

基于扰动分析的随机离散事件系统的优化算法*

唐乾玉

(清华大学自动化系, 北京 100084)

陈翰馥

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

韩曾晋

(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘要 将扰动分析与随机逼近算法相结合, 得到基于扰动分析的随机离散事件系统的优化算法, 即所谓的“Single-Run-Optimization (SRO)”算法. 提出一类 SRO 算法, 证明它的收敛性, 估出收敛速度.

关键词 离散事件动态系统 扰动分析 随机优化 PARMSA 算法

考察一个随机离散事件系统, 记它的指标函数为 $J(\theta)$, 其中 θ 是决策变量或可调参数. 由于本质上的复杂性及随机特性, 能够用分析或数值计算方法来评估指标函数 $J(\theta)$ 或其灵敏度的系统, 是不多的. 人们往往求助于计算机仿真或实验方法来分析 DEDS 的性能指标. 扰动分析 (Perturbation Analysis, 简称 PA) 就是这样的一种方法. 它只要观测系统运行的一个样本轨道, 便可估性能指标对参数 θ 的梯度 $\frac{dJ(\theta)}{d\theta}$, 见文献[1~5].

将扰动分析方法与随机逼近算法结合起来, 就得到基于扰动分析的优化算法, 即所谓的“Single-Run-Optimization (SRO)”算法. Ho^[3] 与 Meketon^[6] 独立地提出下述思想: 用固定长度的观测值 (如 L 个事件) 估计 $\frac{dJ(\theta)}{d\theta}$, 然后用估计值代入随机逼近算法, 如 Robbins-Monro 算法 (简称 RM 算法):

$$\theta_{n+1} = \theta_n - b_n \frac{dJ(\theta)}{d\theta} \bigg|_{\text{第 } n+1 \text{ 步估计}},$$

递推地求 $J(\theta)$ 的最优点 θ^* . 文献[3~5] 称这种优化算法为 Perturbation-Analysis-Robbins-Monro-Single-Run 算法 (简称 PARMSR 算法). 关于 PARMSR 算法的实验研究, 已有较多文献, 如文献[4, 5, 7] 及其中的参考文献. 然而, 它的理论分析, 只是近来才有一些结果, 见文献[8~12].

对单服务台系统, Fu^[8], Chong, Ramadge^[9] 分析递推一个忙期 (或多个忙期) 的 PARMSR

1995-05-22 收稿, 1995-09-23 收修改稿

* 国家自然科学基金、中国博士后科学基金、中国科学院系统科学研究所系统控制开放实验室部分资助项目

算法, 即每隔一个忙期计算一次 $\frac{dJ(\theta)}{d\theta}$ 的估计, 再递推估计一次 θ_n . 由于一个忙期内服务的顾客数可能很多, 这时要观测很长一段时间才递推一次 θ_n . 这种递推算法不好用. 对具有固定长度周期的 PARMSR 算法, 也有一些结果, 见文献[10~12]. 然而, 这些文献的结果难以应用到较为一般的随机离散事件系统. 本质上文献[12]要用样本导数过程的单调性, 文献[10, 11]要用样本导数过程的 Lipschitz 条件, 这些条件不好验证.

本文提出一种具有固定长度周期的 PARMSR 算法, 证明它的收敛性, 估出收敛速度. 与已有文献相比, 它有较好的收敛速度, 所用条件简单, 适用于任意的再生系统, 以 GI/G/1 排队系统为例, 本文不要求文献[10, 11]中到达过程的“Bounded hazard rate”条件; 以 GI/G/m ($m > 1$) 排队系统为例, 本文不要求文献[11]中 Lipschitz 条件(13)以及文献[12]中样本导数过程的单调性.

