}^{-1})$	117
热导率 $K(\text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1})$	10.5, 4.5×10^6
线热膨胀系数 $\alpha(\text{K}^{-1})$	3.3×10^{-6}
P波速度(等温条件) $v_{P等温}(\text{m s}^{-1})$	2457
S波速度 $v_s(\text{m s}^{-1})$	1505
参考绝对温度 $T_0(\text{K})$	300
热弛豫时间 $\tau(\text{s})$	$\tau=K/(c\cdot v_{P等温}^2)$

高频时, E波速度达到极限值. 从图2b中可以看出, E波衰减系数有峰值. 根据Carcione等(2019b), 对应的品质因子为 $Q=\pi/2$, 这是非常强烈的衰减.

针对上述单层模型, 采用旋转交错网格伪谱法结合时间分裂法进行波场数值模拟, 并与常规伪谱法、交错网格伪谱法进行对比. 图3给出了非耦合($\alpha=0$)情况下, 垂直震源激发的质点速度垂直分量的波场快照(325ms). 由于该波场等同于弹性情况, 因此未使用时间分裂法. 为了对比三种算法成图的细节, 针对每一种方法给出了“原始”快照(图的左列)和“放大”快照(图的右列, 色标缩小至 1×10^{-8} 数量级). 图3a和3b为常规伪谱法的波场快照, 程序运行时间为114.27s, 使用物理内存7202MB; 图3c和3d为交错网格伪谱法的波场快照, 程序运行时间为180.56s, 使用物理内存7268MB;

图 2 相速度和衰减系数随频率的变化
(a) 相速度; (b) 衰减系数

图 3 单层模型的波场快照($t=325\text{ms}$, 非耦合情况)

垂直震源(主频 25Hz)激发. 左侧各图为“原始”快照; 右侧各图为“放大”快照. (a)、(b) 常规伪谱法; (c)、(d) 交错网格伪谱法; (e)、(f) 旋转交错网格伪谱法.

图3e和3f为旋转交错网格伪谱法的波场快照, 程序运行时间为 308.87s , 使用物理内存 7677MB . 从图3e中可以看到清晰的P、S波前面, 其中P波以等温速度 v_P 等温传播, S波以横波速度 v_S 传播, 且没有可见的网格数值频散, 表明旋转交错网格法对于模拟弹性介质中的波场是有效和精确的. 对于弹性情况, 常规伪谱法的波场快照出现振铃拖尾导致的井字形伪影(如图3a和3b所示), 其计算时间和内存都最小; 交错网格伪谱法和

旋转交错网格伪谱法的波场快照中没有井字形伪影, 但是依然在震源的水平和垂直方向上存在振铃伪影, 水平方向上的伪影比垂直方向上的伪影更明显; 旋转交错网格伪谱法的伪影比交错网格伪谱法稍弱, 然而计算时间和所需内存较交错网格伪谱法明显增加. 在 $(1070\text{m}, 1070\text{m})$ 处用旋转交错网格法计算的质点速度垂直分量的时间记录如图4所示.

图4给出了耦合($\alpha \neq 0$)、单层模型、垂直震源激发

图 4 单层模型的波场、温度场快照($t=325\text{ms}$, 耦合情况下)

热导率10.5, 垂直震源(主频25Hz)激发. 左列各图和(g)为质点速度垂直分量; 右列各图为增量温度场. (a)、(b) 常规伪谱法; (c)、(d) 交错网格伪谱法; (e)、(f) 旋转交错网格伪谱法; (g) 用旋转交错伪谱算子计算二阶空间导数

情况下, 质点速度垂直分量和增量温度场的波场快照 (325ms). 热导率取10.5. 图中对比显示了常规伪谱法、交错网格伪谱法和旋转交错网格伪谱法的模拟结果. 图的左列为质点速度垂直分量, 右列为增量温度场. 图4a和4b表示时间分裂法结合常规伪谱法的模拟结果, 程序运行时间为188.61s, 使用物理内存7965MB; 图4c和4d表示时间分裂法结合交错网格伪谱法的模拟结果, 程序运行时间为282.91s, 使用物理内存7792MB; 图4e和4f表示时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法的模拟结果, 程序运行时间为429.87s, 使用物理内存8015MB; 图4g表示用旋转交错算子计算的空间二阶导数(与用中心算子计算空间二阶导数的结果相对比), 程序运行时间为465.79s.

