

一种高斯型非线性迭代更新滤波器

陆欣¹, 刘忠¹, 张宏欣², 张建强¹

(1.海军工程大学 电子工程学院, 湖北 武汉 430033; 2.海军工程大学 兵器工程系, 湖北 武汉 430033)

摘要:针对高斯型非线性滤波器在大初始偏差条件下性能下降、甚至发散的问题,提出了一种新的非线性滤波算法,即迭代更新扩展卡尔曼滤波器(iterated update extended Kalman filter, IU-EKF)。首先,该算法在EKF框架下,将传统的一步量测更新在伪时间上分为多步进行,采用部分增益将当前量测信息逐步地引入量测更新过程实现对状态的后验估计;其次,由于多步量测更新过程引入了每一步的过程噪声,因此将量测噪声与每一步更新后的状态估计误差之间的互协方差代入误差协方差矩阵,再利用此误差协方差矩阵的迹对标准卡尔曼增益矩阵求导并令结果为零,以导出噪声相关条件下的最优卡尔曼增益矩阵表达式;最后,根据后验量测残差自适应地调整迭代更新次数,在保证一定滤波精度的前提下,降低了算法的计算量。以2维目标跟踪问题为例,在大初始偏差条件下,通过仿真实验将本文算法分别与EKF、IEKF、UKF、CKF算法进行对比,并针对不同迭代次数对滤波精度的影响进行对比分析。仿真结果表明:本文算法较EKF大幅提高了滤波估计精度,且在大初始偏差条件下,本文算法性能优于现有经典高斯假设滤波器。同时,当迭代次数按1、2、5、10、20递增时,本文算法的滤波精度也随之提升,但提升幅度逐渐减缓。

关键词:非线性系统;迭代量测更新;扩展卡尔曼滤波;目标跟踪

中图分类号:TN713

文献标志码:A

文章编号:2096-3246(2017)04-0111-08

A Gaussian Nonlinear Iterated Update Filter

LU Xin¹, LIU Zhong¹, ZHANG Hongxin², ZHANG Jianqiang¹

(1.College of Electronic Eng.,Naval Univ. of Eng.,Wuhan 430033,China; 2.Dept. of Weaponry Eng.,Naval Univ. of Eng.,Wuhan 430033,China)

Abstract: In order to solve the problem of performance degradation and divergence of the Gaussian nonlinear filter in the large initial deviation conditions,a new nonlinear filtering method called the iterated update extended Kalman filter (IU-EKF) was proposed.The new approach was carried out by introducing the current time measurement information gradually to the measurement update process with part of gain in pseudo-time. Meanwhile,since the multi-step measurement update process introduced the process noise at each step,the cross-covariance between the measurement noise and the posteriori state estimation error after each step was substituted into the covariance matrix,whose trace was then differentiated with respect to the standard Kalman gain and the result was set to zero.The optimal Kalman gain expression under correlated noise condition was derived then.At last,the number of iterations was adjusted adaptively according to the posteriori measurement residuals.In the premise of ensuring a certain filtering accuracy,the computational complexity of the algorithm was reduced.Taking the two-dimensional target tracking problem as an example,the algorithm was compared with EKF,IEKF,UKF and CKF respectively under the large initial deviation conditions.The influence of different iterations on the filtering accuracy was also compared and analyzed.The simulation results showed that the algorithm was more efficient than EKF,and the algorithm was superior to the classical Gaussian hypothesis filters under the conditions of large initial deviation.Furthermore,when the number of iterations was increased by 1,2,5,10,20,the filtering accuracy of the algorithm was improved,but the growth rate was gradually slowed down.

Key words: nonlinear system;iterated measurement update;extended Kalman filter;target tracking

卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)是基于状态空间模型的最小均方误差、线性无偏递推估计器^[1],实际

应用中系统通常为非线性,此时线性卡尔曼滤波将难以适用^[2]。因此,如何设计高效的滤波算法用于求

收稿日期:2016-09-08

基金项目:装备预研基金重点项目资助(9140A01010415JB11002)

作者简介:陆欣(1987—),男,博士生.研究方向:目标跟踪及非线性滤波. E-mail: lululu1016@163.com

<http://jsuese.ijournals.cn>

<http://jsuese.scu.edu.cn>

解非线性系统状态估计问题,成为近年来研究的热点。然而,由于非线性随机动态系统的后验概率密度函数封闭形式解无法获取,因此对于非线性系统通常不存在最优解^[3]。通过对非线性系统的线性近似可得到次优的非线性滤波方法。针对此,国内外学者深入研究,提出了基于贝叶斯理论的高斯型次优滤波算法。实际工程中,高斯型线性近似滤波器(Gaussian approximate filter, GAF)得到广泛应用。

Schmidt提出能够应用于非线性航天器导航问题上的扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)^[4]。EKF具有计算量小、算法简单的优点,但其忽略了非线性函数高阶导的影响,当非线性函数的非线性程度较强时,忽略的高阶截断误差会降低滤波精度甚至导致滤波发散。针对此,Henriksen^[5]推导了高斯2阶滤波器(Gaussian second order filter, GSOF),提高了滤波精度,但因涉及Hessian矩阵,使得计算负担加重。考虑到对系统后验状态估计均值和方差的逼近比对非线性系统的逼近更容易,Julier等^[6]提出了一种基于UT变换的无迹卡尔曼滤波算法(unscented Kalman filter, UKF)。然而,由于UT变换的中心权值为负值,会破坏协方差矩阵的非负定性和对称性,从而影响滤波算法的数值稳定性。Arasaratnam等^[7]提出了容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF),其核心是基于贝叶斯估计理论,采用3阶球面-半径容积规则对非线性系统的后验均值及方差进行近似。然而,UKF与CKF仅仅能够精确匹配到2阶展开项,当初始方差增大时会引入额外的高阶项误差,反而会降低其整体近似精度。

