中国科学: 技术科学 2013 年 第 43 卷 第 3 期: 337 ~ 346
www.scichina.com tech.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

# 利用引力辅助的行星际周期轨道间转移研究

王帅[①], 尚海滨[①*], 吴伟仁[②]

① 北京理工大学宇航学院飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081;
② 探月与航天工程中心, 北京 100037
* E-mail: shanghb@bit.edu.cn

收稿日期: 2012-09-13; 接受日期: 2012-12-25
国家重点基础研究发展计划(“973”计划)(批准号: 2012CB720000)、国家自然科学基金(批准号: 11102021)和重点实验室基金资助项目

**摘要** 三体动力学系统动平衡点附近存在的周期轨道在空间探测任务中有着重要的应用价值. 本文研究了流形不相交三体系统周期轨道间的转移问题, 提出了一种结合流形和引力辅助技术的转移轨道设计方法. 首先通过定义近拱点庞加莱映射搜索周期轨道不变流形的近拱点, 然后给出了任意初始状态达到一定双曲超速所需速度增量的计算方法, 从而得到了最佳逃逸流形和捕获流形的选择依据, 并结合等高线图法与近拱点庞加莱映射分析了周期轨道利用该方式进行逃逸或捕获的性质. 在此基础上, 基于受摄三体模型建立了流形逃逸点到捕获点转移轨道的优化模型, 通过微分修正策略将优化模型化简为仅有两个参数的无约束优化问题, 并采用单纯形算法进行了求解. 以地球-火星和地球-金星转移为例对所提方法的有效性进行了验证, 数值结果表明: 结合流形和引力辅助技术可有效降低周期轨道间转移的能量消耗.

**关键词**
周期轨道
轨道设计
流形技术
引力辅助
庞加莱映射
微分修正

动平衡点及附近的不稳定周期轨道族在空间探测任务中具有重要的应用价值, 近些年来引起了科学家们的广泛关注. 动平衡点是进行天文观测的理想位置, 例如已成功实施的 ISEE-3 任务、ACE 任务和 SOHO 任务等[1, 2]; 另一方面, 动平衡点周期轨道族所具有的独特位置和动力学特性, 使得其可作为月球、火星等探测任务的中继站, 更能作为低能量通道为深空探测任务提供巧妙的转移方式. 目前对动平衡点周期轨道及相关的转移轨道设计研究已非常广泛, 如何利用动平衡点附近区域的动力学特性, 实现周期轨道之间的低能量转移是其中的热点问题之一.

在同一三体系统内, 相同能量的周期轨道间存在着零能量消耗的同宿和异宿连接[3, 4]. 而不同能量周期轨道间的连接则需要消耗额外的能量, 针对这一问题, 学者们进行了一定的研究. Howell 和 Hiday 针对不同能量 Halo 轨道间转移问题, 巧妙的利用部分 Lissajous 轨道实现了轨道的过渡, 并采用主矢量法对转移轨道进行了优化设计[5]. Davis 等人针对该问题, 通过引入二体影响球代替传统的庞加莱映射实现了 Halo 轨道流形间的拼接, 利用表征拼接点所处轨道位置的参数 $k$ 分析了所需速度增量的变化规律, 结果表明速度增量随参数 $k$ 的减少而降低, 利用这个规律可直接选取合适的转移机会, 完成不同能量周期轨道间的拼接[6, 7].

不同三体系统的周期轨道间转移可以分为流形相连与流形不相连两种情况. 前一种情况的研究多见于木星系统内, Ross 等人指出可以利用三体系统的动力学特性设计长时间滞留于木星各卫星附近的任务轨道, 这样可以使探测器在低燃料消耗的情况下对木星卫星进行长时间观测, 增加探测任务的科学

英文版发表信息: Wang S, Shang H B, Wu W R. Interplanetary transfers employing invariant manifolds and gravity assist between periodic orbits. Sci China Tech Sci, 2013, 56: 786–794, doi: 10.1007/s11431-013-5133-5

回报[8, 9]. 日-地三体系统与地-月三体系统的流形在相空间中也存在着连接, 对于利用双三体系统不变流形进行低成本探月轨道也有一些国内学者进行了详细的研究[10, 11].