1 具有固定长度周期的 PARMSR 算法

定义^[2, 13] 对随机过程 $\{W_n, t \geq 0\}$, 若存在一列停时序列 $\{k_m, m \geq 0\}$, 使得

(i) $\{k_{m+1} - k_m, m \geq 0\}$ 是独立同分布序列;

(ii) $\forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n, m \geq 0, (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ 与 $(W_{k_m+t_1}, \dots, W_{k_m+t_n})$ 同分布, 且 $\{W_n, 0 \leq t < k_m\}$ 与 $\{W_{k_m+t}, t \geq 0\}$ 独立,

则称 $\{W_n, t \geq 0\}$ 是再生过程. 它在计算机仿真、存储系统、排队系统、马氏过程理论等领域有广泛应用(见文献[2, 13]及其中参考文献).

我们考察一簇参数化的再生过程 $\{J_n(\theta), n \geq 0\}$, 再生点为 $\{k_n, n \geq 1\}$, $k_0 = 0$, 其中 θ 是决策变量或可调参数, 定义在一个紧集 D 上.

设第 m 个再生周期长度为 $\eta_m(\theta) = k_m - k_{m-1}$. 若 $E\eta_1(\theta) < \infty$, 则 $J_n(\theta)$ 弱收敛到 $\tilde{J}(\theta)$. 记 $J(\theta) = E\tilde{J}(\theta)$. 我们的问题就是要找 θ^* , 使得 $J(\theta^*) = \min_{\theta \in D} J(\theta)$. 不妨设 $\theta^* \in (a, b) \subset D$.

若 $E\eta_1(\theta) < \infty, E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} |J_i(\theta)| < \infty$, 则^[2, 13]

$$J(\theta) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i(\theta) = \frac{1}{E\eta_1(\theta)} E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} J_i(\theta), \quad (1.1)$$

其中最后一个等式称为“再生周期公式”.

现在考察样本导数过程 $\left\{ \frac{dJ_n(\theta)}{d\theta}; n \geq 1 \right\}$, 它称为 Infinitesimal Perturbation Analysis (IPA) 样本导数. 文献[1, 2]详细讨论了 $\left\{ \frac{dJ_n(\theta)}{d\theta} \right\}$ 的计算方法, 在此不赘述. 本文假定 $\left\{ \frac{dJ_n(\theta)}{d\theta}, n \geq 1 \right\}$ 是再生的, 与 $\{J_n(\theta), n \geq 1\}$ 有相同的再生点 $\{k_n(\theta), n \geq 0\}$. 能保证 $\left\{ \frac{dJ_n(\theta)}{d\theta}, n \geq 0 \right\}$ 是再生过程的一个充分条件是: 存在自由度为 1 的状态^[2].

若 $E\eta_1(\theta) < \infty, E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} \left| \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta} \right| < \infty$, 则由再生周期公式知,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{E\eta_1(\theta)} E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta}. \quad (1.2)$$

注意到 (1.1) 及 (1.2) 式, 自然会问, 是否有

$$g(\theta) \triangleq \frac{dJ(\theta)}{d\theta} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta} ? \quad (1.3)$$

这就是 IPA 讨论的核心问题.

将 Robbins-Monro 型随机逼近算法与 IPA 导数估计结合起来, 就得到以下递推周期长度为 1 的 PARMSR 算法:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \hat{\theta}_{n+1} I_{[a < \hat{\theta}_{n+1} < b]} + a I_{[\hat{\theta}_{n+1} \leq a]} + b I_{[\hat{\theta}_{n+1} \geq b]}, \\ \hat{\theta}_{n+1} = \theta_n - b_n(g(\theta_n) + \varepsilon_{n+1}), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中

$$\varepsilon_{n+1} = g_{n+1} - g(\theta_n), \quad (1.5)$$

这里 g_{n+1} 表示对 $g(\theta_n)$ 的估计. 一般地, 在第 $(m+1)$ 个再生周期内, 它有如下形式:

$$g_{k_m+i} = \frac{dJ_{k_m+i}(\theta_{k_m})}{d\theta}, \quad \forall 1 \leq i \leq \eta_{m+1}(\theta_{k_m}), \quad (1.6)$$

$$k_m = \sum_{i=1}^m \eta_i(\theta_{k_{i-1}}), \quad m \geq 1, \quad k_0 = 0. \quad (1.7)$$

