双子黑洞的量子效应

赵 峥　　　章 德 海
（北京师范大学物理系）　（北京大学物理系）

Kasuya[1] 最近研究了含有磁单极或双子的引力场，得到 Kerr-Newman 型时空中的双子解(Kerr-Newman-Kasuya 解)．此解可以描述含有四个参量(质量 M，角动量 J，电荷 Q 和磁荷 Φ)的黑洞，即，比 Kerr-Newman 黑洞更为一般的 K-N-K 黑洞(双子黑洞)．我们将指出，在考虑量子效应的情况下，这种黑洞也是热的，也要产生热辐射和非热辐射，甚至可以辐射磁单极和双子．特别有趣的是，形成黑洞的双子一般是不稳定的，辐射将使它演化为静止的磁单极．如果磁荷不是量子化的，形成黑洞的磁单极也会被蒸发掉．如果磁荷是量子化的，则磁单极黑洞可逐渐稳定在绝对零度的状态，从而导致磁单极质量的量子化．

在 K-N-K 时空中，我们有[1,2]

$$
\begin{aligned}
dS^2 = &-\left[1-\frac{2Mr-(Q^2+\Phi^2)}{\Sigma}\right]dt^2+\frac{\Sigma}{\Delta}dr^2+\Sigma d\theta^2\\
&+\left\{\frac{[2Mr-(Q^2+\Phi^2)]a^2\sin^2\theta}{\Sigma}+(r^2+a^2)\right\}\sin^2\theta d\phi^2\\
&-\frac{[2Mr-(Q^2+\Phi^2)]2a\sin^2\theta}{\Sigma}d\phi dt, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$$
r_\pm = M\pm(M^2-a^2-Q^2-\Phi^2)^{1/2},\quad \kappa_\pm=\frac{r_+-r_-}{2(r_\pm^2+a^2)},\quad \Omega_H=\frac{a}{r_+^2+a^2}, \qquad (2)
$$

$r_\pm$ 是视界的位置，$\kappa_\pm$ 是视界表面重力，其中“+”号对应外视界，“-”号对应内视界，Ω_H 是外视界的拖曳速度．这里

$$
\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta,\quad \Delta=r^2+a^2+Q^2+\Phi^2-2Mr,\quad a=J/M.
$$

Klein-Gordon 方程[3]是

$$
\frac{1}{\sqrt{-g'}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-ieA_\mu-igB_\mu\right)\left[\sqrt{-g'}\,g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-ieA_\nu-igB_\nu\right)\phi\right]=\mu^2\phi, \qquad (3)
$$

e、g 分别是粒子的电荷和磁荷，$g'\equiv\det(g_{\mu\nu})$．

分离变量

$$
\phi(r,\theta,\phi,t)=R(r)\Theta(\theta)e^{-i(\omega t-\nu\phi)}, \qquad (4)
$$

并引入 Tortoise 坐标变换

$$
\frac{d\hat{r}}{dr}=1/2\kappa_+(r-r_+), \qquad (5)
$$

在视界附近方程(3)可以化成

$$
\frac{d^2R}{d\hat{r}^2}+(\omega-\omega_0)^2R=0, \qquad (6)
$$

本文 1983 年 2 月 6 日收到．

这里[4,5]

$$\omega_0 = eV_e + gV_m + \Omega_H(\nu - eA_3 - gB_3), \quad V_e = -A_0, \quad V_m = -B_0, \tag{7}$$

$$A_0 = \frac{1}{\Sigma}(-Qr + \Phi a\cos\theta), \qquad B_0 = \frac{-1}{\Sigma}(\Phi r + Qa\cos\theta),$$

$$A_3 = \frac{Q}{\Sigma} ra\sin^2\theta + \Phi\left[1 - \frac{r^2+a^2}{\Sigma}\cos\theta\right], \quad B_3 = \frac{\Phi}{\Sigma} ra\sin^2\theta - Q\left[1 - \frac{r^2+a^2}{\Sigma}\cos\theta\right], \tag{8}$$

$$A_1 = A_2 = 0, \qquad B_1 = B_2 = 0.$$

还可以写成

$$\omega_0 = eV_{oe} + gV_{om} + \nu\Omega_H, \tag{9}$$

其中

$$V_{oe} = \frac{Qr_+ - \Phi a}{r_+^2 + a^2}, \qquad V_{om} = \frac{\Phi r_+ + Qa}{r_+^2 + a^2}. \tag{10}$$

把方程(6)的出射波解解析延拓到视界内部[6],可以得出 K-N-K 黑洞将产生 Hawking 辐射的结论,算得的辐射谱和辐射温度为

$$N = 1/[e^{\frac{\omega-\omega_0}{K_BT}} \pm 1], \qquad T = \frac{\kappa_+}{2\pi K_B}, \tag{11}$$

这里"+"号对应费米子,"−"号对应玻色子.