与弹性各向同性情况(图3)相比, 在热弹性各向同性情况中, 三种算法的计算时间和所需内存都有所增加, 而且各自表现出类似于弹性情况下的算法性质. 温度的空间二阶偏导数 $(\Delta T)_{,ii}$ 只能用中心伪谱算子计算; 在构成 $\Phi_{i,i}$ 的式子中, 包含应力的空间二阶偏导数 $\sigma_{ii,ii}$ 可以用旋转交错伪谱算子计算. 比较图4g和图4e, 计算结果没有明显差别, 但是使用旋转交错伪谱算子要比使用中心伪谱算子花费更多时间. S波波前面不变, 因为S波不受热效应影响. 但P波波前面的位置和振幅都发生了改变, 此时它是热弹性E波, 以 $v_{p\text{绝热}}=3480\text{m s}^{-1}$ 传播且有能量耗散. 在图4b、4d、4f中, T波几乎不可见, 因为它在当前频率下受到强烈衰减, 呈现扩散性质.

图5给出了耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 当热导率选定为10.5且热源(主频25Hz)激发时, 采用时间分裂法结合

旋转交错网格伪谱法计算的、时刻325ms的质点速度垂直分量(图5a)和增量温度场(图5b)波场快照.

由图5可见, E波以绝热速度传播, 振幅比震源激发时要小; T波呈扩散型, 参考图2b可以看出, T波在25Hz频率上受到很强烈的衰减, 但在源函数相同的情况下, 热源激发的T波比震源激发的T波更强. 由图4b可以看到这一点, 即使不做灰度加强也可以在震源处隐约看到扩散型的T波. 这种情况下(1070m, 1070m)处的质点速度垂直分量的时间记录如图6所示. 对比图6, 在震源和热源函数相同的情况下, 热源激发波形与震源激发波形相比, 振幅更小.

图6a对于热导率为10.5时的垂向震源激发的非耦合情况、垂向震源激发的耦合情况和热源激发的耦合情况, 比较了离震源和热源位置较远处的质点速度垂直分量的时间记录. 图6b对于后两种耦合情况, 比较温度增量的时间记录. 图6a和6b取质点位置(1070m, 1070m), 经历时间为0.4s. 图6c和6d对于后两种耦合情况, 比较震源和热源位置处的质点速度垂直分量和温度增量的时间记录. 其中, 蓝色实线、红色实线和粉色虚线分别代表非耦合情况、垂向震源激发的耦合情况和热源激发的耦合情况下的时间记录. 从图中可见, 在震源和热源函数相同的情况下, 热源激发、通过耦合作用产生的E波比震源激发直接产生的E波振幅更小, 但热源激发直接产生的扩散型T波比震源激发、通过耦合作用产生的T波振幅更大. 在传播过程中, 相比于非耦合情况下的P波, 耦合情况下的E波传播速度更快, 但是振幅更小; 耦合与非耦合情况下, 震源激发产生的S波相同; 震源直接激发产生的E波和热源直接

图5 用时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法计算的波场快照($t=325\text{ms}$)

单层模型、耦合情况、热导率10.5、热源(主频25Hz)激发. (a) 质点速度垂直分量; (b) 增量温度场快照

图6 垂向震源激发的非耦合情况、垂向震源激发的耦合情况和热源激发的耦合情况的时间记录对比

热导率10.5。(a)和(b)为质点位置(1070m, 1070m)处的质点速度垂直分量和温度增量; (c)和(d)为质点位置(1270m, 1270m)(即震源位置)处的质点速度垂直分量和温度增量

