带可分解性质的幂等拟群大集

周君灵*, 常彦勋

北京交通大学数学研究所, 北京 100044

E-mail: jlzhou@bjtu.edu.cn, yxchang@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2012-03-26; 接受日期: 2012-06-01; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 61071221 和 11101026) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2011JBZ012 和 2011JBM364)

资助项目

摘要 具有幂单正交侶的幂等拟群称为可分解的. 具有幂等正交侶的幂等拟群称为几乎可分解的. 若 v 元集合上的所有分量互不相同的 3- 向量能够分拆成互不相交 (幂等 3- 向量除外) 的 $v-2$ 个 v 阶幂等拟群, 则称之为 v 阶幂等拟群大集. 本文使用 t - 平衡设计 ($t=2,3$) 的方法给出了可分解幂等拟群大集、几乎可分解幂等拟群大集及可分解对称幂等拟群大集 (即可分解高尔夫设计) 的构造方法, 给出了其存在性的若干结果.

关键词 幂等拟群 对称 有序设计 可分解 几乎可分解 大集

MSC (2010) 主题分类 05B07

1 引言

令 X 是 v 元集合, H 是 X 的 h 元子集, $\circ$ 是定义在 X 上的二元运算. 若下列两个条件满足: (1) 对任意 $a, b \in X$ 且 $\{a, b\} \not\subseteq H$, 方程 $a \circ x = b$ 及 $x \circ a = b$ 在 X 中各恰有一解; (2) 对任意 $a, b \in H$, 上述两个方程都无解, 则三元组 $(X, H, \circ)$ 称为以 H 为洞的不完全拟群. 若对任意 $a \in X \setminus H$, $a \circ a = a$ 都成立, 则称 $(X, H, \circ)$ 为幂等的, 记作 $\text{IQ}(v, h)$. 若存在固定元 $e \in X$, 使得对任意 $a \in X \setminus H$, 都有 $a \circ a = e$, 则称 $(X, H, \circ)$ 为幂单的. 在幂等 $(X, H, \circ)$ 中, 若对任意 $a, b \in X$ 且 $\{a, b\} \not\subseteq H$, 都有 $a \circ b = b \circ a$, 则称其为对称的, 记作 $\text{SIQ}(v, h)$. 上述定义中, 若 $H = \emptyset$, 则省去记号 H 相应定义 $(X, \circ)$ 为 v 阶拟群、幂等拟群 $\text{IQ}(v)$ 及对称幂等拟群 $\text{SIQ}(v)$.

设 $(X, H, \circ)$ 是 $\text{IQ}(v, h)$. 令 $\mathcal{A} = \{(x, y, x \circ y) : x, y \in X, \{x, y\} \not\subseteq H, x \neq y\}$. 于是 $\mathcal{A}$ 对应一个 $(v(v-1) - h(h-1)) \times 3$ 阵列, 使得: (1) 每行都包括 X 的 3 个不同元素; (2) 任意两列包含 $(X \times X) \setminus (H \times H)$ 中的有序对正好一次. 这种阵列称为以 H 为洞的不完全有序设计, 记为 $\text{OD}(v, h)$, 用 $(X, H, \mathcal{A})$ 表示. 通过补充 $v-h$ 个幂等行, $\text{OD}(v, h)$ 即扩充成 $\text{IQ}(v, h)$. 当 $H = \emptyset$ 时, $\text{OD}(v, 0)$ 即为有序设计 $\text{OD}(v)$.

两个 $\text{OD}(v)$ $(X, \mathcal{A})$ 与 $(X, \mathcal{B})$ 称为不交若 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. 如果 X 的所有分量互不相同的 $v(v-1)(v-2)$ 个 3- 向量能够划分成 $v-2$ 个两两不交的 $\text{OD}(v)$, 则称这 $v-2$ 个 $\text{OD}(v)$ 形成 $\text{OD}(v)$ 的大集. 对大集中每个 $\text{OD}(v)$ 补充 v 个幂等行, 即得 v 阶幂等拟群大集 $\text{LIQ}(v)$. 对所有 $v \geq 3$ 及 $v \neq 6$, 都存在 $\text{LIQ}(v)$ (参见 [1-3]).

令 $(X, H, \circ)$ 是不完全拟群. 设 A 是 X 的子集, P 是 X 的一些有序对的集合. 若 $\{a : (a, b) \in P\} = \{b : (a, b) \in P\} = \{a \circ b : (a, b) \in P\} = X \setminus A$, 则称 P 是以 A 为洞的带洞截态. 带洞截态亦常表示为 $\{(a, b, a \circ b) : (a, b) \in P\}$. 当 $A = \emptyset$ 时即定义了 X 的截态. 两个不完全拟群 $(X, H, \circ)$ 和 $(X, H, \cdot)$ 称作是正交的, 若 $\{(a \circ b, a \cdot b) : a, b \in X, \{a, b\} \not\subseteq H\} = (X \times X) \setminus (H \times H)$. 显然, $(X, H, \circ)$ 有正交侣当且仅当 $\{(a, b) : a, b \in X, \{a, b\} \not\subseteq H\}$ 能够划分成 $v - h$ 个 X 的截态及 h 个以 H 为洞的带洞截态. 这 v 个截态 (包括带洞截态) 的集合称作 $(X, H, \circ)$ 的截态分解. 相应地, 可定义 (不完全) 有序设计的截态与截态分解.

设 $(X, H, \circ)$ 是一个带有截态分解 Γ 的 $\text{IQ}(v, h)$. 若 Γ 中包含幂等带洞截态 $\{(a, a, a) : a \in X \setminus H\}$, 则称 $(X, H, \circ)$ 为可分解的并记作 $\text{RIQ}(v, h)$. 该情形下, $\text{IQ}(v, h)$ 有一个幂等的正交侣. $\text{IQ}(v, h)$ 亦可能有其他形式的正交侣. 例如, 其正交侣可能是幂等的. 换言之, 设 $\text{IQ}(v, h)$ 有截态分解 $\Gamma = \{T_a : a \in X\}$, 其中 $T_a, a \in X \setminus H$, 是 Γ 中的所有 $v - h$ 个 X 的截态, 若 $(a, a, a) \in T_a$ 对所有 $a \in X \setminus H$ 都成立, 则该种 $\text{IQ}(v, h)$ 称作是几乎可分解的, 记为 $\text{ARIQ}(v, h)$. 从 $\text{RIQ}(v, h)$ 中移除幂等带洞截态, 则将 $\text{RIQ}(v, h)$ 表示成了 $\text{ROD}(v, h)$. 从 $\text{ARIQ}(v, h)$ 的每个 X 的截态中移除幂等的 3- 向量即得 $\text{AROD}(v, h)$. 显然, 一个 $\text{IQ}(v, h)$ 成为 $\text{ARIQ}(v, h)$ 当且仅当它有一个正交侣也做成 $\text{ARIQ}(v, h)$. 于是, $\text{ARIQ}(v, h)$ 及其正交侣均对应 $\text{AROD}(v, h)$, 此时称其对应的两个 $\text{AROD}(v, h)$ 也正交. 上述定义中, 若 $H = \emptyset$, 即得概念 $\text{RIQ}(v)$ 、 $\text{ARIQ}(v)$ 、 $\text{ROD}(v)$ 及 $\text{AROD}(v)$.