对于 Dirac 粒子,我们可以仿照文献[7,8]的方法,在 Dirac 方程中引进相应的磁荷项后,严格求得方程(11)所示的辐射谱和辐射温度.

另外,按照文献[9]所示的方法,不难证明,对 K-N-K 黑洞也可以构造一个卡诺循环,用卡诺循环定义的温度与上述辐射温度一致.

以上计算表明,K-N-K 黑洞具有温度,它视界附近的真空涨落导致 Hawking 辐射,不但会辐射光子、电子、中微子……,还会辐射磁单极和双子.

下面我们讨论 K-N-K 时空中的哈密顿-雅可比方程[10]

$$g^{\mu\nu}\left[\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - eA_\mu - gB_\mu\right]\cdot\left[\frac{\partial S}{\partial x^\nu} - eA_\nu - gB_\nu\right] + \mu^2 = 0, \tag{12}$$

其中 $S = \int L d\tau$. 分离变量

$$S = -\omega t + \nu\phi + R(r) + \Theta(\theta), \tag{13}$$

并作坐标变换 $d\hat{r} = dr/(r - r_+)$,我们可以得到 K-N-K 时空中 Dirac 真空的能级分布

$$\omega^+ \geqslant \omega_0^+ = eV_e + gV_m + \Omega(\nu - eA_3 - gB_3) + E,$$
$$\omega^- \leqslant \omega_0^- = eV_e + gV_m + \Omega(\nu - eA_3 - gB_3) - E. \tag{14}$$

禁区是 $\omega_0^- < \omega < \omega_0^+$,其宽度为 $2E$,这里

$$E = \left\{(r - r_+)\left[\frac{-\theta_3}{\theta_1}(\Theta' - eA_2 - gB_2)^2 - \frac{\mu^2}{\theta_1}\right] - \delta\right\}^{1/2},$$

$$\delta = (\nu - eA_3 - gB_3)^2\cdot[(\Omega')^2 - (\Omega)^2], \quad \Omega = \frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad \Omega' = \left(\frac{\theta_4}{\theta_1}\right)^{1/2}, \tag{15}$$

$$\theta_1 = g^{00}(r - r_+), \theta_2 = g^{03}(r - r_+), \theta_3 = g^{22}, \theta_4 = g^{33}(r - r_+).$$

当 $r \to r_+$ 时,我们有 $\delta \to 0$, $E \to 0$, $\omega_0^+ = \omega_0^- = \omega_0 \equiv eV_e + gV_m + \Omega_H(\nu - eA_3 - gB_3)$ 显然,当 $\omega_0 > \mu$ 时,在视界附近会出现正负能级交错,从而导致非热辐射(Starobinsky-Unruh 效应),辐射粒子的能量 $\omega \leqslant \omega_0$.

由于 K-N-K 黑洞的无限红移面[1]

$$r_{\pm}^{\infty} = M \pm (M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2 - \Phi^2)^{1/2},$$

一般不与视界重合，有能层存在，不难证明这种黑洞也存在彭若斯效应及另一种非热辐射-Misner 超辐射，辐射粒子的能量也是 $\omega \leqslant \omega_0$.

容易看出，产生上述非热辐射的原因，是由于 K-N-K 黑洞存在转动、电荷和磁荷. 非热辐射光子、电子、中微子、磁单极甚至双子的结果将逐步扔掉黑洞的角动量、电荷和磁荷，使 K-N-K 黑洞蜕化为史瓦西黑洞.

下面我们来讨论一个双子自身形成黑洞的可能性.

