非标准分析与广义函数的乘法(II)

李　邦　河

(中国科学院数学研究所)

摘　　要

本文运用文献[1]中给出的方法，算出具有特殊重要性的奇异广义函数的乘积 $\delta^{(m)}(x)\circ\delta^{(n)}(x)$, $\delta^{(m)}\circ x^{-n}$ 以及 $\theta(x)\circ x^{-n}$ 等．本文还举例说明了用本文的方法可很简明地得到许多关于乘法的已知结果．

一些常见的奇异广义函数的乘积对于应用是很重要的，但是给出这些乘积不是一件容易的事,至今只有一些零碎的结果,而且缺乏统一的处理方法．

例如 Güttinger[1] 曾指出由于象 $\theta(x)$ 和 x^{-n}, $\delta(x)$ 和 x^{-n} 这样的乘积未被定义，使量子场论深受困扰．

在文献[2]中我们给出了计算任何两个广义函数的乘积的方法，下面，我们将运用这个方法具体地来计算 $\delta^{(m)}(x)\circ\delta^{(n)}(x)$, $\delta^{(m)}(x)\circ x^{-n}$, 及 $\theta(x)\circ x^{-n}$. 这些乘积的一般表达式，用别的方法是无法得到的．此外我们指出,运用我们的方法可以很容易算出许多已知的结果．

本文用到的关于解析表示的知识可参阅文献 [3].

对本文感兴趣的读者,要迅速了解非标准分析,可参阅 Luxemburg[4] 的文章．

一、方法的简洁性

我们举例说明如下:

例 1,算出 x^{-r} 和 $\delta^{(r-1)}(x)$ 的乘积等于 $\dfrac{(-1)^r(r-1)!}{2(2r-1)!}\delta^{(2r-1)}(x)$. 这是 Fisher[5] 的一篇文章所做的事．我们的计算如下:

$$\hat{x}^{-r}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^r}, & \operatorname{Im} z>0.\\[2ex] -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^r}, & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

$$\hat{\delta}^{(r-1)}(z)=\frac{(-1)^r(r-1)!}{2\pi i}\frac{1}{z^r},$$

$$(x^{-r})_\rho(x)\delta_\rho^{(r-1)}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+i\rho)^r}+\frac{1}{(x-i\rho)^r}\right)\cdot\frac{(-1)^r(r-1)!}{2\pi i}$$
$$\cdot\left[\frac{1}{(x+i\rho)^r}-\frac{1}{(x-i\rho)^r}\right]$$

本文 1976 年 7 月 27 日收到．

$$= \frac{1}{2}\frac{(-1)^r(r-1)!}{2\pi i}\left[\frac{1}{(x+i\rho)^{2r}} - \frac{1}{(x-i\rho)^{2r}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^r(r-1)!}{2(2r-1)!}\delta_\rho^{(2r-1)}(x),$$

因此

$$x^{-r}\circ\delta^{(r-1)}(x) = \frac{(-1)^r(r-1)!}{2(2r-1)}\delta^{(2r-1)}(x).$$

例 2, 算出 $x_+^{-r-\frac{1}{2}}$ 和 $x_-^{-r-\frac{1}{2}}$ $(r = 0, 1, 2, \cdots)$ 的乘积等于 $\frac{(-1)^r\pi}{2(2r)!}\delta^{(2r)}(x)$, 这是 Fisher 的另一篇更长的文章[6]所做的事,我们计算如下:

首先我们求出 x_+^λ 和 x_-^λ (λ 是≠整数的实数)的解析表示为:

$$\hat{x}_+^\lambda(z) = \frac{z^\lambda}{1-e^{2\pi i\lambda}}, \qquad \hat{x}_-^\lambda(z) = -\frac{(-z)^\lambda}{1-e^{2\pi i\lambda}},$$