对不同太阳-行星三体系统周期轨道间的转移而言, 由于行星-太阳的质量比通常较小, 使得三体系统之间流形多不相交, 其对应的轨道设计方法也有所不同. Alonso 利用流形改变探测器二体能量的特性, 设计了直接借助流形的日地系统 Halo 轨道至日火系统 Halo 轨道间的脉冲转移轨道, 并利用双重微分修正对轨道进行了优化[12]. Pergola 等人[13]针对同一问题利用小推力发动机代替传统化学推进系统, 通过选取合适的庞加莱映射获得逃逸流形的出发点与捕获流形的进入点, 小推力控制律采用传统的直接法进行求解. 对于此类问题, Nakimiya 等人[14, 15]的研究具有一定的特点, 提出了一种结合行星引力辅助与不变流形的转移方式: 探测器首先沿不稳定流形接近出发行星, 在近拱点处施加速度脉冲逃逸并飞向目标行星, 到达目标行星近拱点处再次施加速度脉冲进入稳定流形, 沿稳定流形到达目标周期轨道. 由于引入了引力辅助的概念, 使得此类型转移较传统方式可大幅减少燃料消耗[16].

本文研究了行星际不同三体系统周期轨道间的转移轨道设计问题, 针对结合行星引力辅助和不变流行的转移方式, 结合近拱点庞加莱映射提出了一种新的分段轨道设计方法, 并在受摄限制性三体模型下进行了优化. 首先通过引入近拱点庞加莱映射分析了不变流形近拱点在行星附近的全局分布; 然后, 发展了给定双曲超速的任意逃逸点和捕获点处速度脉冲计算方法, 从而得到了选择逃逸流形与捕获流形的方法, 完成了完整转移轨道的初始设计; 在此基础上, 绘制了行星附近逃逸与捕获速度脉冲全局等高线图, 分析了周期轨道利用该方式进行转移的性质; 最后, 在受摄圆型限制性三体模型下, 通过最优性与可行性分离策略简化了转移轨道优化模型, 采用微分修正与单纯形算法获得了最优转移轨道.

## 1 动力学模型

本文在平面圆型限制性三体模型下进行行星逃逸与捕获轨道的分析. 平面圆型限制性三体模型如图 1 所示, 忽略小天体 $P_3$ 对主天体 $P_1$ 和 $P_2$ 的影响,

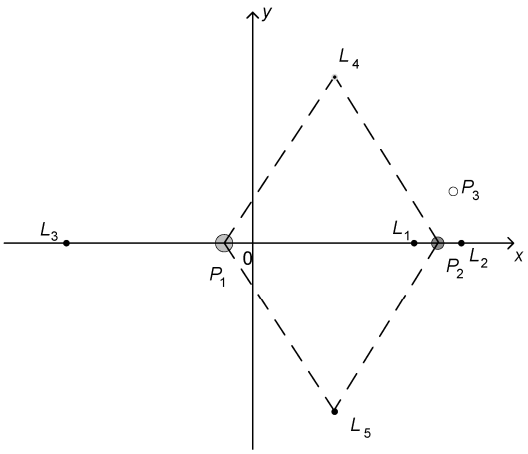


**图 1 平面圆型限制性三体问题示意图**

$P_1$ 和 $P_2$ 围绕两者的共同质心作圆周运动, 其中 $P_1$ 的质量 $m_1$ 大于 $P_2$ 的质量 $m_2$. 为分析 $P_3$ 的运动, 定义旋转坐标系如下: 原点位于 $P_1$ 和 $P_2$ 的共同质心上, $x$ 轴由天体 $P_1$ 指向天体 $P_2$, $y$ 轴指向 $P_2$ 速度方向.