于是递推周期长度为 1 的 PARMSR 算法由 (1.4)~(1.7) 式组成. 为给出递推周期长度为 L 的 PARMSR 算法, 先定义

$$\mu(n) = \left\lfloor \frac{n}{L} \right\rfloor, \quad \bar{\theta}_n = \theta_{\mu(n)}, \quad (1.8)$$

$$k_n = \sum_{i=1}^n \eta_i(\bar{\theta}_{k_{i-1}}), \quad k_0 = 0, \quad (1.9)$$

$$M(n) = \max\{l: k_l < n\}, \quad \forall n \geq 1. \quad (1.10)$$

我们用下述 g_{n+1} 来估计 $g(\theta_n)$:

$$g_{n+1} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \beta_{n+1,i}, \quad (1.11)$$

$$\beta_{n+1,i} = \frac{dJ_{nL+i}(\bar{\theta}_{k_{M(nL+i)}})}{d\theta}, \quad \forall 1 \leq i \leq L. \quad (1.12)$$

于是递推周期长度为 L 的 PARMSR 算法由 (1.4)、(1.5)、(1.8)~(1.12) 式组成.

在本节最后, 列出本文要用的条件:

(A1) 对某个常数 $\bar{b} > 0$ 及 $v \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $0 < b_n \leq \bar{b}n^{-v}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

(A2) 存在常数 $\alpha_0 > 0$, 使得

$$0 \leq \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \leq \alpha_0, \quad n \geq 1.$$

(A3) $g(\theta)$ 在 (a, b) 内有唯一零点 θ^* . 存在常数 B_1 , 使 $|g(\theta_1) - g(\theta_2)| \leq B_1|\theta_1 - \theta_2|$, $\forall \theta_1, \theta_2 \in [a, b]$.

(A4) 存在 i.i.d. 序列 $\{Z_m(\theta), m \geq 1\}$, 使得

$$\left| \frac{dJ_{k_m+i}(\theta)}{d\theta} \right| \leq Z_{m+i}(\theta), \quad \forall 1 \leq i \leq \eta_{m+i}(\theta), \theta \in [a, b].$$

(A5) $\sup_{\theta \in [a, b]} EZ_1(\theta)^4 < \infty, \sup_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta)^4 < \infty$.

(A6) $J_i(\theta)$ 关于 θ 绝对连续, $\forall i \geq 1$.

(A7) $0 \leq \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_1$.

(A8) $g(\theta) = g_0(\theta - \theta^*) + \Delta(\theta)$, $\Delta(\theta^*) = 0$, $g_0 > 0$, $-g_0 + \alpha_1 \delta < 0$, $\delta \in [0, 1]$, 且在 θ^* 附近有 $\Delta(\theta) = O(|\theta - \theta^*|^2)$.

(A9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\log b_n^{-1}} = \infty$.

(A10) 当 $\theta \rightarrow \theta^*$ 时, $g(\theta) = g_0(\theta - \theta^*)^\gamma(1 + o(1))$, $\gamma > 0$, $g_0 > 0$.

以上条件中, (A7) ~ (A10) 只是在求算法的收敛速度时用到. 条件 (A1)、(A2)、(A7)、(A9) 用于步长因子 $\{b_n, n \geq 1\}$ 的选取, 取 $b_n = \frac{c}{n}$, $n \geq 1$, 这些条件都满足. 条件 (A4) ~ (A6) 容易验证, 如 $GI/G/1$ 排队系统、 $GI/G/m$ 排队系统、串行生产线、具有自由度为 1 的状态的广义半马氏过程, 参见文献[2, 10 ~ 12].

2 算法的收敛性分析

先分析递推周期长度为 1 的 PARMSR 算法. 要证几个引理.