鉴于幂等拟群大集的存在性已经完全确定, 带有约束条件的此类大集值得进一步研究. 若 $\text{LIQ}(v)$ 中的 $v - 2$ 个成员都是 $\text{RIQ}(v)$, 则称其为可分解幂等拟群大集, 记作 $\text{LRIQ}(v)$. 若 $\text{LIQ}(v)$ 的每个成员都是 $\text{ARIQ}(v)$, 则称其为几乎可分解幂等拟群大集, 记作 $\text{LARIQ}(v)$. 若 $\text{LIQ}(v)$ 中的所有成员都是对称的, 称其为对称幂等拟群大集, 又称为高尔夫设计, 记作 $\text{G}(v)$. 进一步地, 若 $\text{G}(v)$ 中每个成员都是可分解的, 即为 $\text{RSIQ}(v)$, 则称其为可分解高尔夫设计, 记作 $\text{RG}(v)$. 文献 [4–6] 研究了高尔夫设计, 文献 [7, 8] 研究了 LRIQ , 得到了如下结果.

引理 1.1 ^[4–8] (1) $\text{G}(v)$ 存在当且仅当 $v \equiv 1 \pmod{2}$, $v \geq 3$ 且 $v \neq 5$.

(2) 当 $v \geq 3$ 时, 除去例外值 $v = 6$ 和可能的例外值 $v \in \{14, 20, 22, 26, 28, 34, 35, 38, 40, 42, 46, 50, 55, 62\}$ 外, $\text{LRIQ}(v)$ 都存在.

本文将针对引理 1.1 的可能例外值研究 LRIQ 的存在性, 还将研究 LARIQ 及可分解高尔夫设计的构造方法. 下面给出更多相关组合设计的概念.

可分组设计 $\text{GDD}(t, K, v)$ 是满足如下条件的三元组 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$: (1) X 是 v 元集合 (X 的元素叫做点); (2) $\mathcal{G}$ 是 X 的一个子集族 (每个子集叫做组), 该子集族划分 X ; (3) $\mathcal{B}$ 是 X 的某些子集 (叫做区组) 的集合, 区组大小取自集合 K , 并且每个区组与任意组至多交于一点; (4) X 的任意取自 t 个不同组的 t 个点恰包含于唯一区组中. GDD 的组型或型定义为多重集 $T = \{|G| : G \in \mathcal{G}\}$. 通常用指数形式 $a^i b^j c^k \dots$ 表示组型, 指在多重集中有 i 个 a , j 个 b , 等等. 型为 1^v 的 $\text{GDD}(t, K, v)$ 称为 t - 平衡设计, 记作 $\text{S}(t, K, v)$, 此时省略组型只用对子 $(X, \mathcal{B})$ 表示. 2- 平衡设计 $\text{S}(2, K, v)$ 又称为成对平衡设计, 也记作 $\text{PBD}(v, K)$. 若 $K = \{k\}$, 则用记号 $\text{PBD}(v, k)$.

令 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是一个 GDD . 若 $\mathcal{B}$ 有一个划分 $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$, 使得每个 P_i 都做成 X 的平行类, 即 X 的一个划分, 则此 GDD 称为是可分解的并记作 RGDD , Γ 称为该 GDD 的分解. 型为 1^v 的 $\text{RGDD}(t, k, v)$ 即为可分解的 $\text{S}(t, k, v)$, 记作 $\text{RS}(t, k, v)$. $\text{RS}(2, 3, v)$ 叫做 v 阶 Kirkman 三元系, 记作 $\text{KTS}(v)$.

v 阶的有序烛台系 (简记 OCS), 是一个满足如下条件的四元组 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$: (1) X 是一个 v 元集合; (2) S (叫作柄或干) 是 X 的 s - 子集; (3) $\mathcal{G}$ 是 $X \setminus S$ 的子集族, 该子集族划分 $X \setminus S$; (4) $\mathcal{A}$ 是 X

的某些 3- 向量 (区组) 的集合; (5) 设 $T = (a, b, c)$ 是 X 中的 3- 向量, 且 3 个分量互不相同. 若对任意 $G \in \mathcal{G}$, 都有 $|\{a, b, c\} \cap (S \cup G)| < 3$, 则 T 正好包含于唯一一个区组中. 但是, 对任意 $G \in \mathcal{G}$, $S \cup G$ 中的任意 3- 向量都不包含于任何区组当中. OCS 的型定义为 $(\{|G| : G \in \mathcal{G}\} : s)$.

型为 $(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$ 的可划分有序烛台系 (简记作 POCS) 是一个 OCS $(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$ $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{A}$ 可划分为 $\sum_{i=1}^r g_i$ 个不交子集 $\mathcal{A}_x$, $x \in G$, $G \in \mathcal{G}$, 使得对于任意 $x \in G$ 及 $G \in \mathcal{G}$, $(X, G \cup S, \mathcal{A}_x)$ 都做成 $\text{OD}(\sum_{i=1}^r g_i + 2, |G| + 2)$. 常用 $\{(X, G \cup S, \mathcal{A}_x) : x \in G, G \in \mathcal{G}\}$ 来表示 $\text{POCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$.

本文主要研究 LRIQ、LARIQ 及 RG 的构造方法及存在性, 使用的基本工具均借助于具有相应可分解性质的 POCS, 而 3- 平衡设计和 2- 平衡设计在 POCS 的构造中发挥着重要的作用. 本文结构安排如下: 第 2 节利用特殊 3- 平衡设计构造 LRIQ, 给出 LRIQ(26) 的存在性; 第 3 和 4 节主要利用 PBD 设计构造 LARIQ 和 RG, 给出了 LARIQ 存在的无穷类和 RG 的渐近性存在结果; 最后一节提出进一步的研究问题.

2 特殊的 3- 平衡设计构造 LRIQ

设 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个 $\text{POCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$, 其中 $\mathcal{A}$ 能够划分成不交子集 $\mathcal{A}_x$, $x \in G, G \in \mathcal{G}$. 若每个 $(X, G \cup S, \mathcal{A}_x)$ 都做成 $\text{ROD}(\sum_{i=1}^r g_i + 2, |G| + 2)$, 则称 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 为可分解的, 记作 $\text{RPOCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$.