引入归一化单位对系统变量进行处理, 定义质量单位 MU 为 $P_1$ 和 $P_2$ 的质量之和, 长度单位 DU 为 $P_1$ 和 $P_2$ 之间的距离, 时间单位 TU 为系统旋转周期的 $1/2\pi$. 令 $\mu = m_2/(m_1+m_2)$, 则在单位归一化后, 天体 $P_1$ 的坐标为 $(-\mu,0)$, 天体 $P_2$ 的坐标为 $(1-\mu,0)$, 则旋转坐标系下 $P_3$ 的动力学方程可描述为

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} &\Phi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{\mu(1-\mu)}{2}, \\ &r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

该系统对应的雅克比积分常数为

$$C = x^2 + y^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - (\dot{x}^2+\dot{y}^2). \tag{3}$$

该三体系统存在 5 个动平衡点, 如图 1 中所示, 其中 $L_1$, $L_2$ 和 $L_3$ 点为共线平衡点, $L_4$ 和 $L_5$ 点与天体 $P_1$ 和 $P_2$ 构成等边三角形. $L_1$, $L_2$ 和 $L_3$ 点属于中心—鞍点类型, 因此周围存在一系列的周期轨道及与其

相连的不变流形. 本文主要针对 $L_1$ 和 $L_2$ 点附近 Lyapunov 轨道开展研究.

不变流形是研究三体系统中转移轨道的重要工具, 其是三体系统内一系列自然发生轨道的集合, 其中不稳定流形和稳定流形分别随着时间正向和反向递推逐渐接近于周期轨道. 只需微小的摄动探测器即可由周期轨道进入不稳定流形或由稳定流形进入周期轨道. 借用不变流形到达低能量转移的原理为长时间借助三体引力从而改变轨道状态, 从而得到能量消耗更少的转移机会.

不变流形的计算方法可以描述如下: 在周期轨道附近对方程(1)进行线性化得到方程 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}$, 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在特征对 $(\lambda_i,\boldsymbol{v}_i), i=1,2,3,4$, $Re(\lambda_i)>0$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 张成的空间称为系统的不稳定流形, $Re(\lambda_i)<0$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_i$ 张成的空间称为系统的稳定流形[11]. 为得到不变流形, 在周期轨道上取一系列的离散点, 分别计算各点处特征向量并以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_h+e\boldsymbol{v}_i$ 作为初值沿时间正向或逆向积分即可, 其中 $\boldsymbol{X}_h$ 为周期轨道上的状态, $e$ 为一个小的常数. 地球附近流形的结构如图 2 中所示, 图 2 中上标 $U$ 表示不稳定流形, $S$ 表示稳定流形.

## 2　不变流形近拱点分析

针对结合不变流形与行星引力辅助的转移轨道, 本文采取分段策略进行初始设计: 根据探测器距离星体的距离将整个转移轨道分为三段, 逃逸星体附近的逃逸段和目标星体附近的捕获段采用三体模型描述, 星际航行段则采用日心二体模型描述. 轨道设计可以通过如下步骤完成: 首先在日心二体模型中选择合适的发射机会, 从而得到逃逸双曲超速和捕获双曲超速; 然后计算周期轨道对应不变流形在行星附近的近拱点, 代入双曲超速得到各个近拱点对应速度增量; 最后选择速度增量最小的流形作为逃逸和捕获流形.

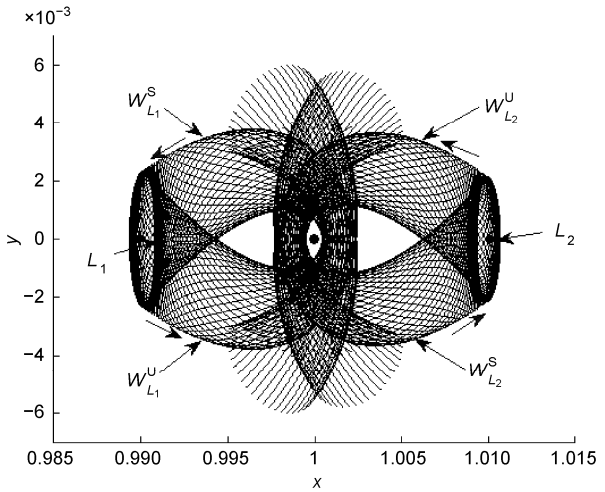


**图 2　不变流形示意图**

为完整描述不变流形在行星周围的近拱点, 本文引入近拱点庞加莱映射[17].

由于不变流形上雅克比积分常数 $C_x$ 始终保持不变, 其所处的空间可以表示为

$$\Pi=\left\{\boldsymbol{\rho}\mid C(x,y,\dot{x},\dot{y})=C_x\right\}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=[x,y,\dot{x},\dot{y}]$.