文献[8]已从理论上证明了当非线性系统先验信息不确定性增大时,基于高斯假设的线性近似滤波器会出现性能不稳定,甚至发散的现象。针对此,有两类可行方法:一类方法是渐进更新方法^[9]。首先,根据Bayesian法则构造同伦函数(Homotopy);其次,利用Homotopy定义渐进参数 $0 \rightarrow 1$ 连续变化时从先验状态分布到后验状态分布的演化过程的概率分布;最后,利用Fokker-Plank方程将量测更新转化为偏微分方程求解^[10-11]。但渐进更新的方法需借助粒子实现,时空复杂度较高,且在数值上不稳定^[12]。基于此问题,文献[13]提出了一种基于联合高斯分布近似的高斯渐进更新滤波器,能够在一定程度上提高大初始偏差条件下的滤波性能,但其需要极小的渐进步长才能达到理想效果,这将加重系统计算负担,导致实用受限。另一类方法是将迭代滤波理论引入到扩展卡尔曼滤波方法中,即迭代扩展卡尔曼滤波(iterated extended Kalman filter, IEKF)。IEKF重复利用量测信息计算泰勒级数展开的中心点,以达到降低线性化

误差的目的,在大初始偏差条件下表现出较好地稳定性^[14]。利用IEKF思想,相继出现迭代sigma点卡尔曼滤波器(iterated sigma point Kalman filter, ISPKF)^[15-16]、迭代无迹卡尔曼滤波(iterated unscented Kalman filter, IUKF)^[17]等方法。但由于IEKF与ISPKF只针对状态迭代,在迭代过程中仍包含先验误差矩阵,因此不能从根本上解决大初始偏差引起的滤波性能下降。此外,IUKF自身计算负担较重,若再进行迭代处理,每一次迭代都需要矩阵分解运算来重新生成sigma点,在系统状态空间呈高维度时,将极大地增加算法复杂度,难以满足实际应用。

针对现有滤波算法对于解决大初始偏差问题的不足,本文将在EKF框架下,在伪时间内将传统EKF算法的一步量测更新划分为 N 步采用部分增益的多步迭代更新过程,这是本文算法与EKF、IEKF算法的本质区别。当系统呈强非线性且初始偏差较大时,多步量测更新比一步量测更新更准确地估计系统状态的变化趋势,极大地降低线性化误差。在此基础上,综合考虑因多步量测过程引入噪声相关的影响,推导一种新的非线性滤波算法,以期达到提高滤波估计精度的目的。为降低算法计算复杂度,还提出一种自适应调整迭代更新次数的方法,该方法通过检测后验量测残差是否满足预设阈值对迭代次数进行调整,在保证滤波精度的同时,降低算法计算量。本文算法具有2个优势:一是,较传统EKF大幅提高了滤波估计精度;二是,在大初始偏差条件下,本文算法性能优于现有经典高斯假设滤波器。

1 问题描述

已知非线性离散系统模型与量测模型如下:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中: $\mathbf{x}_k$ 为系统状态向量; $\mathbf{f}(\cdot)$ 为非线性系统状态函数; $\mathbf{z}_k$ 为量测向量; $\mathbf{h}(\cdot)$ 为量测函数; $\mathbf{w}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$ 为零均值高斯白噪声,其协方差分别为 $\mathbf{Q}_k$ 、 $\mathbf{R}_k$,即

$$E(\mathbf{w}_k) = 0 \quad (3)$$

$$E(\mathbf{v}_k) = 0 \quad (4)$$

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{k-j} \quad (5)$$

$$E(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{k-j} \quad (6)$$

δ_{k-j} 为Kronecker- δ 函数:

$$\delta_{k-j} = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (7)$$

EKF的量测更新过程可描述如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (8)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}_k$ 为状态量 $\mathbf{x}_k$ 的后验估计值, $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 为状态量 $\mathbf{x}_k$ 的先验估计值, $\mathbf{K}_k$ 为卡尔曼增益。误差协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T] = E\left\{[(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k] \cdot \right. \\ &\quad \left. [(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k]^T\right\} = \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \quad (9) \end{aligned}$$

式中, $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$ 为先验状态估计误差, $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ 为后验状态估计误差, $\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-}$ 。

由式(8)、(9)可知,传统EKF结构中,在量测更新阶段系统每接收到一个新的量测信息,由于直接利用了线性最小方差准则并通过一步更新过程实现对后验状态的估计,导致其滤波估计结果难以达到最优。当系统非线性程度不强且初始状态估计误差协方差较小时,这样处理的线性化误差是不显著的。然而,当系统呈强非线性且初始偏差较大时,采用EKF算法对状态的一步量测更新无法准确估计系统状态的变化趋势,产生极大地线性化误差,甚至导致滤波发散。

