关于随机微分方程 Girsanov 变换的路径独立性

献给严加安院士 80 华诞

王风雨¹, 吴奖伦^{2*}

1. 天津大学应用数学中心, 天津 300072;

2. Department of Mathematics, Swansea University, Bay Campus, Swansea SA1 8EN, UK

E-mail: wangfy@tju.edu.cn, J.L.Wu@swansea.ac.uk

收稿日期: 2020-09-19; 接受日期: 2020-12-29; 网络出版日期: 2021-11-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771326, 11831014 和 11921001) 资助项目

摘要 本文介绍了近十年来关于随机微分方程 Girsanov 变换的路径独立性的主要研究成果. 该性质因反映了金融数学中市场的有效性而具有明确的应用背景, 也因等价于一些非线性偏微分方程而具有数学研究价值. 本文分别就经典的随机微分方程、带跳的随机微分方程、随机偏微分方程和分布依赖随机微分方程, 介绍 Girsanov 变换的路径独立性所联系的非线性偏微分方程, 并对其他相关研究加以评注. 最后, 作为一个新结果, 本文使用非线性偏微分方程刻画了随机微分方程解的路径无关性.

关键词 随机微分方程 Girsanov 变换 路径独立性 非线性偏微分方程

MSC (2020) 主题分类 60H10, 60H30, 58J65

1 引言

作为随机分析的基础理论, Itô 随机变分学发端于使用概率论研究偏微分方程, 并被广泛地应用于其他数学分支以及金融、生物和医学等许多应用领域的研究. Girsanov 变换 (也称作漂移变换, 参见文献 [1]) 是随机微分方程研究中的重要工具, 通过将有限变差项吸收到噪声中而实现对模型的正则化、简单化和标准化. 在金融数学中, Girsanov 变换的路径独立性反映了市场的有效性, 如文献 [2, 3] 关于 Black-Scholes 模型^[4, 5] Girsanov 变换的路径独立性与概率测度风险中立性的讨论. 而关于 Girsanov 变换路径独立性的数学刻画则发端于文献 [6, 7], 这两篇文献对于一些 (一维和高维) 非退化的随机微分方程给出了该性质成立的充分必要条件. 此后, 相关成果被陆续推广到其他多种模型, 参见文献 [8–17]. 有趣的是, 路径独立性也出现于其他问题的研究中, 例如, 文献 [18–23] 基于 Dynkin 公式使用路径独立性来描述 Bernstein 过程关于时间的随机对称性.

本文的主旨是介绍关于随机 (偏) 微分方程 Girsanov 变换的路径独立性刻画的研究进展. 为清楚地阐述基本的研究思想, 首先基于文献 [6] 就非退化的随机微分方程介绍研究背景, 叙述并证明主要

英文引用格式: Wang F Y, Wu J L. On path independence of Girsanov transformation for stochastic differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1861–1876, doi: 10.1360/SSM-2020-0287

定理, 然后把主要结果推广到其他模型, 包括带跳情形^[9]、半线性随机偏微分方程^[8,10] 和分布依赖情形^[15]. 受篇幅所限, 除了非退化随机微分方程外, 本文对于所介绍的这些推广结果不予证明, 有兴趣的读者可参考相关文献, 并延伸阅读文献 [11–14] 关于退化的分布依赖的带跳随机微分方程的研究、文献 [16] 关于非线性期望下的随机微分方程的研究, 以及文献 [17] 关于倒向随机微分方程的研究.

2 非退化随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的如下随机微分方程:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

其中 B_t 为完备流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, \infty)})$ 上的 d 维 Brown 运动,

$$b: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \sigma: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$$

为可测映射. 熟知文献 [1], 当这两个映射关于空间变量为局部 Lipschitz 连续的并具有线性增长时, 该随机微分方程适定. 实际上, 由于噪声的非退化性, 对于满足某种可积条件的奇异漂移项 b , 该方程也是适定的 (参见文献 [24]).

使用 Girsanov 变换, 我们可以把额外的漂移项吸收到噪声中. 设 $\gamma: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 可测, 满足 Novikov 条件

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t |\gamma(s, X_s)|^2 ds \right) \right] < \infty, \quad t > 0,$$

则由 Girsanov 定理可知,

$$\exp \left(\int_0^t \gamma(s, X_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma(s, X_s)|^2 ds \right), \quad t \in [0, \infty)$$

是一个指数鞅, 并且任给 $t > 0$, 在概率测度

$$\tilde{P}_t := \exp \left(\int_0^t \gamma(s, X_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma(s, X_s)|^2 ds \right) \cdot P$$

之下,

$$\tilde{B}_s := B_s - \int_0^s \gamma(s, X_r) dr, \quad s \in [0, t]$$

为 d 维 Brown 运动. 测度 $\tilde{P}_t$ 关于原概率测度的 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{d\tilde{P}_t}{dP} = \exp \left(\int_0^t \gamma(s, X_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma(s, X_s)|^2 ds \right). \quad (2.2)$$

此时, 可将原随机微分方程改写成

$$dX_s = \{b(s, X_s) + \sigma(s, X_s)\gamma(s, X_s)\}dt + \sigma(s, X_s)d\tilde{B}_s, \quad s \in [0, t],$$

其中 $\gamma(s, X_s)$ 通常被用来消除 $b(s, X_s)$ 中的奇异部分. 特别地, 当 $b(s, x) = -\sigma(s, x)\gamma(s, x)$ 时, X_s 在 $\tilde{P}_t$ 之下为局部鞅.

在金融数学中, Radon-Nikodym 导数 (2.2) 被用来作为研究优化控制问题的效用函数或变分计算中的作用泛函. 作为 Brown 运动的泛函, 它通常依赖于 Brown 运动的路径 $B_{[0,t]} := (B_{s \wedge t})_{s \geq 0}$ 或解的路径 $X_{[0,t]} := (X_{s \wedge t})_{s \geq 0}$. 在金融数学中, 平衡 (有效) 市场要求效用函数只依赖于初值 X_0 和终值 X_t 而不是路径 $X_{[0,t]}$, 参见文献 [2, 5], 其中文献 [2] 对于 Black-Scholes 模型的 Girsanov 变换验证了这样的路径独立性. 此外, 在最优控制和变分计算中, 需要刻画 $\frac{d\tilde{P}_t}{dP}$ 在容许路径中的极值, 如果达到极值的路径 (即临界路径) 具有路径独立性 (只依赖于初值和终值), 则在求极值过程中可排除路径因素而将问题转化为有限维问题. 下面给出 Girsanov 变换路径独立性的定义, 并在非退化情形使用偏微分方程加以刻画. 对于给定的 $T \in (0, \infty]$, 考虑在时刻 T 之前的随机微分方程. 当 $T = \infty$ 时, 约定 $[0, T] = [0, \infty)$.