引理 2.1 若条件 (A4) ~ (A6) 成立. 则 IPA 导数估计是强一致的, 即

$$g(\theta) = \frac{1}{E\eta_1(\theta)} E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta}.$$

证 定义

$$M(i) = \sup\{l: k_l < i\}, \quad \forall i \geq 1. \quad (2.1)$$

由条件 (A4) 知

$$\left| \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta} \right| \leq Z_{M(i)+1}(\theta), \quad i \geq 1. \quad (2.2)$$

利用再生周期公式及条件 (A5), 由 (2.2) 式得

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta} \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{M(i)+1}(\theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E\eta_1(\theta)} E\eta_1(\theta) Z_1(\theta) \leq \\ &\sup_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta) Z_1(\theta) \leq \sup_{\theta \in [a, b]} \sqrt{E\eta_1(\theta)^2} \sqrt{EZ_1(\theta)^2} < \\ &\infty, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

利用条件 (A6), 得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(s)}{ds} \right) ds. \quad (2.3)$$

再次利用再生周期公式并利用控制收敛定理, 由 (2.3) 式得到

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i(\theta) = \frac{d}{d\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J_i(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(s)}{ds} \right) ds \right\} = \\
&= \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{dJ_i(s)}{ds} ds = \frac{d}{d\theta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{E\eta_1(s)} E \sum_{i=1}^{\eta_1(s)} \frac{dJ_i(s)}{ds} ds = \\
&= \frac{1}{E\eta_1(\theta)} E \sum_{i=1}^{\eta_1(\theta)} \frac{dJ_i(\theta)}{d\theta}.
\end{aligned}$$

以下取 $\delta \in \left[0, 1 - \frac{1}{2\nu} \right)$.

引理 2.2 若条件 (A1) 和 (A3)~(A5) 成立, 则对任意固定的 m' 及 i' , 有

$$\sum_{i=k_m}^{k_m+m'+i'} b_i^{1-\delta} \varepsilon_{i+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ a.s.}$$

证 由 (1.5)、(1.6) 式及条件 (A4) 知,

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_{k_m+i+j}| &\leq \max_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| + |g_{k_m+i}(\theta_{k_m})| \leq \max_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| + Z_{m+1}(\theta_{k_m}), \\
\forall 1 \leq i \leq \eta_{m+1}(\theta_{k_m}), \quad m \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

利用 Tang, Chen^[12] 中 Lemma 2, 由条件 (A1)、(A5) 及 (2.4) 式得到

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=k_m}^{k_m+m'+i'} b_i^{1-\delta} \varepsilon_{i+1} \right| &\leq \sum_{i=0}^{m'+i'} \sum_{j=1}^{\eta_{m+i+1}(\theta_{k_m+i})} b_{k_m+i+j-1}^{1-\delta} |\varepsilon_{k_m+i+j}| \leq \\
b^{-1-\delta} \sum_{i=0}^{m'+i'} \left[\max_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| \frac{\eta_{m+i+1}(\theta_{k_m+i})}{(m+i)^{\nu(1-\delta)}} + \frac{\eta_{m+i+1}(\theta_{k_m+i})}{(m+i)^{\nu(1-\delta)/2}} \frac{Z_{m+i+1}(\theta_{k_m+i})}{(m+i)^{\nu(1-\delta)/2}} \right] &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \text{ a.s.}
\end{aligned}$$

引理 2.3 若条件 (A1)~(A6) 成立, 则 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} b_{k_m+i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{k_m+i}$ 收敛, a.s.

证 易知

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} b_{k_m+i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{k_m+i} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (b_{k_m+i-1}^{1-\delta} - b_{k_m+i}^{1-\delta}) \varepsilon_{k_m+i} + \\
\sum_{m=1}^{\infty} b_{k_m}^{1-\delta} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g(\theta_{k_m}) - g(\theta_{k_m+i-1})) &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_{k_m}^{1-\delta} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g_{k_m+i} - g(\theta_{k_m})).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

欲证引理 2.3, 只要证明 (2.5) 式等号右端每一项收敛.