2 高斯迭代更新滤波器

当系统先验不确定性增大时,传统EKF的一步量测更新难以保证对系统状态的准确估计,因此考虑对一步量测更新过程进行改进。若每接收一个新的量测信息时,先在伪时间上将其分成 N 步更新过程,并依据量测函数本身的非线性梯度逐步对状态进行更新,即利用伪时间内每一步当前的后验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ 代替上一步的 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$, 递推地执行量测更新,理论上将提高EKF的滤波精度。

2.1 一步量测更新

假设伪时间内将量测更新过程分为 N 步,每一步采用增益的 $1/N$ 执行迭代更新过程,即 $\mathbf{K}_k^{(i)} = \frac{1}{N} \mathbf{K}_k$, $i = 1, 2, \dots, N$ 为迭代次数。则经一步量测更新后,系统状态估计为:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k^{(1)} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (10)$$

此时先验状态估计误差和误差协方差分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^{(1)} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- - \mathbf{K}_k^{(1)} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) = \\ &\quad (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) - \mathbf{K}_k^{(1)} (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{v}_k) = \\ &\quad (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{v}_k \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(1)} &= E[\mathbf{e}_k^{(1)} (\mathbf{e}_k^{(1)})^T] = E\left\{[(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{v}_k] \cdot \right. \\ &\quad \left. [(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^- - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{v}_k]^T\right\} = \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) E[\mathbf{e}_k^- (\mathbf{e}_k^-)^T] (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k)^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(1)} E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^{(1)T} - \mathbf{K}_k^{(1)} E[\mathbf{v}_k (\mathbf{e}_k^-)^T] \cdot \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k)^T - (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^{(1)T} \quad (12) \end{aligned}$$

由于过程噪声 $\mathbf{v}_k$ 与状态估计先验误差协方差 $\mathbf{e}_k^-$ 不相关,因此式(12)可写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(1)} &= (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k)^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{(1)T} \quad (13) \end{aligned}$$

2.2 多步量测更新

对于量测值 $\mathbf{z}_k$ 执行两步量测更新后,系统状态估计为:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(2)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} + \mathbf{K}_k^{(2)} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(1)})) \quad (14)$$

此时先验状态估计误差和误差协方差分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^{(2)} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(2)} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)} - \mathbf{K}_k^{(2)} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(1)})) = \\ &\quad (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)}) - \mathbf{K}_k^{(2)} (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^{(1)}) = \\ &\quad (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^{(1)} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{v}_k \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(2)} &= E[\mathbf{e}_k^{(2)} (\mathbf{e}_k^{(2)})^T] = E\left\{[(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^{(1)} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{v}_k] \cdot \right. \\ &\quad \left. [(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) \mathbf{e}_k^{(1)} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{v}_k]^T\right\} = \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) E[\mathbf{e}_k^{(1)} (\mathbf{e}_k^{(1)})^T] (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k)^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(2)} E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^{(2)T} - \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(2)} E[\mathbf{v}_k (\mathbf{e}_k^{(1)})^T] (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k)^T - \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) E[\mathbf{e}_k^{(1)} \mathbf{v}_k^T] \mathbf{K}_k^{(2)T} \quad (16) \end{aligned}$$

式中, $E[\mathbf{v}_k (\mathbf{e}_k^{(1)})^T]$ 为量测噪声 $\mathbf{v}_k$ 与两步更新状态估计误差 $\mathbf{e}_k^{(1)}$ 的互协方差,这是由于多步更新过程中引入了每一步的过程噪声。假设此互协方差为:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k^{(1)} &= E[\mathbf{e}_k^{(1)} \mathbf{v}_k^T] = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{H}_k) E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{v}_k^T] - \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(1)} E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] = -\mathbf{K}_k^{(1)} \mathbf{R}_k \quad (17) \end{aligned}$$

将式(17)代入式(16),可得出:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(2)} &= (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^{(1)} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k)^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{(2)T} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{C}_k^{(1)T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k)^T - \\ &\quad (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(2)} \mathbf{H}_k) \mathbf{C}_k^{(1)} \mathbf{K}_k^{(2)T} \quad (18) \end{aligned}$$

依次类推,令 $\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_k^{(0)}$, $\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_k^{(0)}$, $\mathbf{C}_k^{(0)} = 0$, 可得到递推形式的多步更新过程:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} + \mathbf{K}_k^{(i)} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{(i)} &= (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{P}_k^{(i-1)} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)})^T + \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{(i)T} - (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{C}_k^{(i-1)T} \mathbf{K}_k^{(i)T} - \\ &\quad \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{C}_k^{(i-1)T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)})^T \quad (20) \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_k^{(i)} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{C}_k^{(i-1)} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{R}_k \quad (21)$$

式(20)是估计误差协方差矩阵的一般表达形式,对任意增益 $\mathbf{K}_k^{(i)}$ 都适用,下一步需寻求最优增益

矩阵 $\mathbf{K}_k^{(i)}$ 使得 $\text{tr}(\mathbf{P}_k^{(i)})$ 最小化, 即利用误差协方差 $\mathbf{P}_k^{(i)}$ 的迹对增益 $\mathbf{K}_k^{(i)}$ 求导, 并令结果为零。求导过程参考:

$$\frac{d[\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B})]}{d\mathbf{A}} = \mathbf{B}^T \quad (22)$$

$$\frac{d[\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^T)]}{d\mathbf{A}} = 2\mathbf{A}\mathbf{D} \quad (23)$$