定义 2.1 如果存在函数 $Z : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$Z(t, X_t) - Z(0, X_0) = \int_0^t \gamma(s, X_s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\gamma(s, X_s)|^2 ds, \quad t \in [0, T],$$

则称相应的 Girsanov 变换 (2.2) 为路径独立的.

为吸收漂移项 b , 假设 σ 可逆并考虑

$$\gamma(t, x) = -(\sigma(t, x))^{-1} b(t, x).$$

假设

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t |(\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s)|^2 ds \right) \right] < \infty, \quad \forall t > 0,$$

则 (2.2) 化为

$$\frac{d\tilde{P}_t}{dP} = \exp \left(- \int_0^t \langle (\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s), dB_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |(\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s)|^2 ds \right).$$

对于可微函数 $v : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, 如果 $\partial_t v(t, x)$ 、 $\nabla_x v(t, x)$ 和 $\nabla_x^2 v(t, x)$ 存在且关于 (t, x) 连续, 则记成 $v \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$; 如果 v 的值域为某个 Hilbert 空间 H 且关于 t 一次可导连续, 关于 x 二次 Frechet 可导连续, 则记成 $v \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; H)$. 下面的定理刻画了

$$\hat{Z}_t := -\log \frac{d\tilde{P}_t}{dP} = \int_0^t \langle (\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s), dB_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t |(\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s)|^2 ds$$

的路径独立性, 关于 $d = 1$ 的研究参见文献 [7].

定理 2.1 [6] 任给 $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, 以下两个论断等价:

(1) $\hat{Z}_t = v(t, X_t) - v(0, X_0)$, $t \in [0, T]$, 即

$$\begin{aligned} v(t, X_t) &= v(0, X_0) + \frac{1}{2} \int_0^t |(\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s)|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \langle (\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s), dB_s \rangle, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(2) $b(t, x) = (\sigma \sigma^* \nabla v)(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, 且 v 满足如下逆时间 Burgers-KPZ (Kardar-Parisi-Zhang) 型方程:

$$\partial_t v(t, x) = -\frac{1}{2} \{ [\text{tr}(\sigma \sigma^* \nabla_x^2 v)](t, x) + |\sigma^* \nabla_x v|^2(t, x) \}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由 (1) 知,

$$dv(t, X_t) = \frac{1}{2} |(\sigma(t, X_t))^{-1} b(t, X_t)|^2 dt + \langle (\sigma(t, X_t))^{-1} b(t, X_t), dB_t \rangle. \quad (2.4)$$

另一方面, 由 X_t 所满足的随机微分方程 (2.1), 并对 $v(t, X_t)$ 使用 Itô 公式, 可得

$$dv(t, X_t) = \left\{ \partial_t v(t, X_t) + \frac{1}{2} [\text{tr}(\sigma \sigma^*) \nabla^2 v](t, X_t) + \langle b, \nabla v \rangle(t, X_t) \right\} dt + \langle (\sigma^* \nabla v)(t, X_t), dB_t \rangle.$$

将该公式与 (2.4) 比较并利用 Doob-Meyer 分解的唯一性, 得到 $dt \times \mathbb{P}$ -a.e.

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1} b)(t, X_t) &= (\sigma^* \nabla v)(t, X_t), \\ \frac{1}{2} |(\sigma^{-1} b)(t, X_t)|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, X_t) + \frac{1}{2} [\text{tr}(\sigma \sigma^* \nabla^2 v)](t, X_t) + \langle b, \nabla v \rangle(t, X_t). \end{aligned}$$

由于随机微分方程非退化, X_t 以正概率在任意非空开集上取值, 由此结合上面式子所涉及的每一项关于时空变量的连续性, 得到

$$\begin{aligned} (\sigma^{-1} b)(t, x) &= (\sigma^* \nabla v)(t, x), \\ \frac{1}{2} |(\sigma^{-1} b)(t, x)|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \langle b, \nabla v \rangle(t, x) + \frac{1}{2} [\text{tr}(\sigma \sigma^* \nabla^2 v)](t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

从而 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1). 由 (2) 知,

$$\begin{aligned} dv(t, X_t) &= \left[-\frac{1}{2} |\sigma^* \nabla v|^2(t, X_t) + \langle b, \nabla v \rangle(t, X_t) \right] dt + \langle (\sigma^* \nabla v)(t, X_t), dB_t \rangle \\ &= \frac{1}{2} |\sigma^{-1} b|^2(t, X_t) dt + \langle (\sigma^{-1} b)(t, X_t), dB_t \rangle. \end{aligned}$$

故

$$v(t, X_t) = v(0, X_0) + \frac{1}{2} \int_0^t |(\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s)|^2 ds + \int_0^t \langle (\sigma(s, X_s))^{-1} b(s, X_s), dB_s \rangle.$$

从而 (1) 成立. $\square$

文献 [6] 还将该结果推广到了 Riemann 流形情形. 此外, 对于形如 $b(t, x) = \sigma(t, x) \gamma(t, x)$ 的漂移项, 文献 [14] 把该结果推广到了退化 (亚椭圆) 情形, 见本文第 5 节关于更一般 (分布依赖、可退化) 模型的讨论.

上述定理所涉及的非线性偏微分方程包括一些重要例子. 为简单计, 我们回到文献 [7] 所讨论的 $d = 1$ 情形来介绍两个例子. 令 $\sigma(t, x) > 0$, 考虑

$$u(t, x) := \frac{b(t, x)}{\sigma^2(t, x)}, \quad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R},$$

则上述定理可叙述成: 对于 $v \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$,

$$v(t, X_t) = v(0, X_0) - \int_0^t \frac{b(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left| \frac{b(s, X_s)}{\sigma(s, X_s)} \right|^2 ds$$

当且仅当 $u(t, x) = \partial_x v(t, x)$, 且

$$\partial_t v(t, x) = -\frac{1}{2} \{ \sigma^2 \partial_x^2 v + \sigma^2 (\partial_x v)^2 \}(t, x).$$

如果 $v(t, x)$ 关于 x 三阶可微, 则对该偏微分方程关于 x 求导得到 $u(t, x) = \partial_x v(t, x)$ 所满足的方程

$$\partial_t u(t, x) = -\frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u(t, x) - \sigma(\partial_x \sigma + \sigma u)(t, x) \partial_x u(t, x) - (\sigma u^2 \partial_x \sigma)(t, x). \quad (2.5)$$