激发产生的T波在传播过程中振幅都逐渐衰减, 但是后者衰减得更快, 在传播到(1070m, 1070m)处时已经明显小于通过耦合作用产生的E波, 与之相比, 震源直接激发产生的E波传播到同一位置处, 仍然明显大于通过耦合作用产生的T波。这表明在当前主频下, T波受到很强烈的衰减。

为了说明热波的物理现象, 设置了一个非常高的热导率(4.5×10^6), 同时将网格间距改为0.1mm, 将热源主频改为3.5MHz, 时间步长改为1ns, 在一个很小的时空尺度下进行波场模拟。图7给出了耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 当热源激发时, 采用时间分裂法模拟的时刻 $3\mu\text{s}$ 的质点速度垂直分量(图7a)和增量温度场(图7b)的波场快照。图8a和8b给出了(1070m, 1070m)处质点速度垂直分量和增量温度场的时间记录。

由图可知, 在选定极高热导率的情况下, 热源激发产生的T波的传播速度比E波慢, 但振幅更大、能量更强。Carcione等(2019b)认为高热导率会使超声波频带的弛豫峰向低频移动而且主频很高, 这使T波波前以高频极限速度 $v_{T\infty}$ 传播, E波波前以高频极限速度 $v_{E\infty}$ 传播。衰减几乎可以忽略不计。

5.2 双层模型

构建一个双层模型以分析层界面处的反射和透射特征。其上下层厚度相等, 上部介质的热导率为 4.5×10^7 , P、S波速采用前述数据; 下部介质的热导率为10.5, $v_{P\text{等温}} = 3200 \text{ m s}^{-1}$, $v_S = 1800 \text{ m s}^{-1}$ 。震源为热源, 主频为25Hz, 位置为(1270m, 1150m), 时间步长取0.1ms, 经历时间为275ms。网格间距为10m。

图7 用时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法计算的波场快照($t=325\text{ns}$)

单层模型、耦合情况、热导率 4.5×10^6 、热源(主频 3.5MHz)激发. (a) 质点速度垂直分量; (b) 温度增量

图8 用时间分裂法计算的时间记录

单层模型、耦合情况、热导率 4.5×10^6 、热源(主频 3.5MHz)激发、质点位置(1070m, 1070m). (a) v_z ; (b) ΔT

在上下层热导率相差悬殊的前提下, 若在模拟中沿用地震勘探常用的时间步, 则会导致高热导率区的时间步远远大于热弛豫时间, 从而使时间分裂法在解析求解刚性方程组时出现问题; 若使用合适的极小时间步, 则会使程序运行时间变得过长, 从而使该方法难以实际运用, 因此今后有待于优化这方面的算法. 本文用Crank-Nicolson显式方法(参见网络版附录, <http://earthcn.scichina.com>)计算地震波频率范围内的波场, 用旋转交错伪谱算子计算一阶空间导数, 用中心伪谱算子计算二阶空间导数.

图9给出了上述双层介质模型中质点速度垂直分量和温度场的快照($t=0.275\text{s}$). 从质点速度垂直分量的快照(图9a)中可以观察到: (1) 首波, 其波前是一个平

面; (2) 直达波, 包括直达E波和直达T波; (3) 反射波, 包括反射E波和反射T波; (4) 透射波, 包括透射E波和透射T波; (5) 转换波, 包括反射T波转换到E波、透射T波转换到E波. 由于是热源激发, S波不受热效应影响, 所以看不到S波. 从温度场快照(图9b)中观察不到透射的T波, 这是因为下层热导率很低, T波呈现为扩散振型. 这些图像表明, 即使用一个简单的双层模型表现介质的不均匀性, 所得到的波场也是十分复杂的. 当存在显著的S波(比如由垂向震源产生的S波)时, 波场更为复杂.