在空间 $\Pi$ 中确定三个状态可计算另一状态, 但仍存在两个解. 为消除双解性, 需要引入新的约束从而区分这两个解. 由于轨道相对于 $P_2$ 的运行方向极大的影响着逃逸与捕获速度增量的计算, 故引入相对于 $P_2$ 的角动量作为新约束区分顺行轨道和逆行轨道空间如下:

$$\begin{aligned}\Pi^+&=\left\{\boldsymbol{\rho}\mid C(x,y,\dot{x},\dot{y})=C_x,(x-1+\mu)\dot{y}-y\dot{x}\geqslant 0\right\},\\ \Pi^-&=\left\{\boldsymbol{\rho}\mid C(x,y,\dot{x},\dot{y})=C_x,(x-1+\mu)\dot{y}-y\dot{x}<0\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

利用庞加莱映射可将上述三维系统降至可观性更佳的二维系统, 表示为

$$\Pi'=\left\{\boldsymbol{\rho}\mid C(x,y,\dot{x},\dot{y})=C_x, f(x,y,\dot{x},\dot{y})=0\right\}, \tag{6}$$

其中 $f(x,y,\dot{x},\dot{y})=0$ 表示庞加莱映射的约束.

为确定近拱点庞加莱映射对应的约束, 令 $\boldsymbol{\chi}=[x-1+\mu,y]$ 表示 $P_3$ 相对于 $P_2$ 的位置矢量, 则 $P_3$ 相对于 $P_2$ 的距离的导数表示为

$$\dot{r}_2=\frac{\boldsymbol{\chi}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{\chi}\|}. \tag{7}$$

由此可知, 近拱点和远拱点所构成的空间可表示为

$$\Sigma=\left\{\boldsymbol{\rho}\mid \boldsymbol{\chi}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}}=0\right\}. \tag{8}$$

近拱点和远拱点可通过 $r_2$ 的二阶导数进行区分, $\ddot{r}_2 \geqslant 0$ 表示该点为近拱点, $\ddot{r}_2 < 0$ 则表示该点为远拱点, 二阶导数的计算表示为

$$\ddot{r}_2 = \frac{1}{r_2}\left(\dot{\boldsymbol{\chi}}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}\ddot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}}\right) - \frac{1}{r_2^3}\left(\boldsymbol{\chi}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}}\right)^2. \tag{9}$$

由此得到近拱点空间与远拱点空间的表示如下:

$$\begin{aligned} \Sigma^{+} &= \left\{\boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{\chi}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{\boldsymbol{\chi}}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}\ddot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} \geqslant 0\right\}, \\ \Sigma^{-} &= \left\{\boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{\chi}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{\boldsymbol{\chi}}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}\ddot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} < 0\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

综上所述, 特定雅克比积分常数下顺行轨道近拱点平面和逆行轨道近拱点平面可分别表示为

$$\begin{aligned} \Psi^{+} &= \left\{\boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{\rho} \in \Pi^{+}, \boldsymbol{\rho} \in \Sigma, \dot{\boldsymbol{\chi}}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}\ddot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} \geqslant 0\right\}, \\ \Psi^{-} &= \left\{\boldsymbol{\rho} \mid \boldsymbol{\rho} \in \Pi^{-}, \boldsymbol{\rho} \in \Sigma, \dot{\boldsymbol{\chi}}\dot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\chi}\ddot{\boldsymbol{\chi}}^{\mathrm{T}} \geqslant 0\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

这样的二维平面上每一点都可确定相空间中一点, 从而有效的降低了系统的维度. 以太阳—地球三体系统为例, 将 $L_1$ 附近 Lyapunov 轨道对应不稳定流形投影到近拱点平面, 可得到如图 3 中所示的一系列离散点. 图 3 中同时用虚线绘制了零速度曲线及近拱点边界, 可以清楚的看出近拱点的可行区域. 这些流形在近拱点庞加莱映射上的离散点对应着不同的逃逸机会, 通过计算这些点对应的逃逸速度增量, 可以选取出合适的逃逸流形. 同理, 也可以通过近拱点庞加莱映射选取合适的捕获流形.