其中 $z^\lambda = e^{\lambda(\ln|z|+i\arg z)}$,取沿实轴的正半轴剪开的分支, $0 < \arg z < 2\pi$,则

$$(x_+^{-r-\frac{1}{2}})_\rho(x)(x_-^{-r-\frac{1}{2}})_\rho(x) = \frac{1}{[1-e^{2\pi i(-r-\frac{1}{2})}]^2}\cdot\frac{1}{|x+i\rho|^{2r+1}}(e^{i(-r-\frac{1}{2})\arg(x+i\rho)}$$
$$- e^{i(-r-\frac{1}{2})\arg(x-i\rho)})(-e^{i(-r-\frac{1}{2})\arg(-x-i\rho)} + e^{i(-r-\frac{1}{2})\arg(-x+i\rho)})$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{|x+i\rho|^{2r+1}}\{-e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x+i\rho)+\arg(-x-i\rho)]} + e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x-i\rho)+\arg(-x-i\rho)]}$$
$$- e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x-i\rho)+\arg(-x+i\rho)]} + e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x+i\rho)+\arg(-x+i\rho)]}\}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{|x+i\rho|^{2r+1}}\{-e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x-i\rho)+\arg(-x-i\rho)]} - e^{i(-r-\frac{1}{2})[\arg(x+i\rho)+\arg(-x-i\rho)]}\}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{|x+i\rho|^{2r+1}}\cdot e^{i\pi(-r-\frac{1}{2})}[e^{i(-2r-1)\arg(x-i\rho)} - e^{i(-2r+1)\arg(x+i\rho)}]$$
$$= \frac{(-1)^{r-1}}{4i}\left[\frac{1}{(x+i\rho)^{2r+1}} - \frac{1}{(x-i\rho)^{2r+1}}\right] = \frac{(-1)^r\pi}{2(2r)!}\delta_\rho^{(2r)}(x),$$

即

$$x_+^{-r-\frac{1}{2}}\circ x_-^{-r-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^r\pi}{2(2r)!}\delta^{(2r)}(x).$$

例 3, Miknsinski[7] 算出了

$$(x^{-1})^2 - \pi^2\delta^2 = x^{-2}.$$

按我们的方法

$$(x^{-1})_\rho(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i\rho} + \frac{1}{x-i\rho}\right), \quad \delta_\rho(x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x+i\rho} - \frac{1}{x-i\rho}\right),$$

$$(x^{-1})_\rho(x)(x^{-1})_\rho(x) - \pi^2\delta_\rho(x)\delta_\rho(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+i\rho)^2} + \frac{1}{(x-i\rho)^2}\right) = (x^{-2})_\rho(x),$$

所以

$$(x^{-1})\circ(x^{-1}) - \pi^2\delta\circ\delta = x^{-2}.$$

二、$\delta^{(m)}(x)$ 和 $\delta^{(n)}(x)$ 的乘积

首先我们算出 $\delta(x)\circ\delta^{(n)}(x)$,然后容易算出一般的 $\delta^{(m)}(x)\circ\delta^{(n)}(x)$.

$$\delta_\rho(x)=\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+\rho^2},$$

$$\delta_\rho^{(m)}(x)=\frac{(-1)^m\cdot m!}{\pi}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^n\rho^{2n+1}x^{m-2n}}{(x^2+\rho^2)^{m+1}},$$

$$\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x)=\frac{(-1)^m m!}{\pi^2}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^n\rho^{2n+2}x^{m-2n}}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}.$$

设 a 是任意标准实数，我们来计算

(1) $\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2n}}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx$, n 为正整数.

$$\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2n}}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx=-\frac{\rho^2x^{2n-1}}{(2m-2n+3)(x^2+\rho^2)^{m+1}}\Big|_{-a}^{a}$$

$$+\frac{2n-1}{2m-2n+3}\cdot\rho^2\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2(n-1)}}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx$$

$$\simeq\frac{2n-1}{2m-2n+3}\rho^2\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2(n-1)}}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx$$

$$\simeq\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{(2m-2n+3)(2m-2n+5)\cdots(2m+1)}\rho^{2n}\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}.$$

(2) 再计算 $\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}$.