5.3 参考温度梯度模型

首先设计一个单层温度梯度分布模型, 网格数

图9 用Crank-Nicolson法结合旋转交错伪谱算子-中心伪谱算子联合求导法计算的波场快照

双层模型、上部介质热导率 4.5×10^7 、下部介质热导率10.5、 v_p 等温 $=3200 \text{ m s}^{-1}$ 、 $v_s=1800 \text{ m s}^{-1}$ 、 $t=0.275 \text{ s}$ 。(a) 质点速度垂直分量; (b) 增量温度

255×255, 网格间距10m. 物性参数选取如5.1节所示. 设模型顶边界参考温度 $T_0(z=0)$ 为300K, 参考温度分布公式为

$$T_0(z) = T_0(0) + d_t z, \quad (31)$$

其中, d_t 为温度梯度, 单位为 K m^{-1} ; z 为深度, 单位为m. 根据顶底界面温度差和模型深度, 计算温度梯度 d_t . 按温度梯度来设置参考温度场. 热导率为10.5, 其他各项物性参数设置与前文相同. 在(1270m, 1270m)用震源激发, 主频为25Hz.

图10给出了温度梯度模型的波场快照($t=0.325 \text{ ms}$). 图10a和10b为耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 底边界参考温度为555K、垂直震源激发、采用时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法得到的结果; 图10c和10d为耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 底边界参考温度为810K、垂直震源激发、采用Crank-Nicolson法计算得到的结果; 图10e和10f为耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 底边界参考温度为1065K、热源激发、采用Crank-Nicolson法计算得到结果. 假设忽略介质受热破裂、相变、脱水、熔融等复杂的物理化学变化, 只考虑热弹性效应.

由图10a和10b可知, 随着深度增加, 参考温度增加, E波振幅有所增大, 但旋转交错网格伪谱法开始变得不稳定而出现伪影. 如果增高温度梯度, 波场快照会严重失真. 因此在模拟热弹性介质中的波场时, 采用具有无条件稳定性质的算法或格式将更有优势. 因此增大温度梯度后, 需要改用相对稳定的Crank-Nicolson算

法. 图10c~10f表明, Crank-Nicolson法相对稳定, 而且随着参考温度增加, E波的振幅增大且波速加快. 这说明, 在基于热弹性理论模拟实际地下介质时, 考虑地温梯度并建立参考地温场是重要的, 能够得到更贴近实际情况的模拟结果.

其次, 在上述单层温度梯度模型基础上, 建立底边界参考温度为1065K的双层模型. 上层热导率为3, 下层热导率为500, 震源位置为(1270m, 1150m), 其余参数同上. 图11给出了质点速度垂直分量(图左列)和增量温度场(图右列)的波场快照($t=325 \text{ ms}$). 图11a和11b为耦合($\alpha \neq 0$)情况下, 垂直震源激发、用Crank-Nicolson法计算得到的结果; 为了便于对比, 图11c和11d给出了针对单层模型(热导率为3)采用同种算法得出的结果.

可见, 图11a与图11c、图11b与图11d无显著差异. 500的热导率高于绝大多数金属矿产的热导率, 即便如此, 在波场快照中也未能体现出高低热导率区域的明显差别. 若设置极高的、不真实的热导率, 或者使用主频非常高(MHz级, 如超声波)的震源, 或许能够体现波形的差异, 但对于地震勘探而言没有实际意义. 不过, 在瞬态温度场的传热学数值模拟中, 热导率间接影响瞬时温度的分布, 从而控制瞬时波场特征, 因此在涉及温度变化现象的一些工程问题中, 可以将热弹性介质波场模拟和瞬态温度场模拟结合应用. 该温度梯度模型可用于模拟井孔内的地温场.

