非时齐 Markov 过程的 Nash 不等式

张铭

中国政法大学科学技术教学部, 北京 102249

E-mail: zhangming0408@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2016-05-25; 接受日期: 2018-02-12; 网络出版日期: 2018-06-13

中国政法大学校级青年科学研究 (批准号: 1000-10817338) 资助项目

摘要 本文将时齐 Markov 过程的经典 Nash 不等式推广到非时齐 Markov 过程, 建立了非时齐 Markov 过程的转移半群与 Nash 不等式之间的关系.

关键词 非时齐 Markov 过程 泛函不等式 Nash 不等式

MSC (2010) 主题分类 60J99

1 引言及主要结论

泛函不等式是研究随机过程的一个重要工具, 泛函不等式与概率论中的各个领域息息相关, 特别是在关于收敛及遍历性的研究中更是起着举足轻重的作用. 在研究时齐的 Markov 过程时, 已经对一些重要的泛函不等式进行了充分的研究, 如 Nash 不等式和对数 Sobolev 不等式等 (参见文献 [1–4]). 本文的主要目标就是将时齐情形下的重要不等式—Nash 不等式推广到非时齐的 Markov 过程中.

非时齐 Markov 过程与时齐 Markov 过程的最大区别在于其过程的复杂性, 不再是维持同一转移概率, 而是随着时间的变化不断发生改变, 这也决定了非时齐 Markov 过程与时齐的 Markov 过程在过程发展上必然存在着很大的区别, 这其中很关键的一点就是关于不变测度的问题. 在研究遍历的时齐 Markov 过程时, 不变测度是我们研究中的一个关键核心问题, 但在非时齐 Markov 过程中, 这个相对应的“不变测度”却往往并不存在, 或者说这时候的不变测度已经不再是“不变”的了, 而是根据时间的变化而变化的. 这就意味着我们的研究目标不再是稳定的而是随时变化的, 从而给我们的研究工作带来了很大的困难.

为了陈述方便, 先将非时齐时将要用到的一些符号及定义在下面给出.

设 $(X_t)_{t \geq 0}$ 是可测空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的非时齐连续时间 Markov 过程, 其 (非时齐) 转移概率为

$$\{P_{s,t}(x, A), x \in E, A \in \mathcal{E}, 0 \leq s \leq t\}.$$

英文引用格式: Zhang M. Nash inequalities for time inhomogeneous Markov processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1053–1060, doi: 10.1360/N012016-00101

令

$$P_{s,t}f(x) = \int_E f(y)P_{s,t}(x, dy), \quad f \in {}_b\mathcal{E}$$

为相应的非时齐转移半群, 满足 $P_{s,r}P_{r,t} = P_{s,t}$, $0 \leq s \leq r \leq t$. 不失一般性, 约定 $P_{t,t} = I$ (恒等算子).

给定测度 μ_0 , 记 $\mu_t = \mu_0 P_{0,t}$. 显然, $\mu_t = \mu_s P_{s,t}$, $0 \leq s \leq t$. 为引入转移半群 $P_{s,t}$ 的生成元, 假设存在可测函数类 $\mathcal{A}$ 是 $L^2(\mu_t)$ ($t \geq 0$) 的稠子空间. 称 L_t 为转移半群 $P_{s,t}$ 的生成元, 如果它满足非时齐的 Kolmogorov 方程: $\forall 0 \leq s \leq t$,

$$\frac{\partial P_{s,t}f}{\partial s} = -L_s P_{s,t}f, \quad \frac{\partial P_{s,t}f}{\partial t} = P_{s,t}L_t f, \quad f \in \mathcal{A}.$$

下面引入一个十分重要的概念, 它在非时齐过程的研究中起着举足轻重的作用, 参见文献 [5].