使用 RPOCS 构造 LRIQ, 是文献 [7, 8] 的重要方法, 其中的 RPOCS 记作 *POCS.

引理 2.1 设存在 $\text{RPOCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$. 若对所有 $1 \leq i \leq r$, 都存在 $\text{LRIQ}(g_i + 2)$, 则 $\text{LRIQ}(\sum_{i=1}^r g_i + 2)$ 也存在.

证明 类似于 [7] 中构造 3.1, 证明从略. $\square$

从 $S(t, k, v)$ 出发, 选取一个元素 x , 选择包含 x 的所有区组并从中删除 x , 即得 $S(t-1, k-1, v-1)$, 称之为 x 点的导出设计. 导出设计可分解的 $S(t, k, v)$, 简记作 $\text{RDS}(t, k, v)$, 是指每个点的导出设计都可分解的 $S(t, k, v)$. 用 $\text{RDSQS}(v)$ 表示导出设计可分解的四元系 $\text{RDS}(3, 4, v)$.

引理 2.2 (见文献 [7, 引理 4.1]) 存在 $\text{OCS}(3^3 : 0) (X, \emptyset, \mathcal{G}, \mathcal{A})$, 其区组集 $\mathcal{A}$ 可划分成 9 个不交子集 $\mathcal{A}_x$, $x \in G, G \in \mathcal{G}$, 使得每个 $\mathcal{A}_x$ 都构成 $X \setminus \{x\}$ 上的带洞 $G \setminus \{x\}$ 的 $\text{ROD}(8, 2)$.

构造 2.3 若 $\text{RDSQS}(2n+2)$ 存在, 则 $\text{RPOCS}(6^n : 2)$ 也存在.

证明 设 $(I_{2n} \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \mathcal{B})$ 为 $\text{RDSQS}(2n+2)$. 则对任意 $x \in I_{2n}$, 存在 $\mathcal{B}$ 中唯一区组包含 $\{x, \infty_1, \infty_2\}$, 记该区组为 $G_x \cup \{\infty_1, \infty_2\}$, 其中 $G_x \subseteq I_{2n}$. 于是不妨设 $G_x = \{x, n+x\}$ ($x \in I_{2n}$), $\mathcal{G} = \{G_h : 0 \leq h \leq n-1\}$. 令 $\mathcal{H} = \{G \times I_3 : G \in \mathcal{G}\}$. 取不属于 $I_{2n} \times I_3$ 的两个元素构成集合 S . 欲构造的 $\text{RPOCS}(6^n : 2)$ 基于点集 $Y = (I_{2n} \times I_3) \cup S$, 组集 $\mathcal{H}$ 和柄 S .

对任意区组 $B \in \mathcal{B}$ 且 $\infty_1 \in B$ 而 $\infty_2 \notin B$, 令 $B' = B \setminus \{\infty_1\}$. 在 $B' \times I_3$ 上取组 $\{x\} \times I_3$, $x \in B'$, 构造具有引理 2.2 性质的 $\text{OCS}(3^3 : 0)$, 其区组集 $\mathcal{A}_B$ 能够划分成 9 个不交子集 $\mathcal{A}_B(x, i)$, $(x, i) \in B' \times I_3$, 使得每个 $\mathcal{A}_B(x, i)$ 都做成 $(B' \times I_3) \setminus \{(x, i)\}$ 上带洞 $(\{x\} \times I_3) \setminus \{(x, i)\}$ 的 $\text{ROD}(8, 2)$. 设每个 $\text{ROD}(8, 2)$ 的截态分解为 $\{\mathcal{A}_B^j(x, i) : 1 \leq j \leq 7\}$, 其中 $1 \leq j \leq 6$ 时 $\mathcal{A}_B^j(x, i)$ 是 $(B' \times I_3) \setminus \{(x, i)\}$ 的截态, 而 $\mathcal{A}_B^7(x, i)$ 是以 $(\{x\} \times I_3) \setminus \{(x, i)\}$ 为洞的带洞截态.

对任意区组 $B \in \mathcal{B}$ 且 $\infty_2 \in B$ 而 $\infty_1 \notin B$, 令 $B' = B \setminus \{\infty_2\}$. 在 $(B' \times I_3) \cup S$ 上自然存在型为 $3^3 2^1$ 的 $\text{GDD}(3, 3, 11)$, 其组集为 $\{\{x\} \times I_3 : x \in B'\} \cup \{S\}$, 区组集为 $\mathcal{C}'_B$. 进一步地, 由 [9, 引理 2.2], 可以要求 $\mathcal{C}'_B$ 可划分为 9 个子集 $\mathcal{C}'_B(x, i)$, $(x, i) \in B' \times I_3$, 使得每个 $\mathcal{C}'_B(x, i)$ 都做成以 $\{y\} \times I_3 : y \in$

$B' \setminus \{x\} \cup \{S \cup \{(x, i)\}\}$ 为组集, 且带有 3 个平行类的可分解 GDD(2, 3, 9). 对于 $(x, i) \in B' \times I_3$, 令 $\mathcal{C}_B(x, i) = \{(a, b, c), (a, c, b), (b, c, a), (b, a, c), (c, b, a), (c, a, b) : \{a, b, c\} \in \mathcal{C}'_B(x, i)\}$. 由于每个 $\mathcal{C}'_B(x, i)$ 都是可分解的, 故相应地每个 $\mathcal{C}_B(x, i)$ 都有一个截态分解, 它由 $((B' \setminus \{x\}) \times I_3) \cup S \cup \{(x, i)\}$ 的 6 个不交截态组成, 记为 $\mathcal{C}_B^j(x, i)$, $1 \leq j \leq 6$.

对任意区组 $B \in \mathcal{B}$ 且 $\infty_1, \infty_2 \notin B$, 由 [10, 例 2.5], 在 $B \times I_3$ 上存在型为 3^4 的 GDD(3, 4, 12), 其组集为 $\{x\} \times I_3$, $x \in B$, 区组集为 $\mathcal{D}'_B$, 且 $\mathcal{D}'_B$ 能划分为 12 个不交子集 $\mathcal{D}'_B(x, i)$, $(x, i) \in B \times I_3$, 使得每个 $\mathcal{D}'_B(x, i)$ 都做成组集为 $\{\{y\} \times I_3 : y \in B \setminus \{x\}\}$, 且有 3 个平行类的可分解 GDD(2, 3, 9). 类似上面的处理, 将一个无序 3-子集对应 6 个有序 3-向量, 则 12 个不交 $\mathcal{D}'_B(x, i)$ 对应着 12 个不交的 3-向量集合 $\mathcal{D}_B(x, i)$, $(x, i) \in B \times I_3$, 每个 $\mathcal{D}_B(x, i)$ 可相应划分成 6 个 $(B \setminus \{x\}) \times I_3$ 上的不交截态 $\mathcal{D}_B^j(x, i)$, $1 \leq j \leq 6$.