图 10 针对单层温度梯度模型计算的快照($t=0.325\text{ms}$)

左列各图为质点速度垂直分量; 右列各图为增量温度. (a)、(b) 耦合($\alpha \neq 0$)情况、底界参考温度555K, 垂直震源激发、用时间分裂法结合旋转交错网格伪谱法计算; (c)、(d) 底界参考温度810K、垂直震源激发、用Crank-Nicolson法计算; (e)、(f) 底界参考温度1065K、垂直震源激发、用Crank-Nicolson法计算

5.4 合成地震记录

分别对图3e对应的单层介质的非耦合情况、图4e对应的单层介质的耦合情况以及图10a对应的参考温度梯度模型作合成地震记录, 设震源主频为25Hz, 网格步长为10m, 时间步长为0.1ms. 设检波器位于震源

正下方10个网格点处, 合成地震记录如图12所示. 图12a和12b为单层介质的非耦合情况, 经历时间为1s, 采用旋转交错网格伪谱法计算; 图12c和12d为单层介质的耦合情况, 选定热导率为10.5, 经历时间为1s, 采用旋转交错网格伪谱法计算; 图12e和12f为单层参考温

图 11 耦合($\alpha \neq 0$)情况下双层热导率温度梯度模型的波场快照($t=0.325\text{ms}$)

震源激发, 上层热导率为3, 下层热导率为500, 采用Crank-Nicolson法计算. (a)、(c)为质点速度垂直分量; (b)、(d)为增量温度场

度梯度模型的情况, 底边界温度为427.5K, 经历时间为1s, 采用Crank-Nicolson法计算. 由于没有添加吸收边界条件, 为了尽量避免边界反射对合成地震记录的影响, 图12仅截取了合成地震记录图窗的一部分. 值得注意的是, 图12e和12f与图12c和12d相比, E波抵达左右边界的时间要稍微短一些.

为了比较多层弹性模型、常温热弹性模型和温度梯度分布的热弹性模型中的地震记录, 建立一个双层模型. 震源没有时间延迟, 经历时间为0.5s, 时间步长为0.025ms, 网格间距不变, 但地震记录图窗水平方向取[640m, 1920m]. 模型物性参数如5.2节所示, 但将上层的热导率设为与下层热导率一致, 为10.5. 对于温度梯度模型, 设顶边界温度为300K, 底边界温度为555K. 忽略每一层的物性参数对温度和深度的依赖性. 设垂直向震源激发, 主频为25Hz, 位于(1270m, 1050m). 经过反复试验, 对于弹性情况和常温热弹性情况, 可采用旋转交错网格伪谱法模拟, 而对于温度梯度分布的热弹

性情况, 宜采用Crank-Nicolson法模拟. 为简便和清晰, 只给出质点速度水平分量的地震记录, 如图13a~13c所示. 由图13b和13c可见, 在常温热弹性模型中, 直达波和反射波的地震记录比弹性模型中的地震记录出现得更早, 而且速度更快; 考虑温度梯度后, 温度梯度热弹性模型中的直达波和反射波的地震记录比常温热弹性模型中的地震记录出现得更早. 而且, 在时间步长相同、空间步长相同的情况下, Crank-Nicolson算法的精度要比旋转交错网格伪谱法低, 但更加稳定.

6 结论

本文利用时间分裂结合旋转交错网格伪谱法和Crank-Nicolson显式方法实现了L-S广义热弹性介质的单层常温模型、双层常温模型和温度梯度模型的波场数值模拟, 在此基础上讨论了L-S热弹性波的特征和传播规律. 具有如下创新点: (1) 基于L-S广义热弹性理

图 12 合成地震记录的水平分量(左列)和垂直分量(右列)

左列为水平分量, 右列为垂直分量. (a)、(b) 单层模型、非耦合情况; (c)、(d) 单层模型、耦合、热导率10.5; (e)、(f) 单层参考温度梯度模型、耦合、底边界温度为555K、热导率10.5

论, 提出了时间分裂法和旋转交错网格伪谱法相结合的数值模拟方法; (2) 在求解各向同性热弹性介质的一阶速度-应力-温度微分方程时, 提出了用中心伪谱算子计算空间二次导数、旋转交错伪谱算子计算空间一次导数的计算方法; (3) 设计了温度梯度模型, 研究了参考温度分布对波形特征变化的影响.