z 的解析函数 $\frac{\rho^2}{(z^2+\rho^2)^{m+2}}$ 在上半平面有一个奇点 $i\rho$，其留数

$$\nu=\frac{(2m+2)!}{[(m+1)!]^2}\frac{1}{2^{2m+3}\rho^{2m+1}}\cdot\frac{1}{i}.$$

实轴上的积分 $\int_{a\leqslant|x|\leqslant\rho^{-1}}\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx\leqslant2\rho^{-1}\frac{\rho^2}{(a^2+\rho^2)^{m+2}}=\frac{2\rho}{(a^2+\rho^2)^{m+2}}$，故为无穷小.
又半圆上的积分

$$\left|\int_{|z|=\rho^{-1}}\frac{\rho^2dz}{(z^2+\rho^2)^{m+2}}\right|\leqslant\int_{|z|=\rho^{-1}}\frac{\rho^2|dz|}{(\rho^{-2}-\rho^2)^{m+2}}=\pi\rho^{-1}\frac{\rho^2}{(\rho^{-2}-\rho^2)^{m+2}}=\frac{\pi\rho^2}{(\rho^{-2}-\rho^2)^{m+2}},$$

亦是无穷小.

所以

$$\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}\simeq2\pi i\nu=\frac{\pi}{\rho^{2m+1}}\cdot\frac{(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}.$$

(3) 设 $\varphi\in\mathscr{D}$,

$${}^*\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{\varphi^{(m+1)}(0)}{(m+1)!}x^{m+1}+\frac{{}^*\varphi^{(m+2)}(\xi_x)}{(m+2)!}x^{m+2},$$

其中 ξ_x 是 0 与 x 之间的一个数.

取正实数 a，使 φ 的支集含于 $(-a,a)$ 之中，并设有限实数 M 是 $|\varphi^{(m+2)}(x)|$ 的一个上界，则

$$\left|\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x)\frac{{}^*\varphi(\xi_x)}{(m+2)!}x^{m+2}dx\right| \leqslant \frac{Mm!}{(m+2)!\pi^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}\rho^{2n}\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2m-2n+2}dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}$$

$$\simeq \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_n\rho^{2n}\rho^{2m-2n+2}\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}dx \simeq \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} b_n\rho^{2m+2}\rho^{-2m-1}\simeq 0,$$

其中 a_n, b_n 为有限实数.

(4) 现在来计算 $\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x)x^{m-2k}dx$, $0\leqslant k\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$.

令 $I_{m+1}(0)=1$, $I_{m+1}(1)=\frac{1}{2m+1}$, $I_{m+1}(2)=\frac{1\cdot 3}{(2m+1)(2m-1)}$,

$$I_{m+1}(n)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2m+1)(2m-1)\cdots(2m-2n+3)},$$

则有

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x)x^{m-2k}dx = \frac{(-1)^m m!}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^n\rho^{2n}\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2x^{2m-2n-2k}dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}$$

$$\simeq \frac{(-1)^m m!}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^n\rho^{2n}I_{m+1}(m-n-k)\rho^{2m-2n-2k}\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2dx}{(x^2+\rho^2)^{m+2}}$$

$$\simeq \frac{(-1)^m m!}{\pi^2}\cdot\frac{\pi(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}\rho^{-2k-1}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^nI_{m+1}(m-n-k)$$

$$=\frac{(-1)^m\rho^{-2k-1}}{\pi}\cdot\frac{m!(2m+2)!}{2^{2m+2}[(m+1)!]^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^nI_{m+1}(m-n-k),$$

显然有

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x)x^{m-2k+1}dx=0,\ 0\leqslant k\leqslant\left[\frac{m+1}{2}\right].$$

所以有

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)\delta_\rho^{(m)}(x){}^*\varphi(x)dx\simeq\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}a_{m,k}\rho^{-1-2k}\varphi^{(m-2k)}(0),$$

其中

$$a_{m,k}=\frac{(-1)^m}{\pi}\cdot\frac{m!(2m+2)!}{(m-2k)!2^{2m+2}[(m+1)!]^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{m+1}{2n+1}(-1)^nI_{m+1}(m-n-k).$$