对 $x \in G$, $G \in \mathcal{G}$ 及 $i \in I_3$, 定义

$$\mathcal{F}(x, i) = \left(\bigcup_{\substack{x \in B, B \in \mathcal{B}, \\ \infty_1 \in B, \infty_2 \notin B}} \mathcal{A}_B(x, i) \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in B, B \in \mathcal{B}, \\ \infty_1 \notin B, \infty_2 \in B}} \mathcal{C}_B(x, i) \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in B, B \in \mathcal{B}, \\ \infty_1 \notin B, \infty_2 \notin B}} \mathcal{D}_B(x, i) \right).$$

通过常规方法可验证 $\mathcal{F}(x, i)$ 构成 Y 上的 OD(6n+2, 8), 其洞为 $(G \times I_3) \cup S$, 且这些 OD(6n+2, 8) 构成 POCS(6ⁿ: 2). 现仅验证由 $\mathcal{F}(x, i)$ 确定的 OD(6n+2, 8) 是可分解的. 这将用到 $(I_{2n} \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \mathcal{B})$ 是 RDSQS(2n+2) 的性质.

对任意 $x \in I_{2n} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$, 定义 $\mathcal{B}_x = \{B \setminus \{x\} : x \in B, B \in \mathcal{B}\}$. 由于 $(I_{2n} \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \mathcal{B})$ 是 RDSQS(2n+2), 故每个 $((I_{2n} \cup \{\infty_1, \infty_2\}) \setminus \{x\}, \mathcal{B}_x)$ 都是 KTS(2n+1), 令其分解为 $\Gamma_x = \{\mathcal{B}_x(h) : 0 \leq h \leq n-1\}$. 对任意 $x \in I_{2n}$, 因为 $G_x \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ 是 $\mathcal{B}$ 中包含 $\{x, \infty_1, \infty_2\}$ 的唯一区组, 所以 $\mathcal{B}$ 正好有 $n-1$ 个区组包含 x 和 ∞_1 但不含 ∞_2 , 令这 $n-1$ 个区组为 $D_x^1(h) = C_x^1(h) \cup \{x\}$, $1 \leq h \leq n-1$, 其中 $C_x^1(h) \in \mathcal{B}_x$. 类似地, 令 $D_x^2(h) = C_x^2(h) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$, $1 \leq h \leq n-1$, 是 $\mathcal{B}$ 中含 x 和 ∞_2 但不含 ∞_1 的 $n-1$ 个区组, 其中 $C_x^2(h) \in \mathcal{B}_x$. 显然, 对 $i = 1, 2$, $\{C_x^i(h) \setminus \{\infty_i\} : 1 \leq h \leq n-1\}$ 形成 $I_{2n} \setminus G_x$ 的划分. 进而, 在 $((X \cup \{\infty_1, \infty_2\}) \setminus \{x\}, \mathcal{B}_x)$ 的分解 Γ_x 中, 不妨设 $\overline{G}_x = \{n+x, \infty_1, \infty_2\} \in \mathcal{B}_x(0)$, 而对 $1 \leq h \leq n-1$, 不妨设 $C_x^1(h), C_x^2(h) \in \mathcal{B}_x(h)$.

接下来可将 $\mathcal{F}(x, i)$ 划分成 $6(n-1)$ 个 Y 的截态以及 7 个 Y 的带洞截态 (洞为 $(G \times I_3) \cup S$), 具体如下.

对于 $1 \leq j \leq 6$ 及 $1 \leq h \leq n-1$, 令

$$\mathcal{F}_h^j(x, i) = (\mathcal{A}_{D_x^1(h)}^j(x, i)) \cup (\mathcal{C}_{D_x^2(h)}^j(x, i)) \cup \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_x(h) \setminus \{C_x^1(h), C_x^2(h)\}} \mathcal{D}_{B \cup \{x\}}^j(x, i) \right).$$

易验证每个 $\mathcal{F}_h^j(x, i)$ 都是 Y 的截态.

对于 $1 \leq j \leq 6$, 令

$$\mathcal{F}^j(x, i) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_x(0) \setminus \{\overline{G}_x\}} \mathcal{D}_{B \cup \{x\}}^j(x, i).$$

再令

$$\mathcal{F}^7(x, i) = \bigcup_{h=1}^{n-1} \mathcal{A}_{D_x^1(h)}^7(x, i).$$

易验 $\mathcal{F}^j(x, i)$ ($1 \leq j \leq 7$) 都是 Y 的带洞 $(G \times I_3) \cup S$ 的截态.

综上, RPOCS(6ⁿ: 2) 存在. 证毕. $\square$

定理 2.4 存在 LRIQ(26).

证明 由 [11], SQS(10) 存在, 其每个导出设计都是 KTS(9), 从而存在 RDSQS(10). 再由构造 2.3, 存在 RPOCS($6^4:2$). 引理 1.1 给出了 LRIQ(8) 的存在性, 最后应用引理 2.1 即得结论. 证毕. $\square$

3 LARIQ 的构造

引理 3.1 对素数幂 $q \geq 4$, 存在 LARIQ(q).

证明 对素数幂 $q \geq 4$, 令 q 阶有限域 $F_q = \{a_0, a_1, \dots, a_{q-1}\}$, 其中 $a_0 = 0, a_1 = q - 1$. 对 $2 \leq k \leq q - 1$, 令 $l_{ij}^{(k)} = a_k a_i + a_j$, 则 $Q_k = \{(i, j, l_{ij}^{(k)}) : i, j \in F_q\}$, $2 \leq k \leq q - 1$, 构成 $q - 2$ 个两两正交拟群, 且对角线都构成其截态. 将元素 $l_{ij}^{(k)}$ 重新命名可将每个 Q_k 变成幂等的, 而这些拟群正交性不变, 注意到它们都有幂等正交侣, 故而都是 ARIQ(q) 并且除幂等行外互不相交, 从而做成 LARIQ(q). 证毕. $\square$

RPOCS 在构造 LRIQ 中发挥着重要的作用, 类似可以定义 ARPOCS 相应构造 LARIQ. 设 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个 POCS($\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2$), 其中 $\mathcal{A}$ 能够划分成不交子集 $\mathcal{A}_x, x \in G, G \in \mathcal{G}$. 若每个 $(X, G \cup S, \mathcal{A}_x)$ 都做成 AROD($\sum_{i=1}^r g_i + 2, |G| + 2$), 则称 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是几乎可分解的, 记作 ARPOCS($\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2$).