式(22)成立的条件是 $\mathbf{A}\mathbf{B}$ 为方阵, 式(23)成立的条件是 $\mathbf{D}$ 为对称矩阵。联立式(20)、(21), 并依据式(22)、(23)可得:

$$\begin{aligned} \frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k^{(i)}))}{d\mathbf{K}_k^{(i)}} = & -2(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{(i-1)} + \mathbf{C}_k^{(i-1)})^T + \\ & 2\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{(i-1)} \mathbf{H}_k^T + 2\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{R}_k + \\ & 2\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^{(i-1)} + 2\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{C}_k^{(i-1)T} \mathbf{H}_k^T \end{aligned} \quad (24)$$

$$\text{令 } \frac{d(\text{tr}(\mathbf{P}_k^{(i)}))}{d\mathbf{K}_k^{(i)}} = 0, \text{ 可求解出最优卡尔曼增益为:}$$

$$\mathbf{K}_k^{(i)} = \frac{(\mathbf{P}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{C}_k^{(i-1)})}{(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k^{(i-1)} + \mathbf{C}_k^{(i-1)T} \mathbf{H}_k^T)} \quad (25)$$

将式(25)代入式(20)可得最优卡尔曼增益下的误差协方差矩阵表达式:

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k^T \quad (26)$$

2.3 迭代更新次数 N 的自适应调整

理论上, 迭代次数越多, 则由EKF线性化造成的截断误差越小, 滤波精度就越高。但实际应用中迭代过程将增加算法的计算复杂度, 因此需设计一种在线调节迭代次数的方法, 以获得提高滤波精度与降低计算量之间的平衡。

每一次迭代过程结束, 当前伪时刻的后验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ 比上一伪时刻后验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}$ 更加接近状态真值 $\mathbf{x}_k$, 当前伪时刻后验量测残差 $\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})$ 也比上一伪时刻后验量测残差 $\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})$ 更接近零, 因此选取后验量测残差作为迭代次数在线调整的指标, 即:

$$\|\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})\| \leq \varepsilon \quad (27)$$

式中, ε 为非负小量, 正如一般工程上的卡尔曼滤波一样, 可将此阈值作为滤波调节参数, 实际中需根据具体问题通过仿真及实测试验进行调节, 以达到最好的滤波效果。若 ε 取值过小, 则后验量测残差难以满足阈值要求, 使迭代一直进行, 无法起到降低计算量的目的; 若 ε 取值过大, 则滤波精度难以保证。针对本文2维目标跟踪问题, 阈值 ε 的一般取值范围为 $[0.0005, 0.01]$ 。本文取 $\varepsilon = 0.001$, 即当后验量测残差满足此阈值时达到了满意的后验状态估计值, 跳出迭代过程, 执行下一步更新。

2.4 算法步骤

Step1: 系统状态方程与量测方程分别如式(1)与(2)所示。

Step2: 初始化滤波器为

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{x}_0) \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}[(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^*)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0^*)^T] \quad (29)$$

Step3: 设置循环变量 $k = 1, 2, \dots, m$ (m 为预设迭代终止值, 本文取 $m = 10$), 完成以下步骤:

1) 计算偏微分矩阵

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \quad (30)$$

2) 执行时间更新过程, 状态估计与估计误差协方差分别为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (31)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (32)$$

3) 执行迭代量测更新过程, 设置量测更新循环变量 $i = 1, 2, \dots, N$, 其中, N 为预设最大迭代次数。执行以下步骤:

① 计算偏微分矩阵

$$\mathbf{H}_k^{(i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)}} \quad (33)$$

② 计算卡尔曼增益矩阵

$$\mathbf{K}_k^{(i)} = \gamma_k (\mathbf{P}_k^{(i-1)} \mathbf{H}_k^{(i)T} + \mathbf{C}_k^{(i-1)}) (\mathbf{W}_k^{(i)})^{-1} \quad (34)$$

式中,

$$\mathbf{W}_k^{(i)} = \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{P}_k^{(i-1)} \mathbf{H}_k^{(i)T} + \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k^{(i)} \mathbf{C}_k^{(i-1)} + \mathbf{C}_k^{(i-1)T} \mathbf{H}_k^{(i)T}。$$

③ 计算每一步量测更新过程的后验状态估计与后验误差协方差矩阵

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)} + \mathbf{K}_k^{(i)} (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i-1)})) \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_k^{(i)} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{P}_k^{(i-1)} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)})^T +$$

$$\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^{(i)T} - (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{C}_k^{(i-1)} \mathbf{K}_k^{(i)T} -$$

$$\mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{C}_k^{(i-1)T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)})^T \quad (36)$$

④ 更新互协方差矩阵

$$\mathbf{C}_k^{(i)} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{H}_k^{(i)}) \mathbf{C}_k^{(i-1)} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{R}_k \quad (37)$$

⑤ 判断后验量测残差 $\|\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})\| \leq \varepsilon$ 是否满足。

若满足, 则终止迭代量测更新过程, 将后验状态估计结果与后验误差协方差矩阵返回给时间更新过程; 若不满足, 继续执行迭代量测更新, 直到满足预设阈值; 若后验量测残差一直无法满足阈值, 则在最大迭代次数时终止迭代, 并返回最终后验状态估计与后