例 2.1 设 $\sigma > 0$ 为常数, 则偏微分方程 (2.5) 就是经典的逆时间 Burgers 方程

$$\partial_t u(t, x) = -\frac{\sigma^2}{2} \partial_x^2 u(t, x) - \sigma^2 u(t, x) \partial_x u(t, x).$$

例 2.2 对于 $m \in \mathbb{N}$, $0 < u \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, 令

$$b(t, x) = m[u(t, x)]^m, \quad \sigma(t, x) = \sqrt{m}[u(t, x)]^{\frac{m-1}{2}},$$

则 $u = \frac{b}{\sigma^2}$ 且偏微分方程 (2.5) 化为渗流 (porous) 介质方程

$$\partial_t u(x, t) = -\frac{1}{2} \partial_x^2 u^m(t, x) - m \partial_x u^{m+1}(t, x).$$

3 带跳的随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上如下的随机微分方程:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t + \int_{\mathbb{U}_0} f(t, X_{t-}, u) \tilde{N}_\lambda(dt, du), \quad t \geq 0,$$

其中 $b(t, x)$ 、 $\sigma(t, x)$ 和 B_t 如前, $N_\lambda(dt, du)$ 为有限维赋范空间 $(\mathbb{U}, \|\cdot\|_{\mathbb{U}})$ 上强度为 $\lambda(t, u)dt\nu(du)$ 的 Poisson 随机测度, 这里 $\lambda: [0, \infty) \times \mathbb{U} \rightarrow (0, 1]$ 可测, ν 为 $\mathbb{U}$ 上 σ 有限测度, $\mathbb{U}_0 \subset \mathbb{U}$ 可测且满足

$$\nu(\mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_0) < \infty, \quad \int_{\mathbb{U}_0} \|u\|_{\mathbb{U}}^2 \nu(du) < \infty,$$

$f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ 可测, 则 $\tilde{N}_\lambda(dt, du) := N_\lambda(dt, du) - \lambda(t, u)dt\nu(du)$ 是 $N_\lambda(dt, du)$ 的补偿鞅测度. 假设 B 与 N_λ 相互独立, b 、 σ 和可测映射 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ 满足如下条件:

(H) $b(t, x)$ 与 $\sigma(t, x)$ 关于 x 连续, 存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 和函数 $\kappa \in C((0, \infty), (0, \infty))$ 满足

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\kappa(s)}{\log s^{-1}} = \delta < \infty, \quad \sup_{r \geq 1} \kappa(r) < \infty,$$

使得对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 和 $t \in [0, T]$, 有

$$\begin{aligned} 2\langle x - y, b(t, x) - b(t, y) \rangle + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|^2 &\leq |x - y|^2 \kappa(|x - y|), \\ |b(t, x)|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq \alpha(1 + |x|)^2, \\ \langle \sigma(t, x)h, h \rangle &\geq \beta|h|^2, \quad h \in \mathbb{R}^d, \\ \int_{\mathbb{U}_0} |f(t, x, u) - f(t, y, u)|^2 \nu(du) &\leq |x - y|^2 \kappa(|x - y|), \\ \int_{\mathbb{U}_0} |f(t, x, u)|^q \nu(du) &\leq \alpha(1 + |x|)^q, \quad q = 2, 4. \end{aligned}$$

由文献 [25, 定理 170, 第 140 页] 知, 在假设 (H) 之下, 上述带跳的随机微分方程适定. 令

$$\begin{aligned}\Lambda_t &= \exp \left\{ - \int_0^t \langle \sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s), dB_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s)|^2 ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds \right\}, \\ M_t &:= - \int_0^t \langle \sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s), dB_s \rangle + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \frac{1 - \lambda(s, u)}{\lambda(s, u)} \tilde{N}_\lambda(ds, du),\end{aligned}$$

则在假设 (H) 之下, Λ_t 为 M_t 的 Doléans-Dade 指数, M_t 为平方可积鞅, $M_t - M_{t-} > -1$ a.s. 且

$$\begin{aligned}& \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \langle M^c, M^c \rangle_t + \langle M^d, M^d \rangle_t \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s)|^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \left(\frac{1 - \lambda(s, u)}{\lambda(s, u)} \right)^2 \lambda(s, u) \nu(du) ds \right\} \right] \\ &< \infty,\end{aligned}$$

其中 M^c 和 M^d 分别为 M 的连续部分和跳跃部分. 易见 Λ_t 为指数鞅, 从而,

$$d\tilde{P}_t = \Lambda_t dP$$

为概率测度. 由 Girsanov 定理知, 在 $\tilde{P}_t$ 之下, 原随机微分方程化为

$$dX_t = \sigma(t, X_t) d\tilde{B}_t + \int_{\mathbb{U}_0} f(t, X_{t-}, u) \tilde{N}(dt, du),$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{B}_t &:= B_t + \int_0^t \sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s) ds, \\ \tilde{N}(dt, du) &:= N_\lambda(dt, du) - dt \nu(du)\end{aligned}$$

为相互独立的 d 维 Brown 运动和以 $\lambda(t, u) dt \nu(du)$ 为强度的 Poisson 随机测度.

定理 3.1 ^[9] 假设 (H) 成立. 对于 $v \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$, 以下命题等价:

(1) $-\log(\Lambda_t) = v(t, X_t) - v(0, X_0)$, 即

$$\begin{aligned}v(t, X_t) &= v(0, x_0) + \int_0^t \langle \sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s), dB_s \rangle + \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma^{-1}(s, X_s) b(s, X_s)|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

(2) $b(t, x) = (\sigma \sigma^* \nabla v)(t, x)$ 和 $\lambda(t, u) = \exp\{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)\}$ 对于所有 $(t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{U}$ 成立, 且 v 满足如下积分 - 微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) &= -\frac{1}{2} [\text{tr}(\sigma \sigma^*) \nabla^2 v](t, x) - \frac{1}{2} |\sigma^* \nabla v|^2(t, x) \\ &\quad - \int_{\mathbb{U}_0} [e^{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)} - 1 - \langle f(t, x, u), \nabla v(t, x) \rangle e^{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)}] \nu(du).\end{aligned}$$

此外, 考虑纯跳情形 (即 $\sigma(t, x) = 0$):

$$d\bar{X}_t = b(t, \bar{X}_t)dt + \int_{\mathbb{U}_0} f(t, \bar{X}_{t-}, u) \tilde{N}_\lambda(dt, du), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

假设

$$\exp \left\{ \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \left(\frac{1 - \lambda(s, u)}{\lambda(s, u)} \right)^2 \lambda(s, u) \nu(du) ds \right\} < \infty, \quad t > 0,$$

则

$$\bar{\Lambda}_t := \exp \left\{ - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds \right\}$$

为指数鞅. 我们有如下结果.