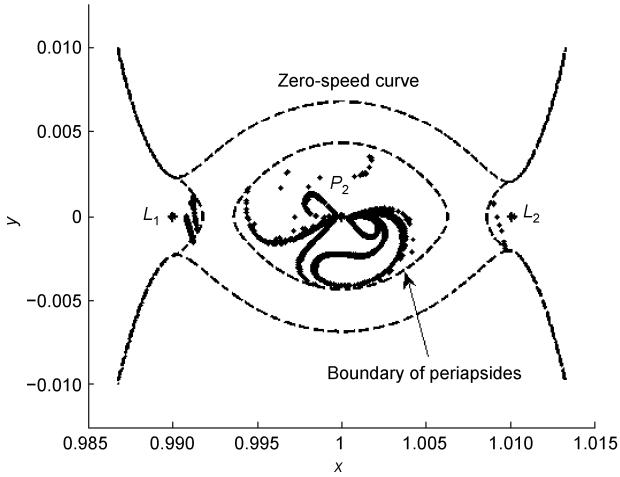


**图 3　不变流形近拱点示意图**

## 3　逃逸和捕获流形选取

上节给出了不变流形近拱点的计算方法, 可以看出近拱点分布非常广泛. 为选择出合适的逃逸及捕获流形, 需计算出由近拱点达到一定双曲超速所需速度增量. 本节针对这一问题, 通过双曲线逼近给出了一种简便的计算方法.

由于逃逸速度增量施加后探测器处于行星附近的时间很短, 利用双曲线近似逃逸点到影响球边界的轨道段引入误差不大, 同样, 该原理也适用于影响球边界到近拱点之间的捕获段轨道. 双曲线逃逸轨道如图 4 所示, 为使探测器由位置 $\boldsymbol{r}_1$ 逃逸达到双曲超速 $\boldsymbol{v}_\infty$, 需要在 $\boldsymbol{r}_1$ 处施加脉冲使探测器速度变为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ 由双曲超速 $\boldsymbol{v}_\infty$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 决定.

为得到双曲线轨道的参数, 定义速度坐标系如图 4 所示: 原点处于行星质心上, $t$ 轴指向双曲超速方向, 在轨道面内将 $t$ 轴顺时针旋转 90°得到 $s$ 轴. 令逃逸双曲线近拱点处的位置矢量和速度矢量分别为 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$, 双曲超速与 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 的夹角分别为 $\eta$ 和 $\alpha$, 取值范围均为 $[0, 2\pi]$, 则轨道能量和角动量可表示为

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\|\boldsymbol{v}_0\|^2}{2} - \frac{\mu_{\mathrm{P}}}{\|\boldsymbol{r}_0\|} \approx \frac{\|\boldsymbol{v}_\infty\|^2}{2}, \\ h &= \|\boldsymbol{r}_0\|\|\boldsymbol{v}_0\|, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\mu_{\mathrm{P}}$ 为行星的引力常数.

假设双曲线轨道的偏心率为 $e$, 则存在如下关系

$$e = -1/\cos\eta = \sqrt{1 + 2\xi h^2/\mu_{\mathrm{P}}^2}. \tag{13}$$

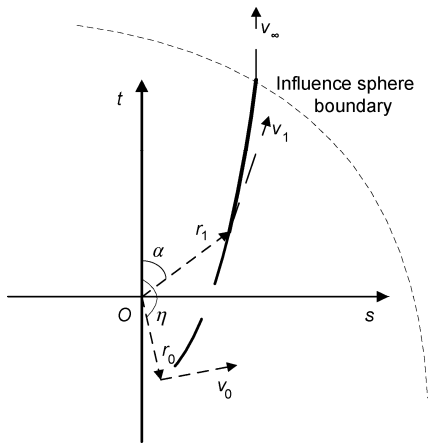


**图 4　双曲线逃逸轨道示意图**

由于 $\boldsymbol{r}_1$ 在双曲线轨道上对应的真近点角为 $f=\eta-\alpha$，则有

$$\|\boldsymbol{r}_1\|=\frac{\|\boldsymbol{r}_0\|(e+1)}{1+e\cos(\eta-\alpha)}. \tag{14}$$