定义 1.1 定义符号

$$\Gamma_t(f, g) := \frac{1}{2}[L_t(fg) - fL_t g - gL_t f], \quad f, g \in \mathcal{A}. \quad (1.1)$$

事实上, 在后面的结论及证明中可以发现, 此处定义的 $\int \Gamma_t(f) d\mu_t$, 事实上就是时齐时的 Dirichlet 型 $D(f) = D(f, f)$ 在非时齐情形下的相应定义. 其在非时齐研究中的作用基本与 Dirichlet 型在时齐时的作用是类似的. 最后, 定义 $T = [a, b]$ 为一个连续时间区间, 其中 $0 \leq a \leq b \leq \infty$.

有了以上的定义及符号, 下面就可以将时齐时的 Nash 不等式^[1]推广到非时齐的 Markov 过程中.

定理 1.1 令 $p \in [1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 设 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ 是一个非时齐的 Markov 过程. 若存在 $\delta \geq 0$, $v, \eta_1 > 0$ 使得对于所有的 $t \in T$, 都有

$$\|f\|_{L^2(\mu_t)}^{2+\frac{4}{v}} \leq \frac{1}{\eta_1} \left(\int \Gamma_t(f) d\mu_t + \delta \|f\|_{L^2(\mu_t)}^2 \right) \|f\|_{L^p(\mu_t)}^{\frac{4}{v}}, \quad f \in \mathcal{D}(\Gamma_t), \quad (1.2)$$

则

$$\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} \leq e^{2\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{2}}, \quad s, t \in T, \quad s \leq t.$$

推论 1.1 在定理 1.1 的条件下, 还可以得到

$$\|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} \leq e^{p\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{vp}{4}}, \quad p \in [1, 2], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

类似于时齐时的情形, 考虑 $\delta = 0$ 的情形, 我们也对其变形形式进行了讨论.

定理 1.2 (中心化的 Nash 不等式) 令 $p \in [1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 设 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ 是一个非时齐的 Markov 过程. 若存在 $v, \eta_2 > 0$ 使得对于所有的 $t \in T$, 都有

$$\text{Var}_{\mu_t}(f)^{1+\frac{2}{v}} \leq \frac{1}{\eta_2} \int \Gamma_t(f) d\mu_t \|f\|_{L^p(\mu_t)}^{\frac{4}{v}}, \quad f \in \mathcal{D}(\Gamma_t), \quad (1.3)$$

其中 $\text{Var}_{\mu_t}(f) = \|f - \mu_t f\|_{L^2(\mu_t)}^2$, 则

$$\|P_{s,t} - \mu_t\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} \leq \left(\frac{v}{\eta_2(t-s)} \right)^{\frac{v}{2}}, \quad s, t \in T, \quad s \leq t. \quad (1.4)$$

事实上, 当 $\delta > 0$ 时, 我们讨论的情形类似于时齐时的非常返情形, 而当 $\delta = 0$ 时, 则更加类似于时齐时的遍历的情形.

2 主要结果的证明

为了得到定理 1.1 的结论, 我们分为两个步骤证明, 首先证明下面这个引理.

引理 2.1 令 $p \in [1, 2]$. 假设 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ 是一个非时齐的 Markov 过程. 若存在 $\delta \geq 0, v, \eta_1 > 0$ 使得对所有的 $t \in T$, 都有

$$\|f\|_{L^2(\mu_t)}^{2+\frac{4}{v}} \leq \frac{1}{\eta_1} \left(\int \Gamma_t(f) d\mu_t + \delta \|f\|_{L^2(\mu_t)}^2 \right) \|f\|_{L^p(\mu_t)}^{\frac{4}{v}}, \quad f \in \mathcal{D}(\Gamma_t), \quad (2.1)$$

则

$$\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}, \quad s, t \in T, \quad s \leq t. \quad (2.2)$$

证明 任取 $f \in \mathcal{D}(\Gamma_t) \subset L^2(\mu_t)$ 且 $\|f\|_{L^p(\mu_t)} = 1$. 令 $f_s = P_{s,t}f$, 则 $\forall p \geq 1$, 有

$$\|f_s\|_{L^p(\mu_s)} = \left(\int \left| \int f dP_{s,t} \right|^p d\mu_s \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int \left(\int |f|^p dP_{s,t} \right)^{\frac{1}{p} \cdot p} d\mu_s \right)^{\frac{1}{p}} = 1 = \|f\|_{L^p(\mu_t)}.$$

特别地, $\|f_s\|_{L^2(\mu_s)} \leq \|f\|_{L^2(\mu_t)}$.