定理 3.2 ^[9] 对于 $\bar{v} \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R})$,

$$\bar{v}(t, \bar{X}_t) = \bar{v}(0, \bar{X}_0) + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds, \quad t \geq 0$$

等价于

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(t, x) + \langle b, \nabla \bar{v} \rangle(t, x) \\ &= - \int_{\mathbb{U}_0} [e^{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)} - 1 - \langle f(t, x, u), \nabla \bar{v}(t, x) \rangle e^{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)}] \nu(du), \\ & \lambda(t, u) = \exp\{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)\}, \quad (t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}_0. \end{aligned}$$

注 3.1 文献 [26, 27] 给出了类似的积分 - 微分型偏微分方程, 其中文献 [27] 使用倒向随机微分方程讨论了半线性积分 - 微分方程的概率解, 文献 [26] 使用 Black-Scholes 型的随机微分方程刻画了一类 Volterra 型积分 - 微分方程.

4 半线性随机偏微分方程

本节内容为前两节结果在无穷维的推广. 首先考虑由无穷维 Brown 运动驱动的半线性随机偏微分方程, 然后推广到带跳的情形.

4.1 柱 Brown 运动驱动的半线性随机偏微分方程

设 $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}, \|\cdot\|_{\mathbb{H}})$ 为无穷维可分 Hilbert 空间, $\{e_i\}_{i \geq 1}$ 为标准正交基, $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上所有有界线性算子所组成的空间, $L_{\text{HS}}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}$ 上所有 Hilbert-Schmidt 线性算子所组成的空间, $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{\text{HS}}$ 分别表示算子范数和 Hilbert-Schmidt 范数. 对于独立的一维 Brown 运动序列 $\{\beta_t^i\}_{i \geq 1}$, $\mathbb{H}$ 上的柱 Brown 运动定义为

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_t^i e_i, \quad t \in [0, \infty).$$

注意, 该过程并非取值于 $\mathbb{H}$, 而是取值于一个更大的 Hilbert 空间 $\tilde{\mathbb{H}}$ 使得 $\mathbb{H} \hookrightarrow \tilde{\mathbb{H}}$ 为 Hilbert-Schmidt 嵌入. 考虑 $\mathbb{H}$ 上的半线性随机偏微分方程

$$dX_t = \{AX_t + b(t, X_t)\}dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

其中 $(A, \mathcal{D}(A))$ 为 $\mathbb{H}$ 上的线性算子, 产生强连续压缩半群 $P_t := e^{At}$, $t \geq 0$, 映射 $b: [0, \infty) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 和 $\sigma: [0, \infty) \times \mathbb{H} \rightarrow L(\mathbb{H})$ 属于 $C^{1,2}$, 其中关于空间变量 $x \in \mathbb{H}$ 的导数为 Fréchet 导数, 并满足以下条件:

(C) $(-A, \mathcal{D}(A))$ 为自伴算子, 具有离散谱

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_j \leq \cdots,$$

且对于某个常数 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j^\varepsilon} < \infty.$$

此外, σ 可逆, 且对于所有的 $T > 0$, 存在常数 $\lambda > 0$, 使得任给 $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, 有

$$\begin{aligned} \|\sigma(t, x)^{-1}\| + \|b(t, 0)\|_{\mathbb{H}} &\leq \lambda, \\ \|b(t, x) - b(t, y)\|_{\mathbb{H}} + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| &\leq \lambda\|x - y\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

在假设 (C) 之下, 任给 $\mathbb{H}$ 上的初值, 半线性随机偏微分方程 (4.1) 在 $\mathbb{H}$ 上具有唯一的温和 (mild) 解, 参见文献 [28]. 此外,

$$\Lambda_t := \exp \left(- \int_0^t \langle \sigma^{-1}(s, X_s(\omega))b(s, X_s(\omega)), dW_s(\omega) \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma^{-1}(s, X_s(\omega))b(s, X_s(\omega))\|_{\mathbb{H}}^2 ds \right)$$

为指数鞅. 关于 Λ_t 的路径独立性有如下刻画.

定理 4.1 [8] 假设 (C) 成立. 设 $v \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{H}; \mathbb{R})$ 使得 $[\nabla_x v(t, x)] \in \mathcal{D}(A)$, $(t, x) \in [0, \infty) \times H$, 且 $\|A\nabla_x v(t, x)\|_{\mathbb{H}}$ 在 $[0, \infty) \times \mathbb{H}$ 的有界集上有界, 则以下命题等价:

- (1) $\log \Lambda_t = v(0, X_0) - v(t, X_t)$, $t \geq 0$;
- (2) $b(t, x) = [(\sigma\sigma^*)\nabla_x v](t, x)$, $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{H}$, 且 v 满足偏微分方程

$$\partial_t v(t, x) = -\frac{1}{2} \{ \text{tr}[(\sigma\sigma^*)\nabla_x^2 v](t, x) + \|\sigma^*\nabla_x v\|_{\mathbb{H}}^2(t, x) \} - \langle x, A\nabla_x v(t, x) \rangle_{\mathbb{H}}.$$

4.2 带跳情形

考虑如下带跳的半线性随机偏微分方程:

$$dX_t = \{AX_t + b(t, X_t)\}dt + \sigma(t, X_t)dW_t + \int_{\mathbb{U}_0} f(t, X_{t-}, u)\tilde{N}_\lambda(dt, du),$$

其中 $\tilde{N}_\lambda(dt, du)$ 如第 3 节, 与 W 独立, b 和 σ 满足条件 (C), 且存在 $L \in L^1([0, T])$ 使得可测映射

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{H} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{H}$$

满足

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{U}_0} \|e^{sA} f(t, x, u)\|_{\mathbb{H}}^q \lambda(t, u) \nu(du) &\leq L(s)(1 + \|x\|^q), \quad q = 2, 4, \\ \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{U}_0} \|e^{sA} [f(t, x, u) - f(t, y, u)]\|_{\mathbb{H}}^2 \lambda(t, u) \nu(du) &\leq L(s)\|x - y\|_{\mathbb{H}}^2, \quad x, y \in \mathbb{H}, \end{aligned}$$

则该方程在温和解意义下是适定的, 且

$$\Lambda_t := \exp \left\{ - \int_0^t \langle \sigma(s, X_s)^{-1}b(s, X_s), dW_s \rangle_{\mathbb{H}} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma(s, X_s)^{-1}b(s, X_s)\|_{\mathbb{H}}^2 ds \right\}$$

$$-\int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds \Big\}$$

是一个指数鞅.