验误差协方差矩阵:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^{(N)} \quad (38)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^{(N)} \quad (39)$$

3 仿真试验与分析

3.1 确定目标跟踪模型与滤波初值

采用2维目标跟踪模型验证本文算法,目标状态为 $\mathbf{x}_k = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$,其中, x_k, y_k 分别为目标在平面直角坐标系中的横向坐标和纵向坐标, $\dot{x}_k, \dot{y}_k$ 分别为横向速度和纵向速度。量测矢量为 $\mathbf{z}_k = [d_k, r_k]^T$, d_k 为观测点(x_0, y_0)到目标的距离, r_k 为观测点到目标的方位角,则相应的目标跟踪模型为:

$$d_k = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} + v_{d,k} \quad (40)$$

$$r_k = \arctan\left(\frac{x_k - x_0}{y_k - y_0}\right) + v_{r,k} \quad (41)$$

式中, $v_{d,k}$ 和 $v_{r,k}$ 分别为距离观测噪声矢量与方位观测噪声矢量,且 $v_{d,k}$ 和 $v_{r,k}$ 采用均值为零、方差为 δ_d^2 和 δ_r^2 的高斯白噪声。

目标运动状态方程为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (42)$$

式中: $\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为系统转移矩阵, T 为采样周期; $\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}$ 为过程噪声增益矩阵;

$\mathbf{w}_k$ 为系统过程噪声,且采用均值为零、方差为 δ_w^2 的高

斯白噪声。为评价大初始误差条件下各个滤波的性能,设置目标初始状态真值为 $\mathbf{x}_0 = [-20 \ -0.5 \ -10 \ -0.5]^T$,滤波初值为 $\hat{\mathbf{x}}_0 = [-17 \ -4.5 \ -14.5 \ -5.5]^T$,初始协方差矩阵为 $\mathbf{P}_0 = \text{diag}[12^2 \ 4.1^2 \ 12.5^2 \ 5.1^2]$, $\hat{\mathbf{x}}_0$ 与 $\mathbf{w}_k, v_{d,k}$ 和 $v_{r,k}$ 互不相关。

定义状态估计均方根误差(root mean square error, RMSE)评价滤波器的性能:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_k^i - \hat{\mathbf{x}}_k^i\|_2^2} \quad (43)$$

式中, $\mathbf{x}_k^i$ 为第 j 次仿真时 k 时刻的状态真值, $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 为第 j 次仿真时 k 时刻的后验状态估计值, n 为Monte Carlo仿真试验次数。

图1给出了基于仿真试验场景设定下的目标参考运动轨迹。

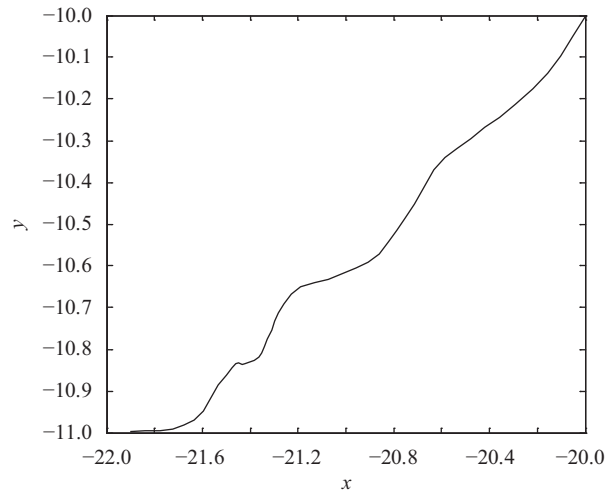


图1 参考轨迹

Fig.1 Reference trajectory

3.2 不同滤波算法对目标跟踪效果

大初始偏差条件下,比较传统EKF与本文算法的滤波性能。

采用EKF与本文算法分别对上述非线性系统状态进行估计,比较两种算法下状态估计结果与其均方根误差,分别如图2、3所示。

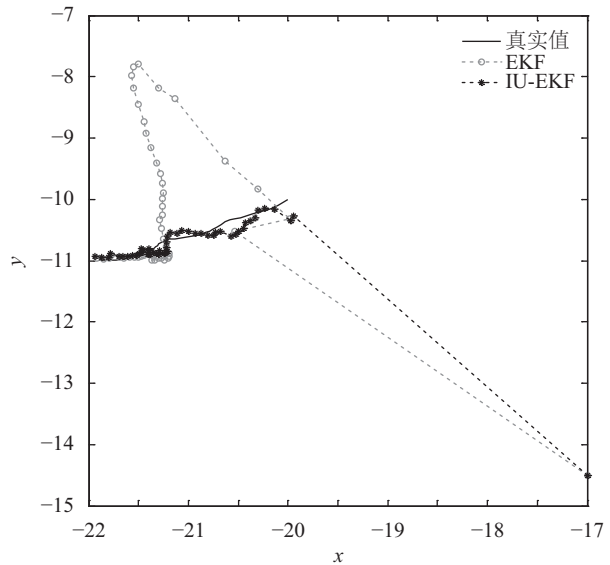


图2 EKF、IU-EKF对目标跟踪结果

Fig.2 Target tracking results of EKF and IU-EKF

表1列出了100次Monte Carlo仿真EKF与本文算法的RMSE均值。

EKF在获得 k 时刻的量测值 $\mathbf{z}_k$ 前,对于 k 时刻系统状态的信息仅由先验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 获得,因此以 $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-$ 作为泰勒级数展开的中心点计算量测先验估计值和增益矩阵。在获取 k 时刻测量值 $\mathbf{z}_k$ 后,执行量测更新方程,获得后验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ 。由此将一步量测更新得到的后验状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ 作为对 k 时刻状态 $\mathbf{x}_k$ 的最准确估计。