定义

$$\varphi(s) = \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 = \mu_s(f_s^2),$$

对 $\varphi(s)$ 求导, 即可得到

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{d}{ds} \int f_s^2 d\mu_s = \frac{d}{ds} \int P_{0,s} f_s^2 d\mu_0 \\ &= \int \left[P_{0,s} L_s f_s^2 + P_{0,s} \left(2f_s \frac{d}{ds} f_s \right) \right] d\mu_0. \end{aligned}$$

由于 $\frac{df_s}{ds} = \frac{dP_{s,t}f}{ds} = -L_s P_{s,t}f = -L_s f_s$, 所以有

$$\varphi'(s) = \int P_{0,s} (L_s f_s^2 - 2f_s L_s f_s) d\mu_0 = \int (L_s f_s^2 - 2f_s L_s f_s) d\mu_s.$$

由 (1.1) 的定义可以直接得到

$$\varphi'(s) = 2 \int \Gamma_s(f_s) d\mu_s.$$

定义 $\psi(s) = \varphi(s)e^{2\delta s} = \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 e^{2\delta s} = \mu_s(f_s^2)e^{2\delta s}$, 则

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= 2\delta e^{2\delta s} \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 + e^{2\delta s} \cdot 2 \int \Gamma_s(f_s) d\mu_s \\ &= 2e^{2\delta s} \left[\int \Gamma_s(f_s) d\mu_s + \delta \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 \right] \\ &\geq 2e^{2\delta s} \left[\int \Gamma_s(f_s) d\mu_s + \delta \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 \right] \|f_s\|_{L^p(\mu_s)}^{\frac{4}{v}}, \end{aligned}$$

这里根据定理中的条件就有

$$\psi'(s) \geq 2\eta_1 e^{2\delta s} \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^{2+\frac{4}{v}} = 2\eta_1 e^{-\frac{4\delta s}{v}} \psi(s)^{1+\frac{2}{v}}.$$

由此可以推出

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)^{1+\frac{2}{v}}} \geq 2\eta_1 e^{-\frac{4\delta s}{v}}.$$

注意到

$$\frac{d(\psi(s)^{-\frac{2}{v}})}{ds} = -\frac{2}{v} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)^{1+\frac{2}{v}}},$$

于是, 综上可得

$$\frac{d(\psi(s)^{-\frac{2}{v}})}{ds} \leq -\frac{4\eta_1}{v} e^{-\frac{4\delta s}{v}}.$$

两边同时积分, 可得

$$\psi(t)^{-\frac{2}{v}} - \psi(s)^{-\frac{2}{v}} \leq -\frac{4}{v} \eta_1 \int_s^t e^{-\frac{4\delta u}{v}} du = \frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta t}{v}} - e^{-\frac{4\delta s}{v}}),$$

经过简单的整理后就可以得出

$$\psi(s) \leq \left[\frac{1}{\psi(t)^{-\frac{2}{v}} + \frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta s}{v}} - e^{-\frac{4\delta t}{v}})} \right]^{\frac{v}{2}}. \quad (2.3)$$