定理 4.2^[10] 在上述假设下, 设 $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{H}; \mathbb{R})$ 使得 $[\nabla_x v(t, x)] \in \mathcal{D}(A)$, $(t, x) \in [0, T] \times H$, 且 $\|A \nabla_x v(t, x)\|_{\mathbb{H}}$ 在 $[0, T] \times \mathbb{H}$ 的有界集上有界, 则以下命题等价:

(1) $\log \Lambda_t = v(0, x_0) - v(t, X_t)$, $t \in [0, T]$;

(2) $b(t, x) = (\sigma \sigma^* \nabla_x v)(t, x)$, $\lambda(t, u) = \exp\{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)\}$, 且 v 满足如下的积分 - 微分方程:

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) = & -\frac{1}{2} [\text{tr}(\sigma \sigma^*) \nabla^2 v](t, x) - \frac{1}{2} \|\sigma(t, x)^* \nabla v(t, x)\|_{\mathbb{H}}^2 - \langle x, A \nabla v(t, x) \rangle_{\mathbb{H}} \\ & - \int_{\mathbb{U}_0} [e^{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)} - 1 - \langle f(t, x, u), \nabla v(t, x) \rangle_{\mathbb{H}}] e^{v(t, x + f(t, x, u)) - v(t, x)} \nu(du). \end{aligned}$$

最后考虑纯跳 (即 $\sigma = 0$) 情形, 此时方程化为

$$d\bar{X}_t = (A\bar{X}_t + b(t, \bar{X}_t))dt + \int_{\mathbb{U}_0} f(t, \bar{X}_{t-}, u) \tilde{N}_\lambda(dt, du), \quad t \in [0, T],$$

且

$$\bar{\Lambda}_t := \exp \left\{ -\int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) - \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds \right\}$$

是一个指数鞅.

定理 4.3^[10] 对于 $\bar{v} \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{H}; \mathbb{R})$,

$$\bar{v}(t, \bar{X}_t) = \bar{v}(0, \bar{X}_0) + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} \log \lambda(s, u) N_\lambda(ds, du) + \int_0^t \int_{\mathbb{U}_0} (1 - \lambda(s, u)) \nu(du) ds, \quad t \in [0, T]$$

成立当且仅当

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(t, x) = & -\langle b(t, x), \nabla \bar{v}(t, x) \rangle_{\mathbb{H}} \\ & - \int_{\mathbb{U}_0} [e^{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)} - 1 - \langle f(t, x, u), \nabla \bar{v}(t, x) \rangle_{\mathbb{H}}] e^{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)} \nu(du), \\ \lambda(t, u) = & \exp\{\bar{v}(t, x + f(t, x, u)) - \bar{v}(t, x)\}, \quad (t, x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{U}_0. \end{aligned}$$

5 分布依赖随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上如下的分布依赖随机微分方程:

$$dX_t = b(t, X_t, \mathcal{L}_{X_t})dt + \sigma(t, X_t, \mathcal{L}_{X_t})dW_t, \quad (5.1)$$

其中 W_t 为 m 维 Brown 运动, $\mathcal{L}_\xi$ 表示随机变量 ξ 的分布,

$$\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m, \quad b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

连续使得对于某个增函数 $K : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 有

$$|b(t, x, \mu) - b(t, y, \nu)| + \|\sigma(t, x, \mu) - \sigma(t, y, \nu)\|_{\text{HS}}$$

$$\leq K(t)(|x-y| + \mathcal{W}_2(\mu, \nu)), \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), \quad (5.2)$$

$$\|\sigma(t, 0, \delta_0)\|_{\text{HS}} + |b(t, 0, \delta_0)| \leq K(t), \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

其中 δ_0 为 $0 \in \mathbb{R}^d$ 处的 Dirac 测度, $\mathcal{W}_2$ 为 L^2 -Wasserstein 距离:

$$\mathcal{W}_2(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^2 \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{2}},$$

这里 $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ 为 μ 和 ν 的耦合全体. 根据文献 [29, 定理 2.1], 在条件 (5.2) 和 (5.3) 之下, 任给 $s \geq 0$ 和 $X_s \in L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathcal{F}_s, P)$, 从 s 时刻开始的方程 (5.1) 具有唯一的解 $(X_t)_{t \geq s}$, 且

$$\sup_{t \in [s, T]} \mathbb{E}|X_t|^2 < \infty, \quad T \geq s. \quad (5.4)$$

分布依赖随机微分方程通常被称为 McKean-Vlasov 随机微分方程, 其解的分布满足非线性的 Fokker-Planck 方程, 因而对于非线性偏微分方程的研究具有重要作用. 另一方面, 方程的解可以通过平均场粒子系统逼近得到, 所以, 这样的方程也叫作平均场随机微分方程.

作为对 Girsanov 变换中指数部分的推广, 考虑一般的可加泛函

$$A_{s,t}^{f,g} := \int_s^t f(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r}) dr + \int_s^t \langle g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r}), dW_r \rangle, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (5.5)$$

其中

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

为连续映射使得 $(A_{s,t}^{f,g})_{t \geq s}$ 为局部半鞅. 例如, 当 $f = \frac{1}{2}|g|^2$ 时, $A_{s,t}^{f,g}$ 化为

$$A_{s,t}^g := \frac{1}{2} \int_s^t |g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r})|^2 dr + \int_s^t \langle g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r}), dW_r \rangle, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (5.6)$$

由 Girsanov 定理知, 当

$$\mathbb{E} e^{\frac{1}{2} \int_s^t |g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r})|^2 dr} < \infty \quad (5.7)$$

时, $dQ_{s,t}^g := e^{-A_{s,t}^g} dP$ 是概率测度. 特别地, 对于

$$b = \sigma \tilde{b}, \quad (5.8)$$

其中 $\tilde{b}: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^m$ 可测, 令 $g := \tilde{b}$, 则 $A_{s,t}^g$ 化为

$$A_{s,t} := \frac{1}{2} \int_s^t |\tilde{b}(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r})|^2 dr + \int_s^t \langle \tilde{b}(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r}), dW_r \rangle, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (5.9)$$

此时,

$$\tilde{W}_r := W_r + \int_s^r \tilde{b}(u, X_u, \mathcal{L}_{X_u}) du, \quad r \in [s, t]$$

在概率测度 $dQ_{s,t} := e^{-A_{s,t}} dP$ 之下是一个 m 维的 Brown 运动, 且随机微分方程 (5.1) 的解

$$X_r = X_s + \int_s^r \sigma(u, X_u, \mathcal{L}_{X_u}) d\tilde{W}_u, \quad r \in [s, t]$$

在 $Q_{s,t}$ 之下为鞅, 从而归结为前面所讨论的吸收了漂移项的 Girsanov 变换.