(5) 我们来计算 $a_{m,0}$,

$m=0$ 时, $a_{0,0}=\frac{1}{2\pi}$, $m\geqslant 1$ 时,因 $0\leqslant n\leqslant\left[\frac{m}{2}\right]$,故 $m-n\geqslant 1$,

$$I_{m+1}(m-n)=\frac{1\cdot 3\cdots(2m-2n-1)}{(2m+1)(2m-1)\cdots(2n+3)},$$

$$a_{m,0}=\frac{(-1)^m m!(2m+2)!}{\pi\cdot m!2^{2m+2}[(m+1)!]^2}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(m+1)!}{(2n+1)!(m-2n)!}$$

$$\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2m-2n-1)}{(2m+1)(2m-1)\cdots(2n+3)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{\pi\cdot 2^{2m+1}}\sum_{n=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^n\frac{(2m-2n)!}{(m-2n)!\,n!\,(m-n)!}.$$

利用组合恒等式[8],

$$2^m=\sum_{n=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^n\binom{m-n}{n}\binom{2m-2n}{m-n},$$

即得

$$a_{m,0}=\frac{(-1)^m}{2^{m+1}\pi}.$$

(6) 设 φ 的支集 $\subset(-a,a)$ 如前,则

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho^{(m)}(x)\delta_\rho^{(n)}(x)^*\varphi(x)dx=-\int_{-a}^{a}[\delta_\rho^{(m)}(x)^*\varphi(x)]'\delta_\rho^{(n-1)}(x)dx$$

$$=(-1)^n\int_{-a}^{a}[\delta_\rho^{(m)}(x)^*\varphi(x)]^{(n)}\delta_\rho(x)dx$$

$$=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\int_{-a}^{a}\delta_\rho^{(m+j)}(x)^*\varphi^{(n-j)}(x)\delta_\rho(x)dx$$

$$\simeq(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{[\frac{m+j}{2}]}a_{m+j,k}\rho^{-1-2k}\varphi^{(m+n-2k)}(0)$$

$$=\sum_{n=0}^{[\frac{m+n}{2}]}b_{m,n,k}\rho^{-1-2k}\varphi^{(m+n-2k)}(0),$$

其中

$$b_{m,n,k}=(-1)^n\sum_{j=N_k}^{n}\binom{n}{j}a_{m+j,k}.$$

当 m 为偶数时,

$$N_k=\begin{cases}0, & k\leqslant\dfrac{m}{2},\\ 2s, & k=\dfrac{m}{2}+s,\quad 1\leqslant s\leqslant\left[\dfrac{n}{2}\right],\end{cases}$$

当 m 为奇数时,

$$N_k=\begin{cases}0, & k\leqslant\left[\dfrac{m}{2}\right],\\ 2s-1, & k=\left[\dfrac{m}{2}\right]+s,\quad 1\leqslant s\leqslant\left[\dfrac{n+1}{2}\right].\end{cases}$$

(7) 按前文的定义,我们可以写为

$$\delta^{(m)}\circ\delta^{(n)}=\sum_{k=0}^{[\frac{m+n}{2}]}(-1)^{m+n-2k}b_{m,n,k}\theta\psi(\rho^{-1-2k})\delta^{(m+n-2k)},$$

其中 ψ: $M_0\to{}^\rho R$, θ: ${}^\rho R\to{}^\rho R'$.

(8) 计算:

$$b_{m,n,0}=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_{m+j,0}=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{m+j}}{2^{m+j+1}\pi}=\frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n+1}\pi}.$$

下面我们具体地算出一些特例. 为了符号的简洁,即以 ρ^{-1-2k} 表示 $\theta\phi(\rho^{-1-2k})$,

1) $\delta\circ\delta=\frac{1}{2\pi}\rho^{-1}\delta$, 2) $\delta\circ\delta'=\frac{1}{4\pi}\rho^{-1}\delta'$,

3) $\delta\circ\delta''=\frac{1}{8\pi}\rho^{-1}\delta''-\frac{1}{4\pi}\rho^{-3}\delta$, 4) $\delta\circ\delta'''=\frac{1}{16\pi}\rho^{-1}\delta'''-\frac{3}{8\pi}\rho^{-3}\delta'$,

5) $\delta\circ\delta^{(4)}=\frac{1}{32\pi}\rho^{-1}\delta^{(4)}-\frac{3}{8\pi}\rho^{-3}\delta''+\frac{3}{4\pi}\rho^{-5}\delta$,

6) $\delta\circ\delta^{(5)}=\frac{1}{64\pi}\rho^{-1}\delta^{(5)}-\frac{5}{16\pi}\rho^{-3}\delta^{(3)}+\frac{15}{8\pi}\rho^{-5}\delta'$,

7) $\delta'\circ\delta'=\frac{1}{8\pi}\rho^{-1}\delta''+\frac{1}{4\pi}\rho^{-3}\delta$.