再由 $\psi(s)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}f\|_{L^2(\mu_s)}^2 e^{2\delta s} &\leq \left[\frac{1}{(\|f\|_{L^2(\mu_t)}^2 e^{2\delta t})^{-\frac{2}{v}} + \frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta s}{v}} - e^{-\frac{4\delta t}{v}})} \right]^{\frac{v}{2}} \\ &\leq \left[\frac{1}{\frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta s}{v}} - e^{-\frac{4\delta t}{v}})} \right]^{\frac{v}{2}} = \left[\frac{\delta}{\eta_1 (e^{\frac{4\delta(t-s)}{v}} - 1)} \right]^{\frac{v}{2}} e^{2\delta t}, \end{aligned}$$

即

$$\|P_{s,t}f\|_{L^2(\mu_s)}^2 \leq \left[\frac{\delta}{\eta_1 (e^{\frac{4\delta(t-s)}{v}} - 1)} \right]^{\frac{v}{2}} e^{2\delta(t-s)}.$$

这时根据 Lagrange 中值定理, 即对于 $e^{\frac{4\delta(t-s)}{v}} - 1$, 存在 $\xi \in [0, t-s]$ 使得

$$e^{\frac{4\delta(t-s)}{v}} - 1 = \frac{4\delta}{v} e^{\frac{4\delta\xi}{v}} (t-s) \geq \frac{4\delta}{v} (t-s),$$

这样就可以很容易地得出

$$\|P_{s,t}f\|_{L^2(\mu_s)}^2 \leq \left[\frac{\delta}{\eta_1 \cdot \frac{4\delta}{v} (t-s)} \right]^{\frac{v}{2}} e^{2\delta(t-s)} = \left[\frac{v}{4\eta_1 (t-s)} \right]^{\frac{v}{2}} e^{2\delta(t-s)}.$$

由于 $\|f\|_{L^p(\mu_t)} = 1$, 因此, $\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}$. 证毕. $\square$

注 2.1 特别地, 对 $p \in [1, 2]$, 由于 μ_t 为概率测度, 所以, $\|f\|_{L^p(\mu_t)} \leq \|f\|_{L^2(\mu_t)}$. 于是,

$$\|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq \|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}.$$

事实上当 $p = 2$ 时是最弱的情形, 即

$$(\eta_1 - \delta) \|f\|_{L^2(\mu_t)}^2 \leq \int \Gamma_t(f) d\mu_t.$$

若 $\varphi(s) = \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2$, 则

$$\varphi'(s) = 2 \int \Gamma_s(f_s) d\mu_s \geq 2(\eta_1 - \delta) \|f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 = 2(\eta_1 - \delta) \varphi(s),$$

由此得到 $\|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{-(\eta_1 - \delta)(t-s)}$.

下面回到定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 由引理 2.1 可知,

$$\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}},$$

记 $P_{s,t}^*$ 为 $P_{s,t}$ 的共轭算子, 则

$$\|P_{s,t}^*\|_{L^2(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} = \|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}.$$

接下来对 $\|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)}$ 进行控制, 其中 $s, t \in T, s \leq t$. 为此, 定义

$$M(T) = \sup_{s, t \in T, s \leq t} \{e^{-2\delta(t-s)}(t-s)^{\frac{v}{2}} \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)}\}.$$

任取 $\ell \in [s, t]$, 有

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} &\leq \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^2(\mu_\ell)} \cdot \|P_{\ell,t}^*\|_{L^2(\mu_\ell) \rightarrow L^q(\mu_t)} \\ &\leq \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^2(\mu_\ell)} \cdot e^{\delta(t-\ell)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\ell)} \right)^{\frac{v}{4}}. \end{aligned}$$

注意到根据 Hölder 不等式, 对于任意的函数 $f \in L^2(\mu_s)$ 和所有的 $s, t \in T, s \leq t$, 都有

$$\|P_{s,\ell}^* f\|_{L^2(\mu_\ell)} \leq \|P_{s,\ell}^* f\|_{L^p(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}} \cdot \|P_{s,\ell}^* f\|_{L^q(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}}.$$

从而,

$$\|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^2(\mu_\ell)} \leq \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^p(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}} \cdot \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}} \leq \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}}.$$