求解(12)~(14)式构成的方程组即可得到 $\eta$ 和 $\|\boldsymbol{r}_0\|$. 该非线性方程组可通过牛顿迭代法求得，首先构建方程如下:

$$g=\|\boldsymbol{r}_1\|-\frac{\|\boldsymbol{r}_0\|(e+1)}{1+e\cos(\eta-\alpha)}=0. \tag{15}$$

将(12)和(13)式带入上式，可得

$$g=\|\boldsymbol{r}_1\|-\frac{\mu_{\mathrm{P}}\left(e^2-1\right)}{\|\boldsymbol{v}_\infty\|^2(1+e\cos f)}=0. \tag{16}$$

通过链式求导可得上述方程对 $\eta$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta}=\mu_{\mathrm{P}}\frac{\|\boldsymbol{v}_\infty\|^2\left(\cos f\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\eta}-e\sin f\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right)-2e\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\eta}}{\|\boldsymbol{v}_\infty\|^4(1+e\cos f)^2}, \tag{17}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}\eta}=\frac{\sin\eta}{\cos^2\eta}$，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=1$.

双曲线的偏心率大于 1，故 $\eta$ 的取值范围为 $(\pi/2,\pi)\cap(\pi,3\pi/2)$，其中 $(\pi/2,\pi)$ 对应顺行双曲线轨道，$(\pi,3\pi/2)$ 对应逆行双曲线轨道. 在相应范围内取 $\eta$ 的初值，并利用下式进行迭代可以得到满足精度的顺行或逆行轨道解. 当迭代的结果不在取值范围内时更改初值进行迭代直至满足条件.

$$\eta=\eta-\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\eta}\right)^{-1}g. \tag{18}$$

在一些点存在着角动量相反的两条双曲线满足上述方程，即在两个开区间内都存在对应的解. 其中与初始点角动量相反的双曲线需要较大的速度增量，故本文仅考虑与初始点角动量相同的双曲线.

得到 $\eta$ 后可通过下式求解速度 $\boldsymbol{v}_1$:

$$\boldsymbol{v}_1=\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{P}}}{a\left(e^2-1\right)}}\left[-(\sin f)\boldsymbol{p}+(\cos f+e)\boldsymbol{q}\right], \tag{19}$$

其中 $a=\frac{\mu}{\|\boldsymbol{v}_\infty\|^2}$，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 分别为双曲线近拱点处位置和速度方向单位矢量.

令 $\boldsymbol{r}_1$ 处初始的速度为 $\boldsymbol{v}_i$，则逃逸的速度增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_i. \tag{20}$$

利用上述方法可以计算得到不变流形近拱点逃逸所需的速度增量. 具体步骤如下: 首先将双曲超速，不变流形近拱点的位置和速度矢量转换至速度坐标系中; 然后利用牛顿迭代求解得到 $\eta$ 和速度脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}$; 最后将速度脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}$ 转换至旋转坐标系中. 得到所有近拱点的逃逸速度增量后，选取速度增量最小的近拱点即可确定最佳逃逸流形，同理可得到最佳捕获流形.

## 4　逃逸和捕获轨道分析

上文给出了周期轨道利用不变流形和行星引力辅助进行转移的轨道设计方法，但设计过程中没有考虑时间的消耗. 本节针对该转移方式，通过结合等高线图法和近拱点庞加莱映射，详细的分析逃逸和捕获轨道的性质，为轨道设计提供转移时间上的比较与参考.

由于近拱点庞加莱映射为位置平面，利用等高线图法在上面绘制逃逸或捕获速度增量的分布可以清晰的表示出哪些近拱点适合逃逸或捕获. 等高线图的绘制方法描述如下: 在选定区域上平均选取若干的位置节点，利用上节所给方法求解各节点逃逸或捕获所需的速度增量，将具有相同速度增量的点用等高线连接起来，则得到速度增量的等高线图.

结合逃逸或捕获的特点，本文仅考虑行星附近 $\|\boldsymbol{r}_2\|\leqslant r_{\max}$ 的区域. 另外，由不变流形的空间构型可以看出，与 $L_1$ 和 $L_2$ 点处周期轨道相连并接近 $P_2$ 的不变流形状态皆为顺行轨道，不变流形与近拱点庞加莱映射交点的角动量通常为正，故本文仅考虑顺行轨道近拱点庞加莱映射.