引理 3.2 设存在 ARPOCS($\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2$). 若对所有 $1 \leq i \leq r$ 都存在 LARIQ($g_i + 2$), 则 LARIQ($\sum_{i=1}^r g_i + 2$) 也存在.

证明 设 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是引理所设 ARPOCS($\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2$), 其包含的所有 AROD($\sum_{i=1}^r g_i + 2, |G| + 2$) 为 $(X, G \cup S, \mathcal{A}_x), x \in G, G \in \mathcal{G}$. 在每个 $G \cup S$ 上构作 LARIQ($|G| + 2$), 其包含的 ARIQ($|G| + 2$) 对应的 AROD($|G| + 2$) 设为 $\mathcal{B}_x, x \in G$. 对于 $x \in G, G \in \mathcal{G}$, 令 $\mathcal{C}_x = \mathcal{A}_x \cup \mathcal{B}_x$, 则不难验证每个 $(X, \mathcal{C}_x)$ 都做成 AROD($\sum_{i=1}^r g_i + 2$), 进而可验证所有 $(X, \mathcal{C}_x)$ 构成 LAROD($\sum_{i=1}^r g_i + 2$), 等价地, LARIQ($\sum_{i=1}^r g_i + 2$) 存在. 证毕. $\square$

构造 3.3 令 $2, 3, 6 \notin K \cup \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 且 $m \neq 2, 6$. 假设存在型为 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 的 GDD($2, K, \sum_{i=1}^r g_i$). 若对所有 $k \in K$, ARPOCS($m^k : 2$) 都存在, 则 ARPOCS($\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2$) 也存在.

证明 令 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是型为 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 的 GDD($2, K, \sum_{i=1}^r g_i$), 且 $2, 3, 6 \notin K \cup \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$. 令 $S = \{\infty_1, \infty_2\}, Y = (X \times I_m) \cup S, \mathcal{H} = \{G \times I_m : G \in \mathcal{G}\}$. 欲构造之 ARPOCS($\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2$) 基于点集 Y 、组集 $\mathcal{H}$ 和柄 S .

对任意 $B \in \mathcal{B}$, 令 $((B \times I_m) \cup S, S, \Gamma_B, \mathcal{C}_B)$ 为 ARPOCS($m^{|B|} : 2$), 其中 $\Gamma_B = \{\{x\} \times I_m : x \in B\}$. 于是 $\mathcal{C}_B$ 可划分成 $\mathcal{C}_{x,t}^B, (x, t) \in B \times I_m$, 其中每个 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \mathcal{C}_{x,t}^B)$ 都是 AROD($m|B| + 2, m + 2$), 其正交侣设为 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \bar{\mathcal{C}}_{x,t}^B)$. 换言之, 对任意 $(B \times I_m) \cup S$ 的有序对 (ξ, η) , 若 $\xi \neq \eta$ 且 $\{\xi, \eta\} \not\subseteq (\{x\} \times I_m) \cup S$, 则存在 $\alpha, \beta \in (B \times I_m) \cup S, \alpha \neq \beta$ 使得 $(\alpha, \beta, \xi) \in \mathcal{C}_{x,t}^B$ 且 $(\alpha, \beta, \eta) \in \bar{\mathcal{C}}_{x,t}^B$.

对任意 $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 且 $|B| > 1$, 由于 $|B| \geq 4$ 且 $|B| \neq 6$, 故存在一对正交 IQ($|B|$) $(B, \circ_B)$ 和 $(B, \cdot_B)$. 由于 $m \neq 2, 6$, 故可令 $(I_m, \oplus)$ 和 $(I_m, \otimes)$ 是任意一对正交拟群. 对 $a \neq b \in X$, 用 ab 表示 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 中同时包含 a 和 b 的区组或组.

对 $(x, t) \in X \times I_m$, 定义

$$\mathcal{D}_{x,t} = \{((a, i), (b, j), (c, k)) : a \circ_{ab} b = c \circ_{cx} x, \{a, b, c\} \not\subseteq B,$$

$$\begin{aligned}
& \forall B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}, |B| > 1, i \oplus j = k \oplus t, \{i, j, k\} \subseteq I_m, \\
& \overline{\mathcal{D}}_{x,t} = \{((a, i), (b, j), (c, k)) : a \cdot_{ab} b = c \cdot_{cx} x, \{a, b, c\} \not\subseteq B, \\
& \quad \forall B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}, |B| > 1, i \otimes j = k \otimes t, \{i, j, k\} \subseteq I_m\}, \\
& \mathcal{F}_{x,t} = \left(\bigcup_{x \in B, B \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_{x,t}^B \right) \cup \mathcal{D}_{x,t}, \\
& \overline{\mathcal{F}}_{x,t} = \left(\bigcup_{x \in B, B \in \mathcal{B}} \overline{\mathcal{C}}_{x,t}^B \right) \cup \overline{\mathcal{D}}_{x,t}.
\end{aligned}$$

文献 [8, 构造 2.2] 证明了每个 $(Y, (G \times I_m) \cup S, \mathcal{F}_{x,t})$, $(x, t) \in G \times I_m, G \in \mathcal{G}$, 都做成以 $(G \times I_m) \cup S$ 为洞的 $\text{OD}(m \sum_{i=1}^r g_i + 2, m|G| + 2)$, 且 $\{(Y, (G \times I_m) \cup S, \mathcal{F}_{x,t}) : (x, t) \in G \times I_m, G \in \mathcal{G}\}$ 构成 $\text{POCS}(\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2)$. 类似方法可以证明 $(Y, (G \times I_m) \cup S, \overline{\mathcal{F}}_{x,t})$ 也做成 $\text{OD}(m \sum_{i=1}^r g_i + 2, m|G| + 2)$. 下面只需说明 $\mathcal{F}_{x,t}$ 是几乎可分解的, 只要验证它与 $\overline{\mathcal{F}}_{x,t}$ 正交即可. 即要证明: 对 Y 的任意有序对 (ξ, η) , 只要 $\{\xi, \eta\} \not\subseteq (G \times I_m) \cup S$ 且 $\xi \neq \eta$, 则必存在 $\alpha, \beta \in Y, \alpha \neq \beta$, 使得 $(\alpha, \beta, \xi) \in \mathcal{F}_{x,t}$ 而 $(\alpha, \beta, \eta) \in \overline{\mathcal{F}}_{x,t}$. 这有两种可能:

(i) $\{\xi, \eta\} \cap ((\{x\} \times I_m) \cup S) \neq \emptyset$. 只对情形 $\xi \in (\{x\} \times I_m) \cup S$ 证明, 其余情形类似. 令 $\eta = (c, k) \in (X \setminus G) \times I_m$. 令 $B \in \mathcal{B}$ 是包含 x 和 c 的区组. 由于 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \mathcal{C}_{x,t}^B)$ 和 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \overline{\mathcal{C}}_{x,t}^B)$ 正交, 故必能找到 $\alpha, \beta \in (B \times I_m) \cup S, \alpha \neq \beta$ 使得 $(\alpha, \beta, \xi) \in \mathcal{C}_{x,t}^B \subseteq \mathcal{F}_{x,t}$ 且 $(\alpha, \beta, \eta) \in \overline{\mathcal{C}}_{x,t}^B \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{x,t}$.