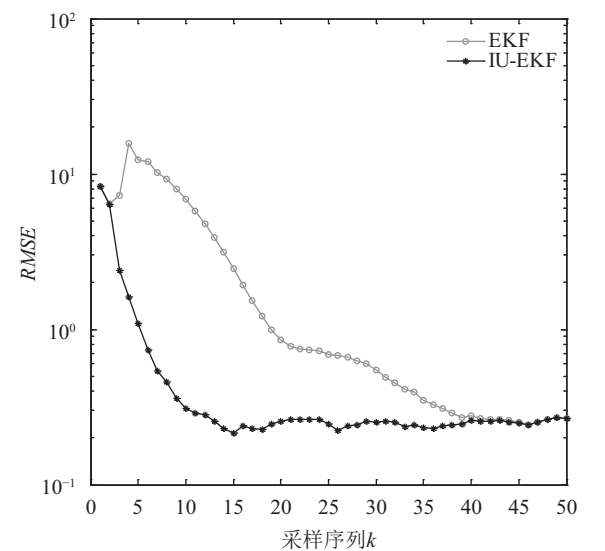


图 3 EKF、IU-EKF状态估计均方根误差比较

Fig.3 RMSE of state estimation by EKF and IU-EKF

表 1 EKF与IU-EKF的状态估计均方根误差均值对比

Tab.1 Mean value of RMSE of state estimation by EKF and IU-EKF

滤波器	RMSE均值
EKF	3.011 8
IU-EKF	1.001 1

由图2、3及表1可以看出,当先验信息不确定性增大时,EKF将产生较大的估计误差,难以实现对目标状态的准确估计。而本文算法有效解决了大初始偏差条件下对EKF性能不稳定的问题,且滤波精度比EKF显著提高。通过上述仿真实验结果可知,在大初始偏差条件下本文算法明显优于传统EKF。

下面对本文算法与其他经典高斯非线性滤波在解决大初始偏差条件下的目标跟踪问题进行对比。采用IEKF、UKF、CKF与本文算法分别对上述非线性系统状态进行估计,其中,IEKF迭代次数设置为10,IU-EKF迭代更新次数设置为10。各滤波算法的状态估计结果与其均方根误差的比较,分别如图4、5所示。

由于状态的后验估计值 $\hat{x}_k^+$ 比先验估计值 $\hat{x}_k^-$ 更接近真实轨迹^[18-19],因此IEKF的基本思想是以量测更新得到的后验状态估计值 $x_k = \hat{x}_k^+$ 作为泰勒级数展开的中心点,对观测方程再次线性化处理,所得状态估计值会更加准确,重复以上步骤可降低EKF的线性化误差,每一次执行量测更新方程都能得到一个更准确的后验状态估计 $\hat{x}_k^+$,直至达到实际应用所需精度为止。但IEKF的实质是递归的重复计算泰勒级数展开的中心点,系统状态与误差协方差通过同一个量测值重复更新,这与本文提出的在伪时间上将量测信息分为多步引入量测过程有本质区别。由图4、5

可知本文算法优于IEKF、UKF、CKF。表2给出100次Monte Carlo仿真后各个滤波器RMSE均值和标准差。进一步由表2可知,IU-EKF的误差均值和波动均最小,因此IU-EKF具有较高的精度和稳定性。