(i) 由条件 (A2) 知,

$$1 \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \leq 1 + \alpha_0 b_n,$$

由此得

$$0 \leq b_n^{1-\delta} - b_{n+1}^{1-\delta} \leq \alpha_0 b_n^{2-\delta}, \quad \forall n \geq 1. \tag{2.6}$$

所以,

$$\begin{aligned}
|b_{k_m+i}^{1-\delta} - b_{k_m}^{1-\delta}| &\leq \sum_{j=1}^i |b_{k_m+j}^{1-\delta} - b_{k_m+j-1}^{1-\delta}| \leq \alpha_0 \eta_{m+1}(\theta_{k_m}) b_{k_m}^{2-\delta}, \\
\forall 1 \leq i \leq \eta_{m+1}(\theta_{k_m}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

利用条件 (A5) 及 Hölder 不等式, 知

$$E\eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 Z_{m+1}(\theta_{k_m}) \leq \left(\sup_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta)^3 \right)^{2/3} \left(\sup_{\theta \in [a, b]} EZ_1(\theta)^3 \right)^{1/3} < \infty, \quad \forall m \geq 0. \quad (2.8)$$

由 (2.4)、(2.7)、(2.8) 式得到

$$\begin{aligned} E \sum_{m=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (b_{k_m+i-1}^{1-\delta} - b_{k_m+i}^{1-\delta}) \varepsilon_{k_m+i} \right| &\leq E \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_0 b_{k_m}^{2-\delta} \eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 \left(\max_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| + Z_{m+1}(\theta_{k_m}) \right) \leq \\ &\alpha_0 \bar{b}^{2-\delta} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(2-\delta)\nu} \left[\max_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| \max_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta)^2 + E\eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 Z_{m+1}(\theta_{k_m}) \right] < \infty, \end{aligned}$$

所以, (2.5) 式等号右端第一项收敛.

(ii) 利用条件 (A4), 由 (1.4) 式知

$$\begin{aligned} |\theta_{k_m+i} - \theta_{k_m}| &\leq \sum_{j=1}^i |\theta_{k_m+j} - \theta_{k_m+j-1}| \leq \sum_{j=1}^i b_{k_m+j-1} |g_{k_m+j}| \leq b_{k_m} \sum_{j=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} |g_{k_m+j}| \leq \\ &b_{k_m} \eta_{m+1}(\theta_{k_m}) Z_{m+1}(\theta_{k_m}), \quad \forall 1 \leq i \leq \eta_{m+1}(\theta_{k_m}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

于是, 利用条件 (A3), 由 (2.8)、(2.9) 式得

$$\begin{aligned} E \sum_{m=1}^{\infty} b_{k_m}^{1-\delta} \left| \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g(\theta_{k_m}) - g(\theta_{k_m+i-1})) \right| &\leq \\ \bar{b}^{2-\delta} B_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-(2-\delta)\nu} E\eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 Z_{m+1}(\theta_{k_m}) &< \infty, \end{aligned}$$

由此知 (2.5) 式等号右端第二项收敛.

(iii) 定义 σ -代数

$$\mathcal{F}_m = \sigma\{J_1(\theta_0), \dots, J_{k_1}(\theta_0); \dots; J_{k_{m-1}+1}(\theta_{k_{m-1}}), \dots, J_{k_m}(\theta_{k_{m-1}})\}, \quad \forall m \geq 1.$$

则由引理 2.1 知

$$\begin{aligned} E \left\{ \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g_{k_m+i} - g(\theta_{k_m})) | \mathcal{F}_m \right\} &= E \left\{ \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} \frac{dJ_{k_m+i}(\theta_{k_m})}{d\theta} - \eta_{m+1}(\theta_{k_m}) g(\theta_{k_m}) | \mathcal{F}_m \right\} = \\ E \left\{ \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} \frac{dJ_{k_m+i}(\theta_{k_m})}{d\theta} | \theta_{k_m} \right\} &- g(\theta_{k_m}) E \{ \eta_{m+1}(\theta_{k_m}) | \theta_{k_m} \} = 0, \end{aligned}$$

由此知 $\left\{ \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g_{k_m+i} - g(\theta_{k_m})) | \mathcal{F}_m \right\}$ 是鞅差序列. 另外, 利用 Schwarz 不等式及条件 (A5) 知