对于固定时刻 $T > 0$, 研究可加泛函的路径独立性.

定义 5.1 如果存在可测函数

$$V : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R},$$

使得对于所有的 $s \in [0, T]$ 以及 $X_s \in L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathcal{F}_s, P)$, 方程 (5.1) 从 s 开始的解 $(X_t)_{t \in [s, T]}$ 满足

$$A_{s,t}^{f,g} = V(t, X_t, \mathcal{L}_{X_t}) - V(s, X_s, \mathcal{L}_{X_s}), \quad 0 \leq s \leq t < T, \quad (5.10)$$

则称可加泛函 $(A_{s,t}^{f,g})_{T \geq t \geq s \geq 0}$ 是路径独立的.

为叙述关于概率测度的偏微分方程, 我们先介绍 L 导数. 设 $\mathcal{P}_2$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上具有有限二阶矩的概率测度所组成的空间, $\text{Id} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 为恒同映射, 即 $\text{Id}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^d$, 则任给 $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, 可测映射 $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 使得 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 当且仅当 $\mu \circ (\text{Id} + \phi)^{-1} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. 所以我们以 $L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 为切空间定义 $\mathcal{P}_2$ 上的导数.

定义 5.2 设 f 为 $\mathcal{P}_2$ 上的可测实函数.

(1) 对于 $\mu \in \mathcal{P}_2$, 如果泛函

$$L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu) \ni \phi \mapsto f(\mu \circ (\text{Id} + \phi)^{-1}) \in \mathbb{R}$$

在 $0 \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 处 Fréchet 可导, 即存在 (从而唯一) $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mu)$ 使得

$$\lim_{\mu(|\phi|^2) \rightarrow 0} \frac{f(\mu \circ (\text{Id} + \phi)^{-1}) - f(\mu) - \mu(\langle \xi, \phi \rangle)}{\sqrt{\mu(|\phi|^2)}} = 0,$$

则称 f 在 μ 处 L 可导, ξ 为其 L 导数, 记成 $D^L f(\mu) = \xi$. 如果 f 在任意 $\mu \in \mathcal{P}_2$ 处 L 可导, 则称函数 f 是 L 可导的.

(2) 如果 f 为 L 可导的, 且导数存在一个关于 $(x, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2$ 连续的版本 $Df(\mu)(x)$, 则记为 $f \in C^1(\mathcal{P}_2)$; 如果该版本还是 Lipschitz 连续的, 且 $\nabla_x(\partial_\mu f(\mu))(x)$ 关于 $(x, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2$ 连续, 则记成 $f \in C^{(1,1)}(\mathcal{P}_2)$.

(3) 设 $g : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数, 使得对于所有的 $(t', x', \mu') \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2$, 有

$$g(t', x', \cdot) \in C^{(1,1)}(\mathcal{P}_2), \quad g(t', \cdot, \mu') \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad g(\cdot, x', \mu') \in C^1([0, T])$$

且

$$\partial_t g(t, x, \mu), \quad \nabla_x g(t, x, \mu), \quad \nabla_x^2 g(t, x, \mu), \quad D_\mu^L g(t, x, \mu)(y), \quad \nabla_y D_\mu^L g(t, x, \mu)(y)$$

关于 $(t, x, \mu, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2 \times \mathbb{R}^d$ 连续, 其中 ∇_x 和 ∇_y 表示关于 x 和 y 变量的梯度, ∇_x^2 为关于 x 变量的 Hesse 矩阵, D_μ^L 是关于 μ 的 L 导数, 则记成 $g \in C^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$. 如果这些导数都是有界的, 则记成 $g \in C_b^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$. 如果 g 还与 t 无关, 则上述的记号分别化为 $g \in C^{2,(1,1)}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$ 和 $g \in C_b^{2,(1,1)}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$.

(4) 最后, 如果 $g \in C^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$ 且

$$(t, x, \mu) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \{\|\nabla_y D_\mu^L f(\mu)(y)\| + \|D_\mu^L g(t, x, \mu)(y)\|^2\} \mu(dy)$$

在 $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 的有界子集上有界, 则记成 $f \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$.

对于 $g \in C^{1,2,(1,1)}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, 定义微分算子

$$\begin{aligned} L_{\sigma,b}g(t, x, \mu) &:= \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^* \nabla_x^2 g(t, x, \mu)) + \langle b, \nabla_x g \rangle(t, x, \mu) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} \text{tr}\{(\sigma \sigma^*)(t, y, \mu) \nabla_y D_\mu^L V(t, x, \mu)(y)\} + \langle b(t, y, \mu), D_\mu^L g(t, x, \mu)(y) \rangle \right] \mu(dy). \end{aligned}$$

关于 (5.5) 中定义的可加泛函 $A_{s,t}^{f,g}$ 的路径独立性具有以下刻画.

定理 5.1 ^[15] 假设条件 (5.2) 和 (5.3) 成立. 对于 $V \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, $g \in C([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^m)$, 以下命题等价:

- (1) $A_{s,t}^{f,g}$ 满足路径独立性条件 (5.10).
- (2) (f, g, V) 满足偏微分方程

$$\begin{cases} (\partial_t + L_{\sigma,b})V(t, x, \mu) = f(t, x, \mu), & t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d). \\ (\sigma^* \nabla_x V)(t, x, \mu) = g(t, x, \mu), \end{cases}$$

作为上述定理的推论, 我们有如下结果.