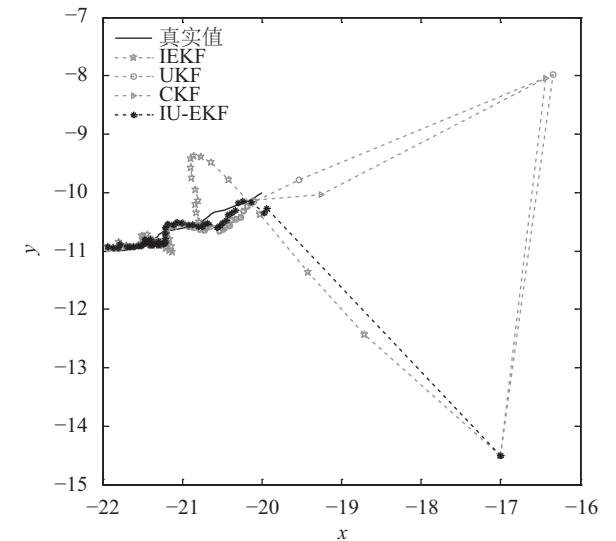


图 4 IEKF、UKF、CKF、IU-EKF目标跟踪结果

Fig.4 Target tracking results of IEKF, UKF, CKF and IU-EKF

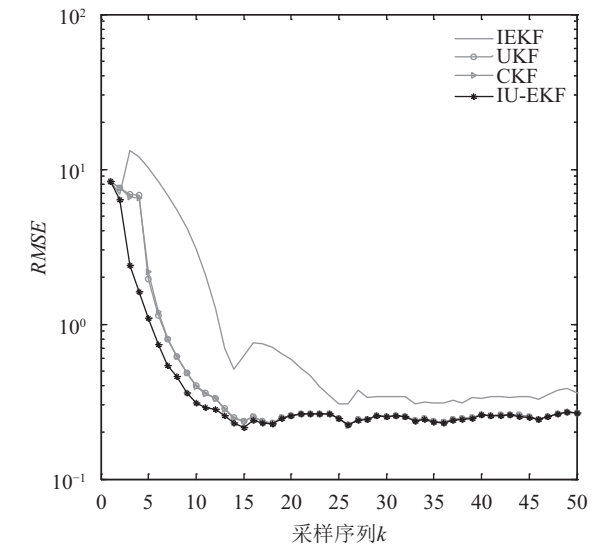


图 5 IEKF、UKF、CKF、IU-EKF状态估计均方根误差比较

Fig.5 RMSE of state estimation by IEKF, UKF, CKF and IU-EKF

表 2 IEKF、UKF、CKF与IU-EKF的状态估计均方根误差均值和标准差的对比

Tab.2 Mean value and standard deviation of RMSE of state estimation by IEKF, UKF, CKF and IU-EKF

滤波器	RMSE均值	RMSE标准差
IEKF	2.472 4	3.339 6
UKF	1.380 2	1.963 3
CKF	1.363 2	1.931 4
IU-EKF	1.001 1	1.453 1

3.3 不同迭代更新次数对目标跟踪效果

比较不同迭代更新次数对滤波性能的影响, 分别取迭代更新次数为1、2、5、10、20。图6、7分别给出了不同迭代次数条件下, IU-EKF对状态估计结果及其均方根误差的比较。

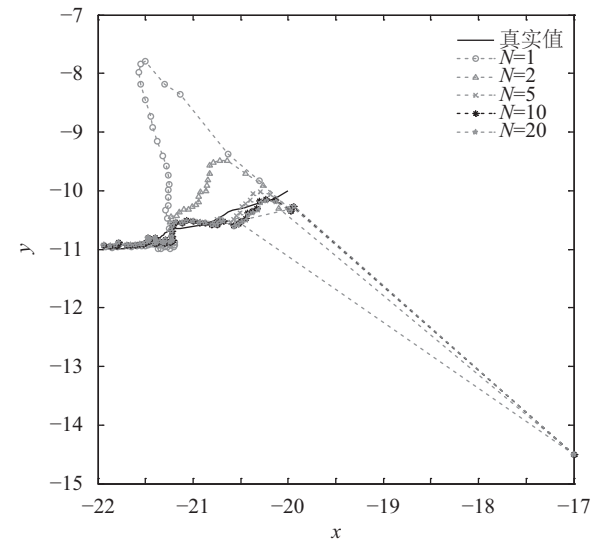


图 6 不同迭代更新次数下IU-EKF对目标跟踪结果
Fig.6 Target tracking results of IU-EKF with different number of iterations

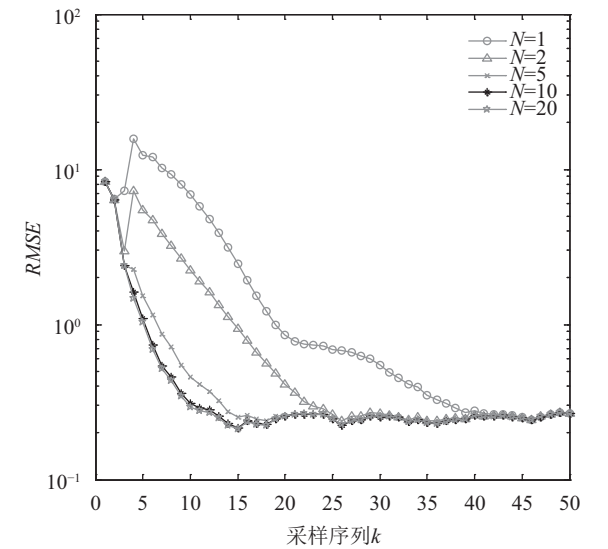


图 7 不同迭代更新次数下IU-EKF状态估计均方根误差
Fig.7 RMSE of state estimation by IU-EKF with different number of iterations

由图6、7可知, 当迭代更新次数为1时, IU-EKF自动退化为传统EKF, 滤波精度最低。此时, 迭代更新作用不明显, 产生较大的RMSE。表3给出了算法在不同迭代次数下进行100次Monte Carlo仿真后得到的RMSE均值。由表3可以看出, 当迭代次数按1、2、5、10、20增加时, IU-EKF的滤波精度虽有提升, 但提升幅度逐渐减缓, 尤其是2次迭代更新较1次迭代更新

(即EKF)的RMSE均值降低了约60%, 而20次迭代更新较10次迭代更新的RMSE均值仅降低了0.000 1。因此在使用IU-EKF进行状态估计时, 需要合理地选择迭代更新次数以实现滤波精度与计算量之间的平衡。若需提高估计精度, 则增大迭代次数; 若需满足实时性要求, 则减少迭代次数。针对本文研究的2维目标跟踪问题, 当迭代次数为2时, 能够以较小的计算量增加为代价, 获得估计精度的大幅提升。