三、$\delta^{(m)}(x)$ 和 x^{-n} 的乘积

我们先算 $\delta(x)\circ x^{-n}$,然后推广到 $\delta^{(m)}(x)\circ x^{-n}$, 利用上节得到的一些公式,本节的结果比较容易得到.

$$\delta_\rho(x)=\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{x^2+\rho^2},$$

$$(x^{-n})_\rho(x)=\frac{1}{(x^2+\rho^2)^n}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}\rho^{2j}x^{n-2j},$$

$$\delta_\rho(x)(x^{-n})_\rho(x)=\frac{1}{\pi(x^2+\rho^2)^{n+1}}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}\rho^{2j+1}x^{n-2j}.$$

(1) 对任意标准实数, $k=-1,0,1,2,\cdots\left[\frac{n}{2}\right]$,我们有

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)(x^{-n})_\rho(x)\cdot x^{n-2k}dx=\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\int_{-a}^{a}\frac{(-1)^j\binom{n}{2j}\rho^{2j+1}x^{2n-2j-2k}}{\pi(x^2+\rho^2)^{n+1}}dx$$

$$\simeq\left(\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^j}{\pi}\binom{n}{2j}\rho^{2j-1}\rho^{2n-2j-2k}I_n(n-j-k)\right)\int_{-a}^{a}\frac{\rho^2}{(x^2+\rho^2)^{n+1}}dx$$

$$\simeq\left(\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^j}{\pi}\binom{n}{2j}\rho^{2n-1-2k}I_n(n-j-k)\right)\frac{\pi}{\rho^{2n-1}}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$=\frac{\rho^{-2k}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}I_n(n-j-k).$$

(2) 设 $\varphi\in\mathscr{D}$, 取标准实数 a,使 $(-a,a)\supset\varphi$ 的支集,则有

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho(x)(x^{-n})_\rho(x)^*\varphi(x)dx\simeq\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}a_{n,k}\rho^{-2k}\varphi^{(n-2k)}(0),$$

其中

$$a_{n,k}=\frac{\binom{2n}{n}}{(n-2k)!\,2^{2n}}\sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^j\binom{n}{2j}I_n(n-j-k).$$

(3) 计算:

$$\int_{-a}^{a}\delta_\rho^{(m)}(x)(x^{-n})_\rho(x)*\varphi(x)dx=(-1)^m\int_{-a}^{a}[(x^{-n})_\rho(x)*\varphi(x)]^{m}\delta_\rho(x)dx$$

$$=(-1)^m\int_{-a}^{a}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(x^{-n})_\rho^{(j)}(x)*\varphi^{(m-j)}(x)\delta_\rho(x)dx$$

$$=\frac{(-1)^m}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j(n+j-1)!\int_{-a}^{a}(x^{-n-j})_\rho(x)*\varphi^{(m-j)}(x)\delta_\rho(x)dx$$

$$\simeq\sum_{k=0}^{[\frac{m+n}{2}]}b_{m,n,k}\rho^{-2k}\varphi^{(m+n-2k)}(0),$$

其中

$$b_{m,n,k}=\sum_{j=N_k}^{m}\frac{(-1)^{m+j}}{(n-1)!}\binom{m}{j}(n+j-1)!\,a_{n+j,k},$$

当 n 为偶数时 $$N_k=\begin{cases}0, & k\leqslant\frac{n}{2}\\ 2s, & k=\frac{n}{2}+s,\quad 1\leqslant s\leqslant\left[\frac{m}{2}\right],\end{cases}$$

当 n 为奇数时 $$N_k=\begin{cases}0, & k\leqslant\left[\frac{n}{2}\right],\\ 2s-1, & k=\left[\frac{n}{2}\right]+s,\quad 1\leqslant s\leqslant\left[\frac{m+1}{2}\right].\end{cases}$$