综上所述有

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} &\leq \|P_{s,\ell}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_\ell)}^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\delta(t-\ell)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\ell)} \right)^{\frac{v}{4}} \\ &\leq \left(\frac{M(T) e^{2\delta(\ell-s)}}{(\ell-s)^{\frac{v}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\delta(t-\ell)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\ell)} \right)^{\frac{v}{4}} \\ &= (M(T))^{\frac{1}{2}} e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\ell)(\ell-s)} \right)^{\frac{v}{4}}. \end{aligned}$$

由于 ℓ 是任意取的, 所以,

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} &\leq (M(T))^{\frac{1}{2}} e^{\delta(t-s)} \inf_{\ell \in [s,t]} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\ell)(\ell-s)} \right)^{\frac{v}{4}} \\ &= (M(T))^{\frac{1}{2}} e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1 \cdot \frac{(t-s)^2}{4}} \right)^{\frac{v}{4}} \\ &= (M(T))^{\frac{1}{2}} e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)^2} \right)^{\frac{v}{4}}, \\ (t-s)^{\frac{v}{2}} e^{-2\delta(t-s)} \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} &\leq (M(T))^{\frac{1}{2}} e^{-\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1} \right)^{\frac{v}{4}} \leq (M(T))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{\eta_1} \right)^{\frac{v}{4}}. \end{aligned}$$

再由 $M(T)$ 的定义, 易得 $M(T) \leq (\frac{v}{\eta_1})^{\frac{v}{2}}$, 且对于所有的 $s, t \in T, s \leq t$, 都有

$$\|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} \leq e^{2\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{2}}.$$

注意到 $P_{s,t}^*$ 为 $P_{s,t}$ 的共轭算子, 所以可得

$$\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} = \|P_{s,t}^*\|_{L^p(\mu_s) \rightarrow L^q(\mu_t)} \leq e^{2\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{2}}.$$

定理证毕. □

推论 1.1 的证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} &= \sup_{\mu_t f^2=1} \left[\int (P_{s,t}f(x))^q d\mu_s(x) \right]^{\frac{1}{q}} = \sup_{\mu_t f^2=1} \left[\int \left(\int f(y) P_{s,t}(x, dy) \right)^q d\mu_s(x) \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{\mu_t f^2=1} \left[\int \left(\int f^q(y) P_{s,t}(x, dy) \right) d\mu_s(x) \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{\mu_t f^2=1} \left[\int f^q(y) d\mu_t(y) \right]^{\frac{1}{q}} = \sup_{\mu_t (f^{\frac{2}{p}})^p=1} \left[\int f^q(y) d\mu_t(y) \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{\mu_t (f^{\frac{2}{p}})^p=1} \left[\int (f^q(y))^{\frac{2}{p}} d\mu_t(y) \right]^{\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

此时令 $g = f^{\frac{2}{p}}$, 再根据定理 1.1 的结论, 就有

$$\|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)} \leq \sup_{\mu_t g^p=1} \left[\int g^q(y) d\mu_t(y) \right]^{\frac{p}{2q}} = [\|P_{s,t}\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^q(\mu_s)}]^{\frac{p}{2}} \leq e^{p\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{vp}{4}}.$$

证毕. □

注 2.2 当 $p = 1$ 时, 不等式是最强的情形, 称为 Nash 不等式. 此时根据前面得到的结论可知,

$$\begin{aligned} \|P_{s,t}\|_{L^1(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} &\leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}, \\ \|P_{s,t}\|_{L^2(\mu_t) \rightarrow L^\infty(\mu_s)} &\leq e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\|P_{s,t}\|_{L^1(\mu_t) \rightarrow L^\infty(\mu_s)} &\leq \|P_{s, \frac{s+t}{2}}\|_{L^2(\mu_{\frac{s+t}{2}}) \rightarrow L^\infty(\mu_s)} \cdot \|P_{\frac{s+t}{2}, t}\|_{L^1(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_{\frac{s+t}{2}})} \\ &\leq e^{\delta(\frac{s+t}{2}-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(\frac{s+t}{2}-s)} \right)^{\frac{v}{4}} \cdot e^{\delta(t-\frac{s+t}{2})} \left(\frac{v}{4\eta_1(t-\frac{s+t}{2})} \right)^{\frac{v}{4}} \\ &= e^{\delta(t-s)} \left(\frac{v}{\eta_1(t-s)} \right)^{\frac{v}{2}}.\end{aligned}$$