表 3 不同迭代次数下IU-EKF的状态估计均方根误差均值对比

Tab.3 Mean value of RMSE of state estimation by IU-EKF with different number of iterations	
迭代次数	RMSE均值
1	3.011 8
2	1.286 7
5	1.001 8
10	1.001 1
20	1.001 0

4 结 论

针对高斯型非线性滤波器的初始偏差敏感问题, 从EKF基本框架出发, 将传统EKF算法的一步量测更新过程改进为分多步采用部分增益的迭代更新过程, 在考虑噪声相关条件下提出了一种新的迭代更新扩展卡尔曼滤波器。针对2维目标跟踪问题的仿真结果表明, 提出的迭代更新扩展卡尔曼滤波器能够有效提高大初始偏差条件下的初值鲁棒性和滤波估计精度。此外, 采用后验量测残差作为衡量迭代更新效果的指标, 设计了迭代更新次数的自适应调整方法, 降低了算法的计算代价。

本文所提迭代更新次数自适应调节算法中, 若预设迭代次数设置过小, 则在迭代过程中后验量测残差还未达到阈值时迭代已经结束, 滤波效果不佳; 若预设迭代次数设置过大, 反复迭代将增加算法的计算复杂度, 使算法难以满足实际需求。因此, 如何合理选择最大迭代次数和后验量测残差阈值将是下一步研究重点。

参考文献:

[1] Brown R G,Hwang P Y.Introduction to random signals and applied Kalman filtering[M].3rd ed.New York:Wiley,1997.
[2] Wang Jianwen,Li Xun,Zhang Hui,et al.Survey of nonlinear filters in framework of recursive bayesian estimation[J].Computer Science,2010,37(8):21–25.[王建文,李迅,张辉,等.递归贝叶斯估计框架下的非线性滤波算法综述[J].计算机科学,2010,37(8):21–25.]

- [3] Lei Ming, van Wyk B J, Qi Yong. Online estimation of the approximate posterior Cramer-Rao lower bound for discrete-time nonlinear filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 2011, 47(1): 37–57.
- [4] Schmidt F S. The Kalman filter—Its recognition and development for aerospace applications[J]. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1981, 4(1): 4–7.
- [5] Henriksen R. The truncated second order nonlinear filter revisited[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2003, 27(1): 247–251.
- [6] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 477–482.
- [7] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254–1269.
- [8] Morelande M R, García-Fernández A F. Analysis of the Kalman filter for nonlinear measurements[J]. IEEE Signal Processing Society, 2013, 61(2): 5477–5484.
- [9] Hanebeck U D, Steinbring J. Progressive gaussian filtering based on dirac mixture approximations[C]//Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion. Singapore: IEEE, 2012: 1697–1704.
- [10] Daum F, Noushin A. Coulomb's law partical flow for nonlinear filters[C]//Proceedings of SPIE 8137, Signal and Data Proceeding of Small Targets. San Diego, USA: SPIE, 2011. DOI: 10.1117/12.887517.
- [11] Daum F. Partical flow with non-zero diffusion for nonlinear filters[C]//Porceedings of SPIE Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition X X II. Maryland, USA: SPIE, 2013. DOI: 10.1117/12.2009363.
- [12] Yang T, Mehta P G, Meyn S P. Feedback particle Filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2465–2480.
- [13] Huang Yulong, Zhang Yonggang, Li Ning. Gaussian approximate filter with progressive measurement update[C]//Proceedings of the 54th Annual Conference on Decision and Control. Osaka, Japan: IEEE, 2015: 4344–4349.
- [14] Bell B M, Cathey F W. The iterated Kalman filter update as a Gauss-Newton method[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1993, 38(2): 294–297.
- [15] Sibley G, Sukhatme G S, Matthies L H. The iterated sigma point Kalman filter with applications to long range stereo[C]//Proceedings of Robotics: Science and Systems II. Cambridg, USA: MIT Press, 2007: 235–244.
- [16] Ungarala S. On the iterated forms of Kalman filters using statistical linearization[J]. Journal of Process Control, 2012, 22(5): 935–943.
- [17] Zhan Ronghui, Wan Jianwei. Iterated unscented Kalman filter for passive target tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(3): 1155–1163.
- [18] Yang Hong, Li Ya'an, Li Guodong. New method of improved extended Kalman filter[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(19): 18–20. [杨宏, 李亚安, 李国辉. 一种改进扩展卡尔曼滤波新方法[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(19): 18–20.]
- [19] Li Liangque, Ji Hongbing, Luo Junhui. Iterated extended Kalman particle filtering[J]. Journal of Xidian University (Nature Science), 2007, 34(2): 233–238. [李良群, 姬红兵, 罗军辉. 迭代扩展卡尔曼粒子滤波器[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2007, 34(2): 233–238.]

(编辑 赵 婧)

引用格式: Lu Xin, Liu Zhong, Zhang Hongxin, et al. A Gaussian nonlinear iterated update filter[J]. Advanced Engineering Sciences, 2017, 49(4): 111–118. [陆欣, 刘忠, 张宏欣, 等. 一种高斯型非线性迭代更新滤波器[J]. 工程科学与技术, 2017, 49(4): 111–118.]