(ii) $\xi = (c, k), \eta = (d, l) \in (X \setminus \{x\}) \times I_m$. 若存在 $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 使得 $x, c, d \in B$, 则证明类似于情形 (i). 若 $\{c, d, x\}$ 不包含于 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 的任意区组或组中, 则显然 $c \circ_{cx} x \neq d \cdot_{dx} x$. 令 $A \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 是同时包含 $c \circ_{cx} x$ 和 $d \cdot_{dx} x$ 的区组或组. 因为 $(A, \circ_A)$ 与 $(A, \cdot_A)$ 正交, 所以必存在 $a, b \in A$ 使得 $a \circ_A b = c \circ_{cx} x$ 且 $a \cdot_A b = d \cdot_{dx} x$. 注意由于 $c \circ_{cx} x \neq d \cdot_{dx} x$ 而 $(A, \circ_A)$ 和 $(A, \cdot_A)$ 都是幂等的, 此时必有 $a \neq b$. 因此 $\{a, b, c\}$ 和 $\{a, b, d\}$ 不能包含于 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 的任意区组或组中. 否则, 不妨设 $\{a, b, c\} \subseteq B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$, 则由 $a \circ_A b = c \circ_{cx} x$, 必有 $B = A$ 且 $a, b, c, x \in A$, 又由于 $a \cdot_A b = d \cdot_{dx} x$, 故 $\{c, d, x\} \subseteq A$, 产生矛盾. 另一方面, 由 $(I_m, \oplus)$ 和 $(I_m, \otimes)$ 的正交性, 必存在 $i, j \in I_m$ 使 $i \oplus j = k \oplus t$ 且 $i \otimes j = l \otimes t$. 令 $\alpha = (a, i)$ 及 $\beta = (b, j)$, 则 $(\alpha, \beta, \xi) \in \mathcal{D}_{x,t} \subseteq \mathcal{F}_{x,t}$ 且 $(\alpha, \beta, \eta) \in \overline{\mathcal{D}}_{x,t} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{x,t}$.

由此证得存在 $\text{ARPOCS}(\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2)$. 证毕. $\square$

引理 3.4 存在 $\text{ARPOCS}(3^5 : 2)$.

证明 在 $Z_{15} \cup \{a, b\}$ 上构造 $\text{ARPOCS}(3^5 : 2)$, 取组集 $\{\{3i, 3i+1, 3i+2\} : 0 \leq i \leq 4\}$, 柄集 $S = \{a, b\}$. 令 T_i ($0 \leq i \leq 4$) 为如下 3- 向量集合:

$$\begin{aligned}
T_0 : & \quad (2, 13, 12) \quad (13, 12, 2) \quad (12, 2, 13) \\
T_1 : & \quad (8, 9, 13) \quad (9, 11, 6) \quad (13, 2, 8) \quad (6, 7, 2) \quad (11, 6, 9) \quad (14, 8, 3) \\
& \quad (1, 4, 14) \quad (3, 13, 4) \quad (12, 3, 7) \quad (2, 12, 11) \quad (4, 14, 1) \quad (7, 1, 12) \\
T_2 : & \quad (a, 2, 4) \quad (13, a, 14) \quad (b, 4, 6) \quad (8, b, 12) \quad (6, 8, 10) \quad (10, 9, 2) \\
& \quad (11, 12, 0) \quad (9, 10, 3) \quad (3, 6, a) \quad (0, 7, 9) \quad (5, 14, 7) \quad (4, 3, 13) \\
& \quad (2, 11, 5) \quad (7, 13, b) \quad (12, 0, 11) \quad (14, 5, 8) \\
T_3 : & \quad (6, 5, 7) \quad (7, 0, 1) \quad (8, 11, 0) \quad (9, 12, 5) \quad (13, 14, 10) \quad (4, a, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
(12, 8, b) & (11, b, 14) & (1, 2, a) & (a, 13, 11) & (b, 6, 4) & (2, 10, 9) \\
(5, 7, 6) & (0, 9, 8) & (14, 4, 12) & (10, 1, 13) & & \\
T_4: & (6, 13, 1) & (4, 6, b) & (0, 2, 14) & (10, 12, 6) & (14, 10, 13) & (13, 11, a) \\
& (a, 9, 3) & (b, 14, 11) & (8, 0, 9) & (1, 8, 5) & (2, 5, 4) & (5, 1, 8) \\
& (9, a, 12) & (3, b, 2) & (11, 3, 10) & (12, 4, 0) & &
\end{array}$$

令 $T'_0 = \{(2^n x, 2^n y, 2^n z) : (x, y, z) \in T_0, 1 \leq n \leq 4\}$, 其中乘法模 15 运算. 容易验证, T'_0 和 T_1 是带洞 $\{0, 5, 10, a, b\}$ 的截态, T_2, T_3 和 T_4 分别是带洞 $\{1\}, \{3\}$ 和 $\{7\}$ 的截态. 对 $1 \leq m, n \leq 4$, 令 $T_m^n = \{(2^n x, 2^n y, 2^n z) : (x, y, z) \in T_m\}$, 其乘法模 15 运算, 但 a 和 b 保持不动. 令

$$\mathcal{B}_0 = T'_0 \cup \left(\bigcup_{1 \leq m, n \leq 4} T_m^n \right).$$

则可验证 $\mathcal{B}_0$ 做成以 $\{0, 5, 10, a, b\}$ 为洞的 $\text{AROD}(17, 5)$, 其不交截态分解为 $\{T'_0\} \cup \{T_m^n : 1 \leq m, n \leq 4\}$. 最终可验证模 15 加法下 $\mathcal{B}_0$ 可生成 15 个不交 $\text{AROD}(17, 5)$, 从而做成 $\text{ARPOCS}(3^5 : 2)$. 证毕. $\square$

定理 3.5 对任意 $v \equiv 1, 5 \pmod{20}$, 存在 $\text{LARIQ}(3v + 2)$.