本文的研究取得了以下结论和认识:

(1) 在时间步长较小的前提下, 旋转交错网格伪谱法能够有效消除数值伪影并抑制振铃, 其性能优于标准网格伪谱法. 提出的旋转交错网格伪谱法与时间分

裂法相结合, 能够以较大时间步长模拟单层热弹性各向同性介质中的波场. 并且在同等条件下, 这种方法比常规伪谱法、交错网格伪谱法占用更多物理内存, 需要更长的计算时间; 在计算二阶空间偏导数时, 用中心伪谱算子取代旋转交错伪谱算子, 将在不明显降低精度的前提下节省一定的计算时间.

(2) 在物性参数相同的情况下, 为了满足伪谱法的稳定性条件, 旋转交错网格伪谱法的时间步长比Carcione等所取的时间步长(网格间距为10m时, 取1ms)要小一些. 该算法不适合热物性变化比较大的非均匀介

图 13 合成地震记录的水平分量

(a) 双层模型、非耦合情况, 用旋转交错网格伪谱法计算; (b) 双层常温模型、耦合、热导率10.5, 用旋转交错网格伪谱法计算; (c)、(f) 双层参考温度梯度模型、耦合、底边界温度为555K、热导率10.5, 用Crank-Nicolson显式方法计算

质, 可采用Crank-Nicolson显式方法求解. 但有待于开发更好的算法.

(3) 在单层介质中能够看到三种波: E波、T波和S波. 在热物性对比强烈的双层介质中, 采用热源激发形式可以观测到多种波, 包括首波、直达波、反射波、透射波和转换波; 通过研究分界面处的反射和透射现象, 能够深入了解热弹性介质的地震响应, 为地震勘探研究奠定基础.

(4) 在温度梯度模型中, 随着参考温度增加, E波除了振幅增大之外, 波速也变得更快. 因此考虑参考温度梯度对于热弹性介质波场模拟具有重要意义.

(5) 在地震波频率范围内, 绝大多数金属矿产的热导率量级对于波场特征的影响并不明显.

参考文献

董良国, 马在田, 曹景忠, 王华忠, 耿建华, 雷兵, 许世勇. 2000. 一阶弹性波方程交错网格高阶差分分解法. 地球物理学报, 43: 411–419

符力耘, 牟永光. 1994. 弹性波边界元法正演模拟. 地球物理学报, 37: 521–529

刘文堂, 胡顺田, 李军, 熊仲华, 赵永安. 2008. 地震波在热弹性介质中的衰减性质及其相应 Q 值的计算方法. 地震, 28: 39–45

吴宝年, 吴肃琴, 黄义, 丰波. 2012. 交错网格在伪谱法弹性波场数值模拟中的应用. 石油物探, 51: 440–445+421

Achenbach J D. 1973. Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam: Northolland. 129

Afanasiev M, Boehm C, van Driel M, Krischer L, Rietmann M, May D A, Knepley M G, Fichtner A. 2019. Modular and flexible spectral-element waveform modelling in two and three dimensions. *Geophys J Int*, 216: 1675–1692

Berezovski A, Berezovski M. 2013. Influence of microstructure on thermoelastic wave propagation. *Acta Mech*, 224: 2623–2633

Berezovski A, Engelbrecht J, Maugin G A. 2000. Thermoelastic wave propagation in inhomogeneous media. *Archive Appl Mech (Ingenieur Archiv)*, 70: 694–706