推论 5.1 ^[15] 设 $b_i, \sigma_{ij}, f \in C_b^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m$, 则任给

$$\Phi \in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)),$$

函数

$$\begin{aligned} V(t, x, \mu) &:= \mathbb{E} \left(\Phi(X_{t,T}^{x,\mu}, P_{t,T}^* \mu) - \int_t^T f(r, X_{t,r}^{x,\mu}, P_{t,r}^* \mu) dr \right), \\ (t, x, \mu) &\in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

属于函数类 $C^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, 且可加泛函 $A_{s,t}^{f,g}$ 对于该函数 V 满足路径独立性条件 (5.10) 当且仅当

$$g(t, x, \mu) = \sigma^* \nabla_x \mathbb{E} \left(V(T, X_{t,T}^{x,\mu}, P_{t,T}^* \mu) - \int_t^T f(r, X_{t,r}^{x,\mu}, P_{t,r}^* \mu) dr \right). \quad (5.11)$$

下面考虑两类特殊情形. 假设

$$f = \frac{1}{2\beta} |g|^2,$$

其中 $\beta \neq 0$ 为常数, 则可加泛函 $A_{s,t}^{f,g}$ 化为

$$A_{s,t}^{g;\beta} := \frac{1}{2\beta} \int_s^t |g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r})|^2 dr + \int_s^t \langle g(r, X_r, \mathcal{L}_{X_r}), dW_r \rangle, \quad 0 \leq s \leq t, \quad (5.12)$$

当 $\beta = 1$ 时, 这覆盖了 (5.6) 中的 $A_{s,t}^g$.

推论 5.2 ^[15] 假设条件 (5.2) 和 (5.3) 成立, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$.

(1) 对于 $V \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, $A_{s,t}^{g;\beta}$ 满足路径独立性条件 (5.10) 当且仅当 $g = \sigma^* \nabla_x V$ 且 V 满足偏微分方程

$$(\partial_t + L_{\sigma,b})V(t, x, \mu) = \frac{1}{2\beta} |\sigma^* \nabla_x V|^2(t, x, \mu), \quad (t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2. \quad (5.13)$$

(2) 设 $b_i, \sigma_{ij} \in C_b^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq m$, 则任给 $0 < \Phi \in C_b^{2,(1,1)}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$,

$$V(t, x, \mu) := -\beta \log\{E\Phi(X_{t,T}^{x,\mu}, P_{t,T}^*\mu)\}, \quad (t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2$$

是偏微分方程 (5.13) 在下面边界条件下属于函数类 $C_b^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$ 的唯一解:

$$V(T, x, \mu) = -\beta \log \Phi(x, \mu), \quad (x, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d).$$

最后, 考虑 (5.9) 中的可加泛函 $A_{s,t}$. 此时, 微分算子为

$$\begin{aligned} L_\sigma V(t, x, \mu) = & \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma \sigma^* \nabla_x^2 V)(t, x, \mu) + \frac{1}{2} |\sigma^* \nabla_x V|^2(t, x, \mu) \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{2} \text{tr}\{(\sigma \sigma^*)(t, y, \mu) \nabla_y D_\mu^L V(t, x, \mu)(y)\} \right. \\ & \left. + \langle (\sigma \sigma^* \nabla_y V)(t, y, \mu), D_\mu^L V(t, x, \mu)(y) \rangle \right] \mu(dy). \end{aligned}$$

推论 5.3 ^[15] 假设条件 (5.2) 和 (5.3) 成立.

(1) 设 $V \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$, 则 (5.8) 对于 $\tilde{b} := \sigma^* \partial_x V$ 成立且 (5.9) 中的可加泛函 $A_{s,t}$ 满足路径独立性条件 (5.10), 当且仅当

$$\begin{cases} (\partial_t + L_\sigma)V(t, x, \mu) = 0, \\ b(t, x, \mu) = (\sigma \sigma^* \partial_x V)(t, x, \mu), \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d). \quad (5.14)$$

(2) 函数 $V \in C_b^{1,2,(1,1)}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$ 是偏微分方程 (5.14) 的解, 当且仅当存在

$$0 < \Phi \in C_b^{2,(1,1)}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2)$$

使得

$$\begin{cases} V(t, x, \mu) = -\frac{1}{2} E\{\log \Phi(X_{t,T}^{x,\mu}, P_{t,T}^*\mu)\}, \\ b(t, x, \mu) = (\sigma \sigma^* \partial_x V)(t, x, \mu), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

6 随机微分方程解的路径无关性: 一个新结果

严加安指出关于路径无关性的研究方法可以用来刻画随机微分方程解的相应性质. 本节描述随机微分方程解的路径无关性与非线性偏微分方程之间的关系.

考虑如下随机微分方程:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \quad (6.1)$$

其中 B_t 为 m 维 Brown 运动, $B_0 = 0$,

$$b: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \sigma: [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$$

为连续映射. 设 $C([0, \infty); \mathbb{R}^m)$ 为从 $[0, \infty)$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的连续映射所组成的空间, 赋予局部一致收敛拓扑. 熟知, 这是一个 Polish 空间. 假设该方程具有唯一的解, 则它可以表示为 Brown 运动的泛函, 即存在可测映射

$$F: [0, \infty) \times C([0, \infty); \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

使得

$$X_t = F(t, B_{[0,t]}), \quad t \geq 0, \quad F(0, \cdot) = x,$$

其中 $B_{[0,t]}(s) := B_{t \wedge s} (s \geq 0)$ 为 Brown 运动在 t 时刻之前的路径. 我们所关心的是, 何时这个泛函只依赖于 Brown 运动在 t 时刻的值 B_t 而不是其路径 $B_{[0,t]}$? 为此, 我们给出如下结果.

定理 6.1 假设 b 和 σ 在 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ 上连续, 且方程 (6.1) 具有唯一的解 $(X_t)_{t \geq 0}$, 则对于 $F \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^d)$, 以下两个命题等价:

(1) (路径无关性) $X_t = F(t, B_t), t \geq 0$.

(2) $\sigma(t, F(t, y)) = \nabla F(t, \cdot)(y)$ 对于所有的 $(t, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ 成立, 且 $F(t, \cdot)$ 满足下面的非线性偏微分方程:

$$\partial_t F(t, \cdot) = b(t, F(t, \cdot)) - \frac{1}{2} \Delta F(t, \cdot), \quad F(0, 0) = x. \quad (6.2)$$

证明 假设 (1) 成立, 则由 Itô 公式知,

$$dX_t = dF(t, B_t) = \left\{ \partial_t F(t, \cdot) + \frac{1}{2} \Delta F(t, \cdot) \right\} (B_t) dt + \{ \nabla F(t, \cdot)(B_t) \} dB_t.$$

将该式与 (6.1) 相比较, 并利用 Meyer-Doob 分解的唯一性可知, $dt \times P$ -a.e.

$$\begin{cases} \left\{ \partial_t F(t, \cdot) + \frac{1}{2} \Delta F(t, \cdot) \right\} (B_t) = b(t, F(t, B_t)), & F(0, 0) = x, \\ \nabla F(t, \cdot)(B_t) = \sigma(t, F(t, B_t)), & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

由于 $B_t (t > 0)$ 的分布支撑于全空间 $\mathbb{R}^m$, 且函数

$$\partial_t F(t, y), \quad \Delta F(t, \cdot)(y), \quad \nabla F(t, \cdot)(y), \quad b(t, F(t, y)), \quad \sigma(t, F(t, y))$$

关于 $(t, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^m$ 连续, 则 (6.3) 蕴涵 $\sigma(t, \cdot) = \nabla F(t, \cdot)(y)$ 和偏微分方程 (6.2), 从而 (2) 成立.