由上述所计算的 (1)—(3) 式可写出

$$\delta^{(m)}(x)\circ x^{-n}=\sum_{k=0}^{[\frac{m+n}{2}]}(-1)^{m+n-2k}b_{m,n,k}\theta\psi(\rho^{-2k})\delta^{(m+n-2k)}(x),$$

特别是

$$\delta(x)\circ x^{-n}=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^{n-2k}a_{n,k}\theta\psi(\rho^{-2k})\delta^{(n-2k)}(x).$$

(4) 计算:

$$b_{m,n,0}=\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^{m+j}}{(n-1)!}\binom{m}{j}(n+j-1)!\,\frac{1}{(n+j)!\,2^{n+j}}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^n(n-1)!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}\frac{2^j}{n+j}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^n(n-1)!}\int_0^1\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}x^{n+j-1}\frac{1}{2^j}dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^n(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\left(1-\frac{x}{2}\right)^m dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{(n-1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} y^{n-1}(1-y)^m dy.$$

由此可见，$\delta^{(m)}(x)\circ x^{-n}$ 的有限部分

$$\mathrm{Pf}(\delta^{(m)}(x)\circ x^{-n}) = (-1)^{m+n}b_{m,n,0}\delta^{(m+n)}(x) \neq 0.$$

(5) 特别，我们有

$$b_{0,n,0} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} y^{n-1}dy = \frac{1}{2^n\cdot n!},$$

故

$$\mathrm{Pf}\,\delta(x)\circ x^{-n} = \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\delta^{(n)}(x).$$

(6) $$b_{m,1,0} = (-1)^m\int_0^{\frac{1}{2}}(1-y)^m dy = (-1)^m\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{m+1},$$

故

$$\mathrm{Pf}(\delta^{(m)}(x)\circ x^{-1}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}-1}{m+1}\delta^{(m+1)}(x).$$

(8) 当 $m = n-1$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y^{n-1}(1-y)^m dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{n-1}dy = \frac{1}{2}B(n,n)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(2n)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!},$$

故

$$b_{n-1,n,0} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!},$$

$$\mathrm{Pf}(\delta^{(n-1)}(x)\circ x^{-n}) = \frac{(-1)^n}{2}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\delta^{(2n-1)}(x).$$

由本文第一节，实际上有

$$\delta^{(n-1)}(x)\circ x^{-n} = \mathrm{Pf}(\delta^{(n-1)}(x)\circ x^{-n}).$$

四、$\theta(x)$ 和 x^{-n} 的乘积

首先，求 x_{+}^{-n} 的解析表示. 设 $\varphi\in\mathscr{D}$，φ 的支集 $\subset(-a, a)$，a 是标准正实数.

$$\langle x_{+}^{-n},\varphi\rangle = \mathrm{Pf}\left(\int_\rho^a x^{-n*}\varphi(x)dx\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!}\langle \ln^{+}x, \varphi^{(n)}(x)\rangle,$$

$$\ln^{+}x = \begin{cases}\ln x, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

所以

$$x_+^n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\right)\delta^{(n-1)}(x) + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\ln^+ x.$$

不难证明 $\widehat{\ln}_+(z) = \frac{\ln^2 z}{-4\pi i} + \frac{\ln z}{2}$，这里 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $\ln z \neq 0$, $0 < \arg z < 2\pi$，故有

$$\hat{x}_+^{-n}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\ln z}{z^n} + \frac{1}{2z^n},\ n = 1, 2, \cdots.$$

$$\theta(x) = \begin{cases}1, & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}\quad \text{其解析表示为：}\ \hat{\theta}(z) = \frac{\ln z}{-2\pi i}$$

$$\theta_\rho(x) = \frac{\arg(x - i\rho) - \arg(x + i\rho)}{2\pi}.$$

（1）先计算:

$$\theta_\rho(x)(x^{-n})_\rho(x) - (x_+^{-n})_\rho(x) = \frac{\arg(x-i\rho) - \arg(x+i\rho)}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}$$
$$\cdot\left(\frac{1}{(x+i\rho)^n} + \frac{1}{(x-i\rho)^n}\right) + \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\ln|x+i\rho| + i\arg(x+i\rho)}{(x+i\rho)^n}\right.$$
$$\left.-\frac{\ln|x-i\rho| + i\arg(x-i\rho)}{(x-i\rho)^n}\right\} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+i\rho)^n} - \frac{1}{(x-i\rho)^n}\right]$$
$$= \frac{\ln|x+i\rho|}{2\pi i}\left[\frac{1}{(x+i\rho)^n} - \frac{1}{(x-i\rho)^n}\right].$$