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g_{k_m+i} - g(\theta_{k_m})) \right]^2 | \mathcal{F}_m \right\} &\leq \\ E \left\{ \eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 \left(\sup_{\theta \in [a, b]} |g(\theta)| + Z_{m+1}(\theta_{k_m}) \right)^2 | \mathcal{F}_m \right\} &\leq \\ 2 \sup_{\theta \in [a, b]} g(\theta)^2 E \{ \eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 | \mathcal{F}_m \} + 2 E \{ \eta_{m+1}(\theta_{k_m})^2 Z_{m+1}(\theta_{k_m})^2 | \mathcal{F}_m \} &\leq \\ 2 \sup_{\theta \in [a, b]} g(\theta)^2 \sup_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta)^2 + 2 \left(\sup_{\theta \in [a, b]} E\eta_1(\theta)^4 \right)^{1/2} \left(\sup_{\theta \in [a, b]} EZ_1(\theta)^4 \right)^{1/2} &\triangleq B_2 < \infty. \end{aligned}$$

从而得到

$$\sum_{m=1}^{(\infty)} b_{k_m}^{2(1-\delta)} E \left\{ \left[\sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} (g_{k_m+i} - g(\theta_{k_m})) \right]^2 \middle| \mathcal{F}_m \right\} \leq \\ \bar{b}^{2(1-\delta)} \sum_{m=1}^{(\infty)} m^{-2(1-\delta)\nu} B_2 < \infty.$$

由鞅的局部收敛定理^[14]知(2.5)式等号右端第三项收敛.

引理 2.4 若条件(A1)~(A6)成立, 则 $\sum_{n=1}^{(\infty)} b_n^{1-\delta} \varepsilon_{n+1}$ 收敛 a.s., 其中 $\delta \in \left[0, 1 - \frac{1}{2\nu}\right)$.

证 由引理 2.3 知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 i_0 使得

$$\left| \sum_{m=1}^{i_2} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} b_{k_m+i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{k_m+i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall i_2 \geq i_1 \geq i_0. \quad (2.10)$$

取 $n_0 \geq k_{i_0+1}$, 由(2.10)式知, 当 $n_2 > n_1 \geq n_0$ 时,

$$\left| \sum_{m=M(n_1)}^{M(n_2)-1} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} b_{k_m+i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{k_m+i} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.11)$$

由引理 2.2 知, 当 n_0 充分大时,

$$\left| \sum_{i=k_{M(n_1)+1}}^{n_1} b_{i-1}^{1-\delta} \varepsilon_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{i=k_{M(n_2)}}^{n_2} b_{i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{i+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.12)$$

联立(2.11)和(2.12)式, 得

$$\left| \sum_{i=1}^{n_2} b_{i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{i+1} \right| = \left| \sum_{m=M(n_1)}^{M(n_2)-1} \sum_{i=1}^{\eta_{m+1}(\theta_{k_m})} b_{k_m+i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{k_m+i} - \sum_{i=k_{M(n_1)+1}}^{n_1} b_{i-1}^{1-\delta} \varepsilon_i + \sum_{i=k_{M(n_2)}}^{n_2} b_{i-1}^{1-\delta} \varepsilon_{i+1} \right| \leq \varepsilon.$$

从而该引理得证.

由引理 2.4 及文献[15]中的一个随机逼近定理^[1], 即得

定理 2.1 若(A1)~(A6)成立, 而对递推周期长度为 1 的 PARMSR 算法(1.4)~(1.7)式有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*$, a.s.

上述结果可以推广到递推周期长度为 $L(>1)$ 的情况.

定理 2.2 若条件(A1)~(A6)成立, 则对递推周期长度为 L 的 PARMSR 算法(1.4)、(1.5)、(1.8)~(1.12)式有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*$, a.s.

证 关键是证明 $\sum_{n=1}^{(\infty)} b_n^{1-\delta} \varepsilon_n$ 收敛. 为此, 定义

$$\beta_{(n-1)L+j} = \beta_{n,j}, \quad j=0, 1, \dots, L-1; \quad n \geq 1, \\ \bar{\varepsilon}_n = \beta_n - g(\bar{\theta}_{n-1}), \quad \forall n \geq 1.$$

用 β_n , $\bar{\theta}_n$, $\bar{\varepsilon}_n$ 分别代替引理 2.2~2.4 中的 g_n , θ_n , ε_n , 引理 2.2~2.4 的证明仍然可以通过. 方法与文献[12]类似, 不再赘述.