形成黑洞的双子的半径是

$$r_+ = M + (M^2 - a^2 - Q^2 - \Phi^2)^{1/2}. \tag{16}$$

显然，r_+ 的范围是

$$M \leqslant r_+ \leqslant 2M = r_g, \tag{17}$$

其中 r_g 是史瓦西半径，M 等于绝对零度的极端双子黑洞的半径(对于极端双子黑洞，$M^2 = a^2 + Q^2 + \Phi^2$). 当双子的半径 r 满足

$$r \leqslant r_+ = AM \tag{18}$$

时，双子形成黑洞，这里，参数 A 的范围是 $1 \leqslant A \leqslant 2$. 双子黑洞是热的，不稳定的，它将产生热辐射和非热辐射. 如果双子或磁单极的磁荷是磁荷的最小单位，双子黑洞将逐渐演化为绝对零度的，非转动的磁单极黑洞，其中

$$a = Q = 0, \qquad M = |\Phi|. \tag{19}$$

这种黑洞是稳定的，它的质量如 (19) 式所示，是量子化的. 如果磁单极的磁荷不是量子化的，磁单极黑洞或双子黑洞将蒸发而消失.

Schwinger 双子的半径和质量没有受到理论的限制，它可能形成黑洞. 当然，这种黑洞是热的，不稳定的. 它将演化为绝对零度的、非转动的 Dirac 磁单极黑洞，质量为 $M = |\Phi|$.

t'Hooft 磁单极或 Julia-Zee 双子的质量 M_m 和半径 r_m 被大统一理论限制到

$$M_m = \frac{1}{\alpha} M_x, \qquad r_m = M_x^{-1}, \tag{20}$$

其中 $\alpha = 1/137$，M_x 是大统一能标. 把 (20) 式代入 (18) 式，得到双子形成黑洞的条件

$$M_x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{A}} \cdot M_P \sim 0.01 M_P, \tag{21}$$

这里，$M_P = \left(\frac{c\hbar}{G}\right)^{1/2}$ 是普朗克质量. 大统一能标满足

$$M_P \geqslant M_x \geqslant 0.01 M_P \tag{22}$$

的理论中的 t'Hooft 单极和 Julia-Zee 双子将形成黑洞，黑洞的质量是

$$M_m = \frac{1}{\alpha} M_x, \tag{23}$$

即

$$100 M_P \geqslant M_m \geqslant M_P,$$

或

$$10^{-3}\text{克} \geqslant M_m \geqslant 10^{-5}\text{克}. \tag{24}$$

众所周知，弯曲时空量子场论允许讨论的黑洞的质量下限是 M_P，即 10^{-5} 克，所以，上述质量的

t'Hooft 单极黑洞或 Julia-Zee 双子黑洞是有可能存在的.

当然,(24)式所示的 M_m, 比通常的大统一理论所预言的磁单极的质量要高,但与超对称大统一理论所预言的磁单极质量相当[11],所以,双子形成黑洞的设想,是值得考虑的.

由于黑洞的温度仅决定于它的表面重力 κ_+, Julia-Zee 双子与 Schwinger 双子有相同的度规,因而有相同的 κ_+, 所以 Julia-Zee 双子黑洞与 Schwinger 双子黑洞一样是热的,不稳定的. 辐射将使 Julia-Zee 双子黑洞演变为绝对零度的、非转动的 t'Hooft 单极黑洞,其质量为

$$M_m = \frac{1}{\sqrt{G}}|\Phi| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M_P \sim 10 M_P, \tag{25}$$

这里 $\Phi^2 = \frac{\hbar c}{\alpha}$. 所以,超对称大统一理论中的 Julia-Zee 双子是不稳定的,它必将蜕变为 t'Hooft 单极,而稳定单极的质量又必定如(25)式所示,约 10^{-4} 克.

致谢: 作者曾得到中国科技大学朱栋培同志、理论物理研究所郭汉英副研究员的帮助,并和中国科技大学汪克林副教授、高能物理研究所马中骐博士、物理研究所李国栋研究员、南京大学彭秋和副教授、北京师范大学刘辽教授、裴寿镛同志,作过有益的讨论,在此表示深切感谢.

参 考 文 献

[1] Kasuya, M., *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 995.
[2] 赵 峥、桂元星,天体物理学报, **3**(1983), 146.
[3] Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3105.
[4] Rohrlich, F., *Phys. Rev.*, **150** (1966), 1104.
[5] Cabibbo, N., Ferrari, E., *Nuovo Cimento.*, **23**(1962), 1147.
[6] 赵 峥,物理学报, **30**(1981), 1508.
[7] 刘 辽、许殿彦,物理学报, **29**(1980), 1617.
[8] 赵 峥、桂元星、刘 辽,天体物理学报, **1**(1981), 141.
[9] 赵 峥、刘 辽,科学通报, **28**(1983), 7: 398.
[10] 赵 峥,物理学报, **32**(1983), 1233.
[11] 宋行长,1982年武汉粒子物理讨论会文集, 87.

[redacted]