（2）再计算:

$$\int_{-a}^{a}\frac{\ln|x+i\rho|}{2\pi i}\left[\frac{1}{(x+i\rho)^n} - \frac{1}{(x-i\rho)^n}\right]{}^*\varphi(x)dx$$
$$= \frac{-1}{(n-1)!}\int_{-a}^{a}({}^*\varphi(x)\ln|x+i\rho|)^{(n-1)}\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+\rho^2}dx$$
$$= \frac{-1}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{-a}^{a}\binom{n-1}{j}\delta_\rho^{(j-1)}(x)\frac{x}{x^2+\rho^2}{}^*\varphi^{(n-1-j)}(x)dx$$
$$+ \frac{-1}{(n-1)!}\sum_{j=2}^{n-1}\int_{-a}^{a}\binom{n-1}{j}(j-1)\delta_\rho^{(j-2)}(x){}^*\varphi^{(n-1-j)}(x)\frac{1}{x^2+\rho^2}dx$$
$$+ \frac{-1}{\pi(n-1)!}\int_{-a}^{a}(\ln|x+i\rho|)\cdot\frac{\rho}{x^2+\rho^2}{}^*\varphi^{(n-1)}(x)dx$$
$$= I + II + III.$$

其中

$$I = \frac{-1}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{-a}^{a}\binom{n-1}{j}\frac{(-1)^{j-1}(j-1)!\sum_s\binom{j}{2s+1}(-1)^s\rho^{2s+1}x^{j-2s}{}^*\varphi^{(n-1-j)}(x)dx}{\pi(x^2+\rho^2)^{j+1}}$$
$$\simeq \frac{-1}{\pi(n-1)!}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{[\frac{j}{2}]}\sum_{s=0}^{[\frac{j-1}{2}]}\binom{n-1}{j}(-1)^{j-1+s}(j-1)!$$

$$\cdot \binom{j}{2s+1} \frac{\varphi^{(n-1-2k)}(0)}{(j-2k)!} \int_{-a}^{a} \frac{\rho^{2s+1} x^{2j-2s-2k}}{(x^2+\rho^2)^{j+1}} dx$$

$$\simeq \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \rho^{-2k} \binom{n-1}{j} (-1)^{j+s} \binom{j}{2s+1} \frac{1}{2^j j} I_j(j-s-k) \frac{\varphi^{(n-1-2k)}(0)}{(j-2k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} A_k \rho^{-2k} \varphi^{(n-1-2k)}(0),$$

其中

$$A_k = \sum_{j=j_k}^{n-1} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{j+s}}{(n-1)!} \binom{n-1}{j} \binom{j}{2s+1} \frac{1}{2^j j} \frac{I_j(j-s-k)}{(j-2k)!},$$

$$j_0 = 1, \quad j_k = 2k, \quad k \geqslant 1.$$

$$II = \frac{-1}{(n-1)!} \sum_{j=2}^{n-1} \int_{-a}^{a} \binom{n-1}{j} (j-1)(-1)^j \frac{(j-2)!}{\pi}$$

$$\cdot {}^*\varphi^{(n-1-j)}(x) \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]} \frac{\binom{j-1}{2s+1} (-1)^s \rho^{2s+1} x^{j-2-2s}}{(x^2+\rho^2)^j} dx$$

$$\simeq -\frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]} \int_{-a}^{a} \binom{n-1}{j} (j-1)!(-1)^{j+s} \binom{j-1}{2s+1}$$

$$\cdot \frac{\varphi^{(n-1-2k)}(0) \rho^{2s+1} x^{2j-2-2s-2k}}{(j-2k)! \pi (x^2+\rho^2)^j} dx$$

$$\simeq \frac{-1}{(n-1)!} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]} (-1)^{j+s} \binom{n-1}{j} \binom{j-1}{2s+1}$$

$$\cdot \frac{\varphi^{(n-1-2k)}(0) \rho^{-2k}}{2^{j-1}(j-2k)!} I_{j-1}(j-1-s-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} B_k \rho^{-2k} \varphi^{(n-1-2k)}(0),$$