Berezovski A, Engelbrecht J, Maugin G A. 2003. Numerical simulation of two-dimensional wave propagation in functionally graded materials. *Eur J Mech-A/Solids*, 22: 257–265

- Berezovski A, Maugin G A. 2001. Simulation of thermoelastic wave propagation by means of a composite wave-propagation algorithm. *J Comput Phys*, 168: 249–264
- Berezovski A, Maugin G A. 2002. Thermoelastic wave and front propagation. *J Thermal Stresses*, 25: 719–743
- Biot M A. 1956. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *J Appl Phys*, 27: 240–253
- Boley B A, Weiner J H. 1960. Theory of Thermal Stresses. Mineola, NY: Dover Publishing. 586
- Bouchon M, Campillo M, Gaffet S. 1989. A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces. *Geophysics*, 54: 1134–1140
- Bracewell R N. 1978. The Fourier Transform and Its Applications. 2nd ed. New York: McGraw-Hill. 444
- Brebbia C A. 1978. The Boundary Element Method for Engineers. London: Pentech Press. 189
- Carcione J M. 2014. Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier. 661
- Carcione J M, Cavallini F, Wang E, Ba J, Fu L. 2019a. Physics and simulation of wave propagation in linear thermoporoelastic media. *J Geophys Res-Solid Earth*, 124: 8147–8166
- Carcione J M, Quiroga-Goode G. 1995. Some aspects of the physics and numerical modeling of Biot compressional waves. *J Comp Acous*, 3: 261–280
- Carcione J M, Wang Z W, Ling W, Salusti E, Ba J, Fu L Y. 2019b. Simulation of wave propagation in linear thermoelastic media. *Geophysics*, 84: T1–T11
- Chakraborty A, Gopalakrishnan S. 2004. Thermoelastic wave propagation in anisotropic layered media—A spectral element formulation. *Int J Comput Methods*, 1: 535–567
- Chen J K, Beraun J E, Grimes L E, Tzou D Y. 2003. Short-time thermal effects on thermomechanical response caused by pulsed lasers. *J Thermophys Heat Transfer*, 17: 35–42
- Chester M. 1963. Second sound in solids. *Phys Rev*, 131: 2013–2015
- Corrêa G J P, Spiegelman M, Carbotte S, Mutter J C. 2002. Centered and staggered Fourier derivatives and Hilbert transforms. *Geophysics*, 67: 1558–1563
- Deresiewicz H. 1957. Plane waves in a thermoelastic solid. *J Acoust Soc Am*, 29: 204–209
- Francis P H. 1972. Thermo-mechanical effects in elastic wave propagation: A survey. *J Sound Vib*, 21: 181–192
- Green A E, Lindsay K A. 1972. Thermoelasticity. *J Elasticity*, 2: 1–7
- Green A E, Naghdi P M. 1991. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proc R Soc Lond A*, 432: 171–194
- Hosseini S M. 2014. Application of a hybrid mesh-free method for shock-induced thermoelastic wave propagation analysis in a layered functionally graded thick hollow cylinder with nonlinear grading patterns. *Eng Anal Bound Elem*, 43: 56–66
- Hosseini S M, Shahabian F, Sladek J, Sladek V. 2011. Stochastic meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for thermo-elastic wave propagation analysis in functionally graded thick hollow cylinders. *Comp Model Eng Sci*, 71: 39–66
- Hosseini zad S K, Komeili A, Akbarzadeh A H, Eslami M R. 2010. Numerical simulation of elastic and thermoelastic wave propagation in two-dimensional classical and generalized coupled thermoelasticity. In: ASME 2010 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis. Istanbul: ASME. 135–145
- Jain M K. 1984. Numerical Solution of Differential Equations. 2nd ed. New York: Wiley. 698
- Kawase H. 1988. Time-domain response of a semi-circular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bull Seismol Soc Amer*, 78: 1415–1437
- Kosloff D, Reshef M, Loewenthal D. 1984. Elastic wave calculations by the Fourier method. *Bull Seismol Soc Amer*, 74: 875–891
- Lord H W, Shulman Y. 1967. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J Mech Phys Solids*, 15: 299–309
- Lu Y, Peng S, Cui X, Li D, Wang K, Xing Z. 2020. 3D FDTD anisotropic and dispersive modeling for GPR using rotated staggered grid method. *Comput Geosci*, 136: 104397
- Lysmer J, Drake L A. 1972. A finite element method for seismology. In: Methods in Computational Physics: Advances in Research and Applications. New York: Elsevier. 181–216
- Madariaga R. 1976. Dynamics of an expanding circular fault. *Bull Seismol Soc Amer*, 66: 639–666
- Marfurt K J. 1984. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, 49: 533–549
- Maurer M J. 1969. Relaxation model for heat conduction in metals. *J Appl Phys*, 40: 5123–5130
- Nettleton R E. 1960. Relaxation theory of thermal conduction in liquids. *Phys Fluids*, 3: 216–225
- Özdenvar T, McMechan G A. 1996. Causes and reduction of numerical artefacts in pseudo-spectral wavefield extrapolation. *Geophys J Int*, 126: 819–828
- Padovani E, Priolo E, Seriani G. 1994. Low and high order finite element method: Experience in seismic modeling. *J Comp Acous*, 02: 371–422
- Robertsson J O A. 1996. A numerical free-surface condition for elastic/viscoelastic finite-difference modeling in the presence of topogra-