利用引理 2.4 和 Chen 的结果^[2](参见 Tang 文^[3]), 可求得以下收敛速度.

1) Chen H F, Zhu Y M. Stochastic Approximation. Shanghai Press of Science and Technology, to be published, 1995

2) Chen H F. Convergence rate of stochastic approximation for the case $f(x^0)=0$, $f'(x^0)=0$. Technical Report, Institute of Systems Science, The Chinese Academy of Sciences, 1995; 及脚注 1)

3) Tang Q Y, Chen H F, Han Z J. Convergence rates of Perturbation-Analysis-Robbins-Monro-Single-Run algorithms. Submitted for Publication, Jan 1995

定理 2.3 若条件(A1)~(A6)成立, 则对递推周期长度为1的PARMSR算法(1.4)~(1.7)式及递推周期长度为 L 的PARMSR算法(1.4)、(1.5)、(1.8)~(1.12)式, 有如下收敛速度:

(i) 若条件(A1)、(A3)~(A8)成立, 则

$$|\theta_n - \theta^*| = o(b_n^\delta), \text{ a.s.}$$

(ii) 若条件(A1)、(A3)~(A7)、(A9)~(A10)成立, 且 $\alpha_1 > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log b_n^{-1})^{1/2} |\theta_n - \theta^*| = \left(\frac{\alpha_1}{g_0'} \right)^{1/2}, \text{ a.s.}$$

参 考 文 献

- 1 Ho Y C, Cao X R. Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems. Kluwer Academic Pub, 1991
- 2 Glasserman P. Gradient Estimation via Perturbation Analysis. Kluwer Academic Pub, 1991
- 3 Suri R. Perturbation analysis: the state of the art and research issues explained via the $GI/G/1$ queue. Proc IEEE, 1989, 77(1): 114~137
- 4 Suri R, Leung Y T. Single run optimization of discrete event simulations: An empirical study using the $M/M/1$ queue. IIE Transactions, 1989, 21(1): 35~49
- 5 Suri R, Zazanis M A. Perturbation analysis gives strongly consistent sensitivity estimates for the $M/G/1$ queue. Management Sci, 1988, 34(1): 39~64
- 6 Meketon M S. A tutorial on optimization in simulations. Proc of the Winter Simulation Conference, 1983. 58~67
- 7 Fu M C, Ho Y C. Using perturbation analysis for gradient estimation, averaging and updating in a stochastic approximation algorithm. In: Proc 1988 Winter Simulation Conf, San Diego CA, 1988. 509~517
- 8 Fu M C. Convergence of a stochastic approximation algorithm for the $GI/G/1$ queue using infinitesimal perturbation analysis. J of Optim Theory and Appl, 1990, 65(1): 149~160
- 9 Chong E K P, Ramadge P J. Convergence of recursive optimization algorithms using infinitesimal perturbation analysis estimates. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Appl, 1992, 1(4): 339~372
- 10 Chong E K P, Ramadge P J. Optimization of queues using an infinitesimal perturbation analysis-based stochastic algorithm with general updates times. SIAM J Contr Optim, 1993, 31(3): 698~732
- 11 Chong E K P, Ramadge P J. Stochastic optimization of regenerative systems using infinitesimal perturbation analysis. IEEE Trans Automat Contr, 1994, 39(7): 1400~1410
- 12 Tang Q Y, Chen H F. Convergence of perturbation analysis based optimization algorithm with fixedlength observation period. Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Appl, 1994, 4(4): 359~375
- 13 Shedler G S. Regenerative Stochastic Simulation. New York: Academic Press, 1993
- 14 Chow Y S. Local convergence of martingale and the law of large numbers. Ann Math Stat, 1965, 36(1): 552~558
- 15 Chen H F. Stochastic approximation and its new applications. In: Proc of 1994 Hong Kong International Workshop on New Directions of Control and Manufacturing, Hong Kong, 1994. 2~12