反之, 假设 (2) 成立, 即

$$F(0, 0) = x, \quad \sigma(t, \cdot) = \nabla F(t, \cdot)(y),$$

且 (6.2) 成立. 由 Itô 公式知, $\bar{X}_t := F(t, B_t)$ 满足

$$\begin{aligned} \bar{X}_t &= x + \int_0^t \left\{ \partial_s F(s, \cdot) + \frac{1}{2} \Delta F(s, \cdot) \right\} (B_s) ds + \int_0^t \{ \nabla F(s, \cdot)(B_s) \} dB_s \\ &= x + \int_0^t b(s, F(s, B_s)) ds + \int_0^t \sigma(s, F(s, B_s)) dB_s \\ &= x + \int_0^t b(s, \bar{X}_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}_s) dB_s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

因此, $\bar{X}_t$ 是随机微分方程 (6.1) 的解. 由该方程解的唯一性知,

$$X_t = \bar{X}_t := F(t, B_t).$$

从而 (1) 成立. □

参考文献

- Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Kodansha: North-Holland, 1989

- 2 Hodges S, Carverhill A. Quasi mean reversion in an efficient stock market: The characterisation of economic equilibria which support Black-Scholes option pricing. *Econom J*, 1993, 103: 395–405
- 3 Hodges S, Liao C H. Equilibrium price processes, mean reversion and consumption smoothing. Working paper, the University of Warwick, https://warwick.ac.uk/fac/soc/wbs/subjects/finance/research/wpaperseries/pp_01.117.pdf, 2004
- 4 Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *J Political Economy*, 1973, 81: 637–654
- 5 Stein E M, Stein J C. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Rev Financ Stud*, 1991, 4: 727–752
- 6 Truman A, Wang F Y, Wu J L, et al. A link of stochastic differential equations to nonlinear parabolic equations. *Sci China Math*, 2012, 55: 1971–1976
- 7 Wu J L, Yang W. On stochastic differential equations and a generalised Burgers equation. In: *Stochastic Analysis and Its Applications—Festschrift in Honor of Professor Jia-An Yan*. Singapore: World Scientific, 2012, 425–435
- 8 Wang M, Wu J L. Necessary and sufficient conditions for path-independence of Girsanov transformation for infinite-dimensional stochastic evolution equations. *Front Math China*, 2014, 9: 601–622
- 9 Qiao H, Wu J L. Characterizing the path-independence of the Girsanov transformation for non-Lipschitz SDEs with jumps. *Statist Probab Lett*, 2016, 119: 326–333
- 10 Qiao H, Wu J L. On the path-independence of the Girsanov transformation for stochastic evolution equations with jumps in Hilbert spaces. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2019, 24: 1449–1467
- 11 Qiao H, Wu J L. Support theorems for degenerate stochastic differential equations with jumps and applications. *arXiv:1810.04764*, 2018
- 12 Qiao H, Wu J L. Path independence of the additive functionals for McKean-Vlasov stochastic differential equations with jumps. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2021, 24: 2150006
- 13 Qiao H, Wu J L. Path independence of the additive functionals for stochastic differential equations driven by G -Lévy processes. *arXiv:2001.03528*, 2020
- 14 Wu B, Wu J L. Characterising the path-independent property of the Girsanov density for degenerated stochastic differential equations. *Statist Probab Lett*, 2018, 133: 71–79
- 15 Ren P, Wang F Y. Space-distribution PDEs for path independent additive functionals of McKean-Vlasov SDEs. *Infin Dimens Anal Quantum Probab Relat Top*, 2020, 23: 2050018
- 16 Ren P, Yang F. Path independence of additive functionals for stochastic differential equations under G -framework. *Front Math China*, 2019, 14: 135–148
- 17 Lin L, Xu F, Zhang Q. The link between stochastic differential equations with non-Markovian coefficients and backward stochastic partial differential equations. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2021, 37: 447–457
- 18 Zambrini J C. Variational processes and stochastic versions of mechanics. *J Math Phys*, 1986, 27: 2307–2330
- 19 Cruzeiro A B, Zambrini J C. Malliavin calculus and Euclidean quantum mechanics. I: Functional calculus. *J Funct Anal*, 1991, 96: 62–95
- 20 Cruzeiro A B, Wu L, Zambrini J C. Bernstein processes associated with a Markov process. In: *Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Basel: Birkhäuser, 2000, 41–72
- 21 Chung K L, Zambrini J C. *Introduction to Random Time and Quantum Randomness*. Singapore: World Scientific, 2003
- 22 Zambrini J C. On the geometry of the Hamilton-Jacob-Bellman equation. *J Geom Mech*, 2009, 1: 369–387
- 23 Privault N, Zambrini J C. Stochastic deformation of integrable dynamical systems and random time symmetry. *J Math Phys*, 2010, 51: 082104
- 24 Zhang X. Stochastic homeomorphism flows of SDEs with singular drifts and Sobolev diffusion coefficients. *Electron J Probab*, 2011, 16: 1096–1116
- 25 Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*. Berlin: Springer, 2005
- 26 Hambly B, Mariapragassam M, Reisinger Ch. A forward equation for barrier options under the Brunick and Shreve Markovian projection. *Quant Finance*, 2016, 16: 827–838
- 27 Matoussi A, Sabbagh W, Zhou C. The obstacle problem for semilinear parabolic partial integro-differential equations. *Stoch Dyn*, 2015, 15: 1550007
- 28 Da Prato G, Zabczyk J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992
- 29 Wang F Y. Distribution dependent SDEs for Landau type equations. *Stochastic Process Appl*, 2018, 128: 595–621

On path independence of Girsanov transformation for stochastic differential equations

Fengyu Wang & Jianglun Wu

Abstract In this paper, we introduce results obtained over the past ten years on the path-independence of the Girsanov transformation for stochastic differential equations, which was originated in 1990s from an important market efficiency property in mathematical finance studies. We end up the paper with a new result characterizing the solution of stochastic differential equations using nonlinear partial differential equations.

Keywords stochastic differential equation, Girsanov transformation, path-independence, nonlinear parabolic equation

MSC(2020) 60H10, 60H30, 58J65

doi: 10.1360/SSM-2020-0287