这里注意到上面的结果与时齐时的结论是不同的. 这主要是由于, 在时齐的 Nash 不等式中所出现的 Markov 过程是对称的, 而在非时齐时, 这种对称性并不存在, 从而导致结果的差异. 这一点在下面也会体现出来.

命题 2.1 (2.3) $\Rightarrow$ (2.1) 是成立的.

证明 关于 f 、 f_s 、 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 的定义与定理 1.1 的证明一致. 由 (2.3) 可得, 对于所有的 $s, t \in T$, $s \leq t$, 有

$$\psi(t)^{-\frac{2}{v}} - \psi(s)^{-\frac{2}{v}} \leq \frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta t}{v}} - e^{-\frac{4\delta s}{v}}),$$

于是, 对于所有的 $s < t$, 有

$$\frac{\psi(t)^{-\frac{2}{v}} - \psi(s)^{-\frac{2}{v}}}{t-s} \leq \frac{\frac{\eta_1}{\delta} (e^{-\frac{4\delta t}{v}} - e^{-\frac{4\delta s}{v}})}{t-s}.$$

令 $s \uparrow t$, 则

$$\frac{d(\psi(t)^{-\frac{2}{v}})}{dt} \leq \frac{\eta_1}{\delta} \frac{d(e^{-\frac{4\delta t}{v}})}{dt} = -\frac{4\eta_1}{v} e^{-\frac{4\delta t}{v}}.$$

同时, 注意到

$$\frac{d(\psi(t)^{-\frac{2}{v}})}{dt} = -\frac{2}{v} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)^{1+\frac{2}{v}}},$$

于是,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)^{1+\frac{2}{v}}} \geq 2\eta_1 e^{-\frac{4\delta t}{v}}.$$

根据 $\psi(t)$ 的定义可知, $\psi'(t) = 2\delta e^{2\delta t} \|f\|_{L^2(\mu_t)}^2 + e^{2\delta t} \cdot 2 \int \Gamma_t(f) d\mu_t$, 整理后即可得到 (2.1). $\square$

同样, 为了证明定理 1.2, 我们也要先证明下面的引理.

引理 2.2 令 $p \in [1, 2]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 假设 $(P_{s,t})_{0 \leq s \leq t}$ 是一个非时齐的 Markov 过程. 若存在 $v, \eta_2 > 0$ 使得对于所有的 $t \in T$, 有

$$\text{Var}_{\mu_t}(f)^{1+\frac{2}{v}} \leq \frac{1}{\eta_2} \int \Gamma_t(f) d\mu_t \|f\|_{L^p(\mu_t)}^{\frac{4}{v}}, \quad f \in \mathcal{D}(\Gamma_t), \quad (2.4)$$

其中 $\text{Var}_{\mu_t}(f) = \|f - \mu_t f\|_{L^2(\mu_t)}^2$, 则

$$\|P_{s,t} - \mu_t\|_{L^p(\mu_t) \rightarrow L^2(\mu_s)} \leq \left(\frac{v}{4\eta_2(t-s)} \right)^{\frac{v}{4}}, \quad s, t \in T, \quad s \leq t. \quad (2.5)$$