证明 令 $v \equiv 1, 5 \pmod{20}$. 由 [12], 存在 $\text{PBD}(v, 5)$. 由引理 3.4, 存在 $\text{ARPOCS}(3^5 : 2)$, 故根据构造 3.3, 存在 $\text{ARPOCS}(3^v : 2)$. 由引理 3.1, 存在 $\text{LARIQ}(5)$. 最后应用引理 3.2 即得结论. 证毕. $\square$

4 可分解高尔夫设计

对称幂等不完全拟群对应的不完全有序设计也称为是对称的. 可分解的对称不完全有序设计记作 RSOD . 设 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个 $\text{POCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$, 其中 $\mathcal{A}$ 能够划分成不交子集 $\mathcal{A}_x, x \in G, G \in \mathcal{G}$. 若每个 $(X, G \cup S, \mathcal{A}_x)$ 都做成 $\text{RSOD}(\sum_{i=1}^r g_i + 2, |G| + 2)$, 则称 $(X, S, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是对称可分解的, 记作 $\text{RSPOCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$.

引理 4.1 设存在 $\text{RSPOCS}(\{g_1, g_2, \dots, g_r\} : 2)$. 若对任意 $1 \leq i \leq r$ 都存在 $\text{RG}(g_i + 2)$, 则 $\text{RG}(\sum_{i=1}^r g_i + 2)$ 也存在.

证明 类似于 [7] 中构造 3.1, 证明从略. $\square$

引理 4.2 对任意奇数 $v \geq 5$, 存在具有幂等正交侣的对称幂等拟群 $\text{SIQ}(v)$.

证明 对任意奇数 $v \geq 5$, [13, 14] 证明了存在带有对称幂等正交侣 P 的 v 阶拟群 $Q = \{(x, y, x \circ y) : x, y \in I_v\}$, 且 Q 是自正交的, 即 Q 正交于 $Q^T = \{(x, y, y \circ x) : x, y \in I_v\}$. 注意到自正交的拟群必有截态 $\{(x, x) : x \in I_v\}$, 故通过元素的重新命名, 可使 Q 变成幂等的, 同时它依然与对称幂等拟群 P 正交. 证毕. $\square$

构造 4.3 令 m 是奇数且 $K \cup \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 是不含 3 的某些奇数的集合. 假设存在型为 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 的 $\text{GDD}(2, K, \sum_{i=1}^r g_i)$. 若对所有 $k \in K$ 都存在 $\text{RSPOCS}(m^k : 2)$, 则 $\text{RSPOCS}(\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2)$ 也存在.

证明 令 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ 是所设型为 $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ 的 $\text{GDD}(2, K, \sum_{i=1}^r g_i)$. 令 $S = \{\infty_1, \infty_2\}$, $Y = (X \times I_m) \cup S$, $\mathcal{H} = \{G \times I_m : G \in \mathcal{G}\}$. 欲构造的 $\text{RSPOCS}(\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2)$ 基于点集 Y 、组集 $\mathcal{H}$ 和柄 S . 对 $B \subseteq X$ 及 $(x, t) \in B \times I_m$, 记 $J_B = \{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in B \times I_m\}$, $\overline{J}_{x,t}^B = \{(\alpha, \alpha, (x, t)) : \alpha \in B \times I_m\}$.

对任意 $B \in \mathcal{B}$, 令 $((B \times I_m) \cup S, S, \Gamma_B, \mathcal{C}_B)$ 为 $\text{RSPOCS}(m^{|B|} : 2)$, 其中 $\Gamma_B = \{\{x\} \times I_m : x \in B\}$. 于是 $\mathcal{C}_B$ 可划分成 $\mathcal{C}_{x,t}^B, (x, t) \in B \times I_m$, 其每个 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \mathcal{C}_{x,t}^B)$ 都是

RSOD($m|B|+2, m+2$), 相应地, $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \mathcal{C}_{x,t}^B \cup J_{B \setminus \{x\}})$ 做成 RSISQ($m|B|+2, m+2$), 其正交侣为 $((B \times I_m) \cup S, (\{x\} \times I_m) \cup S, \overline{\mathcal{C}}_{x,t}^B \cup \overline{J}_{x,t}^{B \setminus \{x\}})$.

对任意 $B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 且 $|B| > 1$, 由于 $|B| \geq 5$ 为奇数, 故存在一对正交 IQ($|B|$) $(B, \circ_B)$ 和 $(B, \cdot_B)$. 由引理 4.2, 可假定 $(B, \circ_B)$ 为 SIQ. 由于 m 也是奇数, 故可令 $(I_m, \oplus)$ 是任意对称拟群, 并有正交侣 $(I_m, \otimes)$. 对 $a \neq b \in X$, 用 ab 表示 $\mathcal{B} \cup \mathcal{G}$ 中同时包含 a 和 b 的区组或组.

对 $(x, t) \in X \times I_m$, 定义

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{x,t} &= \{((a, i), (b, j), (c, k)) : a \circ_{ab} b = c \circ_{cx} x, \{a, b, c\} \not\subseteq B, \\ &\quad \forall B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}, |B| > 1, i \oplus j = k \oplus t, \{i, j, k\} \subseteq I_m\}, \\ \overline{\mathcal{D}}_{x,t} &= \{((a, i), (b, j), (c, k)) : a \cdot_{ab} b = c \cdot_{cx} x, \{a, b, c\} \not\subseteq B, \\ &\quad \forall B \in \mathcal{B} \cup \mathcal{G}, |B| > 1, i \otimes j = k \otimes t, \{i, j, k\} \subseteq I_m\}, \\ \mathcal{F}_{x,t} &= \left(\bigcup_{x \in B, B \in \mathcal{B}} \mathcal{C}_{x,t}^B \right) \cup \mathcal{D}_{x,t}, \\ \overline{\mathcal{F}}_{x,t} &= \left(\bigcup_{x \in B, B \in \mathcal{B}} \overline{\mathcal{C}}_{x,t}^B \right) \cup \overline{\mathcal{D}}_{x,t}.\end{aligned}$$

类似于文献 [8, 构造 2.2], 可以证明 $(Y, (G \times I_m) \cup S, \mathcal{F}_{x,t} \cup J_{X \setminus G}), (x, t) \in G \times I_m, G \in \mathcal{G}$, 做成 SIQ($m \sum_{i=1}^r g_i + 2, m|G| + 2$) (其对称性显然), 而每个 $(Y, (G \times I_m) \cup S, \overline{\mathcal{F}}_{x,t} \cup \overline{J}_{x,t}^{X \setminus G})$ 都做成带相同洞的不完全幂单拟群. 进而可通过证明 $\mathcal{F}_{x,t} \cup J_{X \setminus G}$ 与 $\overline{\mathcal{F}}_{x,t} \cup \overline{J}_{x,t}^{X \setminus G}$ 正交说明它的可分解性. 最终得到 $\{(Y, (G \times I_m) \cup S, \mathcal{F}_{x,t}) : (x, t) \in G \times I_m, G \in \mathcal{G}\}$ 构成 RSPOCS($\{mg_1, mg_2, \dots, mg_r\} : 2$). 细节从略. 证毕. $\square$

推论 4.4 设 K 是不小于 7 的某些奇数的集合且 PBD(v, K) 存在. 若对所有 $k \in K$ 都存在 RSPOCS($1^k : 2$), 则 RSPOCS($1^v : 2$) 及 RG(v) 也存在.