其中

$$B_k = \sum_{j=j'_k}^{n-1} \sum_{s=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{j+s+1}}{(n-1)!} \binom{n-1}{j} \binom{j-1}{2s+1} \frac{I_{j-1}(j-1-s-k)}{2^{j-1}(j-2k)!},$$

$$j'_0 = 2, \quad j'_k = 2k, \quad k \geqslant 1.$$

$$III = \frac{-1}{\pi(n-1)!} \int_{-a}^{a} (\ln|x+i\rho|) \frac{\rho}{x^2+\rho^2} {}^*\varphi^{(n-1)}(x) dx$$

$$\simeq \frac{-\varphi^{(n-1)}(0)}{2\pi(n-1)!} \int_{-a}^{a} \frac{\rho \ln(x^2+\rho^2)}{x^2+\rho^2} dx \overset{x=\rho y}{=\!=\!=} \frac{-\varphi^{(n-1)}(0)}{2\pi(n-1)!} \int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{\ln \rho^2(y^2+1)}{y^2+1} dy$$

$$= \frac{-\varphi^{(n-1)}(0)}{\pi(n-1)!} (\ln \rho) \int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{dy}{y^2+1} - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{2\pi(n-1)!} \int_{-\frac{a}{\rho}}^{\frac{a}{\rho}} \frac{\ln(y^2+1)}{y^2+1} dy$$

$$\simeq \frac{-2\varphi^{(n-1)}(0)}{\pi(n-1)!}(\ln\rho)\operatorname{tg}^{-1}\frac{a}{\rho} - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{\pi(n-1)!}\int_0^\infty \frac{\ln(y^2+1)}{y^2+1}dy.$$

令 $q = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{a}{\rho}$，则 $\operatorname{tg} q = \frac{\rho}{a}$，于是由微分中值定理，有

$$q = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\rho}{a} = \frac{\rho}{a}\frac{1}{1+\xi^2}, \quad 0 < \rho < \frac{\rho}{a}.$$

因为 $\rho\ln\rho \simeq 0$，故有

$$III \simeq \frac{-\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\ln\rho - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{\pi(n-1)!}\int_0^\infty \frac{\ln(y^2+1)}{y^2+1}dy.$$

综合上述，得

$$\theta(x)\circ x^{-n} = x_+^{-n} + \left(A_0 + B_0 - \frac{1}{\pi(n-1)!}\int_0^\infty \frac{\ln(y^2+1)}{y^2+1}dy\right)(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\theta\phi(\ln\rho)\delta^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(A_k + B_k)\theta\phi(\rho^{(-2k)})(-1)^{n-1}\delta^{(n-1-2k)}(x)$$

$$\operatorname{Pf}(\theta(x)\circ x^{-n}) = x_+^{-n} + \left(A_0 + B_0 - \frac{1}{\pi(n-1)!}\int_0^\infty \frac{\ln(y^2+1)}{y^2+1}dy\right)(-1)^n\delta^{(n-1)}(x).$$

参　考　文　献

[1] Güttinger, W., *SIAM J. Appl. Math.*, 15(1967), 4, 964—1000.

[2] 李邦河，中国科学，1978，1，1.

[3] Bremermann, J. H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley Reading Massachusetts, 1965.

[4] Luxemburg, W. A. J., *Amer. Math. Mouthly*, 80(1973), 6, Supplement, 38—67.

[5] Fisher, B., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1972, 72,201—204.

[6] Fisher, B., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1972, 71, 123—130.

[7] Mikusinski, J., *Bull. Acad. Polon Sci., Ser. Sci. Mathastr. Phys.*, 14(1966), 511—513.

[8] Riordan, J., *Cambinatorial Identities.*, New York, Wiley, 1968.