- phy. *Geophysics*, 61: 1921–1934
- Rudgers A J. 1990. Analysis of thermoacoustic wave propagation in elastic media. *J Acoust Soc Am*, 88: 1078–1094
- Saenger E H, Gold N, Shapiro S A. 2000. Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, 31: 77–92
- Sánchez-Sesma F J. 1983. Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bull Seismol Soc Amer*, 73: 1621–1636
- Sarma G S, Mallick K, Gadhinglajkar V R. 1998. Nonreflecting boundary condition in finite-element formulation for an elastic wave equation. *Geophysics*, 63: 1006–1016
- Serón F J, Sanz F J, Kindelán M, Badal J I. 1990. Finite-element method for elastic wave propagation. *Commun Appl Numer Methods*, 6: 359–368
- Sumi N. 2001. Numerical solutions of thermoelastic wave problems by the method of characteristics. *J Thermal Stresses*, 24: 509–530
- Veres I A, Berer T, Burgholzer P. 2013. Numerical modeling of thermoelastic generation of ultrasound by laser irradiation in the coupled thermoelasticity. *Ultrasonics*, 53: 141–149
- Virieux J. 1984. SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49: 1933–1942
- Wang K, Peng S, Lu Y, Cui X. 2020a. The velocity-stress finite-difference method with a rotated staggered grid applied to seismic wave propagation in a fractured medium. *Geophysics*, 85: T89–T100
- Wang Z W, Fu L Y, Wei J, Hou W, Ba J, Carcione J M. 2020b. On the Green function of the Lord-Shulman thermoelasticity equations. *Geophys J Int*, 220: 393–403
- Witte D, Richards P G. 1987. Contributions to the pseudospectral method for computing synthetic seismograms. SEG Technical Program Expanded Abstracts 1987, Society of Exploration Geophysicists. 517–519
- Zener C. 1948. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. Chicago: University of Chicago Press. 170
- Zou P, Cheng J B. 2016. Modified pseudo-spectral method for wave propagation modelling in arbitrary anisotropic media. In: 78th EAGE Conference and Exhibition 2016. Vienna. 1–5
- Zou P, Cheng J. 2018. Pseudo-spectral method using rotated staggered grid for elastic wave propagation in 3D arbitrary anisotropic media. *Geophys Prospecting*, 66: 47–61

(责任编辑: 印兴耀)