证明 类似于引理 2.1 的证明, 此时只需改变 $\varphi(s)$ 的定义为

$$\varphi(s) = \text{Var}_{\mu_s}(f_s) = \|f_s - \mu_s f_s\|_{L^2(\mu_s)}^2 = \|f_s - \mu_t f\|_{L^2(\mu_s)}^2 = \mu_s(f_s - \mu_t f)^2.$$

于是很容易看到

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \frac{d}{ds} \int (f_s - \mu_t f)^2 d\mu_s = \frac{d}{ds} \int P_{0,s}(f_s - \mu_t f)^2 d\mu_0 \\ &= \int \left[P_{0,s} L_s (f_s - \mu_t f)^2 + P_{0,s} \left(2(f_s - \mu_t f) \frac{d}{ds} (f_s - \mu_t f) \right) \right] d\mu_0.\end{aligned}$$

由于 $\frac{d}{ds}(f_s - \mu_t f) = \frac{df_s}{ds} = \frac{dP_{s,t}f}{ds} = -L_s P_{s,t}f = -L_s f_s = -L_s(f_s - \mu_t f)$, 则

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int P_{0,s} [L_s(f_s - \mu_t f)^2 - 2(f_s - \mu_t f)L_s(f_s - \mu_t f)] d\mu_0 \\ &= \int [L_s(f_s - \mu_t f)^2 - 2(f_s - \mu_t f)L_s(f_s - \mu_t f)] d\mu_s.\end{aligned}$$

由 (1.1) 可知, $\varphi'(s) = 2 \int \Gamma_s(f_s - \mu_t f) d\mu_s = 2 \int \Gamma_s(f_s) d\mu_s$, 这就给出了 $\varphi'(s) \geq 2\eta_2 \varphi(s)^{1+\frac{2}{v}}$. 于是,

$$(\varphi(s)^{-\frac{2}{v}})' = -\frac{2}{v} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)^{1+\frac{2}{v}}} \leq -\frac{4}{v} \eta_2.$$

对上式两边同时积分, 可以得到 $\varphi(t)^{-\frac{2}{v}} - \varphi(s)^{-\frac{2}{v}} \leq -\frac{4}{v} \eta_2(t-s)$. 再根据 $\varphi(s)$ 的定义, 即可得到

$$\text{Var}_{\mu_t}(f_t)^{-\frac{2}{v}} - \text{Var}_{\mu_s}(f_s)^{-\frac{2}{v}} \leq -\frac{4}{v} \eta_2(t-s).$$

整理可得 $\text{Var}_{\mu_s}(f_s) \leq (\frac{v}{4\eta_2(t-s)})^{\frac{v}{2}}$, 这就得到了所要的结论. $\square$

有了引理 2.2 的结论, 我们只需应用定理 1.1 的证明中的方法即可完成定理 1.2 的证明. 由于证明方法基本类似, 此处省略.

致谢 非常感谢各位审稿人的仔细审阅以及对本文提出的宝贵建议.

参考文献

- 1 Chen M F. Nash inequalities for general symmetric forms. Acta Math Sin Engl Ser, 1999, 15: 353–370
- 2 Chen M F. From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Beijing: World Book Inc, 2004
- 3 Chen M F, Wang Y Z. Algebraic convergence of Markov chains. Ann Appl Probab, 2003, 13: 604–627
- 4 Liggett T M. L_2 rates of convergence for attractive reversible nearest particle systems: The critical case. Ann Probab, 1991, 19: 935–959
- 5 Bakry D, Émery M. Hypercontractivité de semi-groupes de diffusion. C R Math Acad Sci Paris, 1984, 299: 775–778

Nash inequalities for time inhomogeneous Markov processes

Ming Zhang

Abstract In this paper, we generalize the classical Nash inequality of the time homogeneous Markov process to the inhomogeneous Markov process, and establish the relationship between the transition semigroup of inhomogeneous Markov process and the Nash inequality.

Keywords inhomogeneous Markov processes, functional inequalities, Nash inequalities

MSC(2010) 60J99

doi: 10.1360/N012016-00101