证明 注意到 G(3) 必为 RG(3), 结合构造 4.3 即得结论. 证毕. $\square$

引理 4.5 对于 $k = 7, 9, 11, 13$, 存在 RSPOCS($1^k : 2$).

证明 文献 [8, 引理 3.3] 证明中给出了 $k = 7, 9, 11, 13$ 时 RPOCS($1^k : 2$) 的存在性, 可验证这些均为 RSPOCS($1^k : 2$). 证毕. $\square$

定理 4.6 存在常数 v_0 , 使得对所有奇数 $v \geq v_0$ 都存在 RG(v).

证明 令 $K = \{7, 9, 11, 13\}$, 则仅当 $v \geq 7$ 是奇数时 PBD(v, K) 存在. 由文献 [12], PBD 设计存在的必要条件是渐近充分的. 故存在常数 v_0 , 对于所有奇数 $v \geq v_0$, 存在 PBD(v, K). 根据引理 4.5, 当 $k \in K$ 时, 存在 RSPOCS($1^k : 2$). 由推论 4.4 即得结论. 证毕. $\square$

5 结束语

具有可分解性质的三元系大集是组合设计理论研究中的一类重要问题. 本文研究的 LRIQ、LARIQ 及 RG 的存在性问题可视为著名的 Kirkman 三元系大集问题的一种推广. 为了确定引理 1.1 中 LRIQ 可能例外值的存在性, 本文借助导出设计可分解的 3- 设计给出了 LRIQ 的构造方法, 证明了 LRIQ(26) 的存在性. 借助 PBD 设计, 本文给出了 LARIQ 的构造方法, 证明了 RG(v) 的渐近存在性. 顺便指出, 关于具有可分解性或几乎可分解性的 (有向) 三元系大集已有部分结果, 本文不再列出, 参见 [15, 16]. 在针对 LARIQ 的构造 3.3 中, $m = 1, 2$ 这些简单情形并不适用 (LARIQ(3) 不存在), 增加了该问题的

难度. 关于 $RG(v)$, 借助目前已知的 $PBD(v, 7)$ 、 $PBD(v, 9)$ 及 PBD 、 GDD 设计的基本构造方法, 可以得到 $RG(v)$ 存在的若干无穷类, 甚至确定定理 4.6 中的常数 v_0 , 相关内容本文不再展开论述, 仅仅指出推论 4.4 和引理 4.5 将 $RG(v)$ 问题的基本解决归结于 $PBD(v, \{7, 9, 11, 13\})$ 的存在谱.

最后, 针对本文研究内容, 提出几个值得进一步考虑的问题:

- (1) 对于 $v \in \{14, 20, 22, 28, 34, 35, 38, 40, 42, 46, 50, 55, 62\}$, 确定 $LRIQ(v)$ 的存在性;
- (2) 给出 $LARIQ$ 更多构造方法, 确定 $LARIQ(v)$ 的存在谱;
- (3) 确定 $PBD(v, \{7, 9, 11, 13\})$ 的存在谱, 进而解决 $RG(v)$ 的存在性问题.

参考文献

- 1 Teirlinck L, Lindner C C. The construction of large sets of idempotent quasigroups. *European J Combin*, 1988, 9: 83–89
- 2 Chang Y. The existence of large set of idempotent quasigroups of order 62. *J Combin Math Combin Comput*, 2000, 32: 213–218
- 3 Chang Y. The spectrum for large sets of idempotent quasigroups. *J Combin Designs*, 2000, 8: 79–82
- 4 Wallis W D. The problem of the hospitable golfers. *Ars Combin*, 1983, 25: 149–152
- 5 Teirlinck L. On the use of pairwise balanced designs and closure spaces in the construction of structures of degree at least 3. *Le Matematiche*, 1990, 65: 197–218
- 6 Chang Y. The existence spectrum of golf designs. *J Combin Designs*, 2007, 15: 84–89
- 7 Zhou J, Chang Y, Tian Z. Large sets of resolvable idempotent Latin squares. *Discrete Math*, 2011, 311: 24–31
- 8 Zhou J, Chang Y. Further results on large sets of resolvable idempotent Latin squares. *J Combin Designs*, 2012, 20: 399–407
- 9 Ji L. A construction for large sets of disjoint Kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2007, 43: 115–122
- 10 Yuan L, Kang Q. Some infinite families of large sets of Kirkman triple systems. *J Combin Designs*, 2008, 16: 202–212
- 11 Hanani H. On quadruple systems. *Canad J Math*, 1960, 12: 145–157
- 12 Abel R J R, Bennett F E, Greig M. PBD-closure. In: Colbourn C J, Dinitz J H, eds. *CRC Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2007, 247–255
- 13 Abel R J R, Bennett F E, Zhang H, et al. A few more incomplete self-orthogonal latin squares and related designs. *Australas J Combin*, 2000, 21: 85–94
- 14 Bennett F E, Zhu L. Further results on the existence of $HSOLSSOM(h^n)$. *Australas J Combin*, 1996, 14: 207–220
- 15 Zhou J, Chang Y. New results on large sets of Kirkman triple systems. *Des Codes Cryptogr*, 2010, 55: 1–7
- 16 Kang Q, Tian Z. Large sets of oriented triple systems with resolvability. *Discrete Math*, 2000, 212: 199–221

Large sets of idempotent quasigroups with resolvability

ZHOU JunLing & CHANG YanXun

Abstract An idempotent quasigroup (IQ) possessing a unipotent orthogonal mate is called resolvable. An idempotent quasigroup possessing an idempotent orthogonal mate is called almost resolvable. A large set of idempotent quasigroups of order v is a partition of all 3-vectors with 3 distinct components of a v -set into $v - 2$ $IQ(v)$ s pairwise agreeing on only the idempotent rows. In this paper, large sets of resolvable idempotent quasigroups, large sets of almost resolvable idempotent quasigroups, and large sets of resolvable symmetric idempotent quasigroups (resolvable golf designs) are investigated by utilizing t -balanced designs with $t = 2, 3$.

Keywords idempotent quasigroup, symmetric, orderd design, resolvable, almost resolvable, large set

MSC(2010) 05B07

doi: 10.1360/012012-210