对于行星际转移轨道而言，通常双曲超速与行星速度方向相切或近乎相切，下面的分析主要针对双曲超速与行星速度相切的情况进行讨论.

为清楚表示流形逃逸或捕获的特点，定义 $x'oy'$ 坐标系: 原点 $o$ 位于行星质心，$x',y'$ 轴与 $x,y$ 轴指向

相同. 以地球向火星转移为例, 地球处双曲超速为 2.9447 km/s. 令 $r_{\max}=5\times10^5$ km, $C_x=3.00088$, 得到近拱点庞加莱映射上顺行逃逸区域, 并计算 $L_1$ 和 $L_2$ 处周期轨道相连不稳定流形的前五次庞加莱映射如图 5 和图 6 所示, 其中 $R_E$ 为地球的平均半径.

图中点表示不稳定流形在地球附近与近拱点庞加莱映射的交会点, 实线为速度增量的等高线, 虚线为半径为 $r_{\max}$ 的圆. 由图 5 和图 6 可以看出, 地球向火星的转移中, 地球处 $L_1$ 附近周期轨道的不稳定流形与近拱点庞加莱映射的第一次交会曲线在顺行逃逸的区域内, 在流形上消耗的时间较短, 同时存在的转移机会较多. 而 $L_2$ 处周期轨道的不变流形在数次经过近拱点平面后也存在着速度增量较小的机会, 但需要在流形上运行较长的时间.

考虑内行星到外行星的捕获情况, 得到稳定流形近拱点及顺行捕获区域如图 7 和图 8 所示. 可以看出, $L_2$ 处周期轨道的不变流形更快的到达易于捕获的区域, 同时捕获机会较多, $L_1$ 处周期轨道的不变流形在数次经过该近拱点平面后同样可寻找到低能量捕获点.

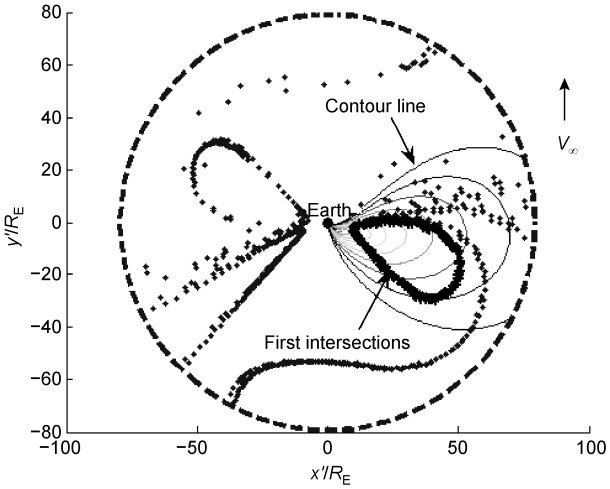


**图 5　地球 $L_1$ 不稳定流形在近拱点庞加莱映射上的局部投影**

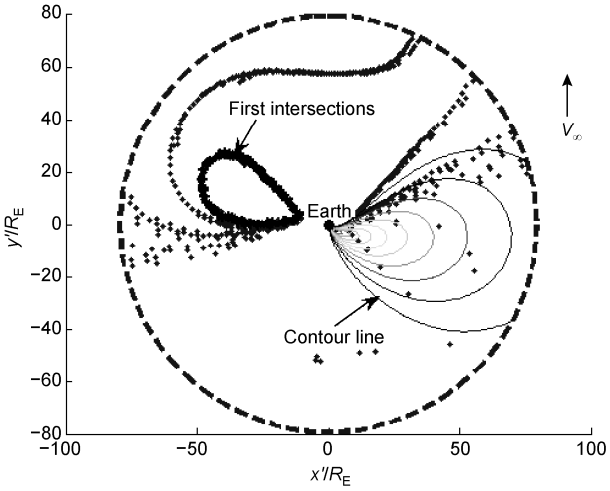


**图 6　地球 $L_2$ 不稳定流形在近拱点庞加莱映射上的局部投影**

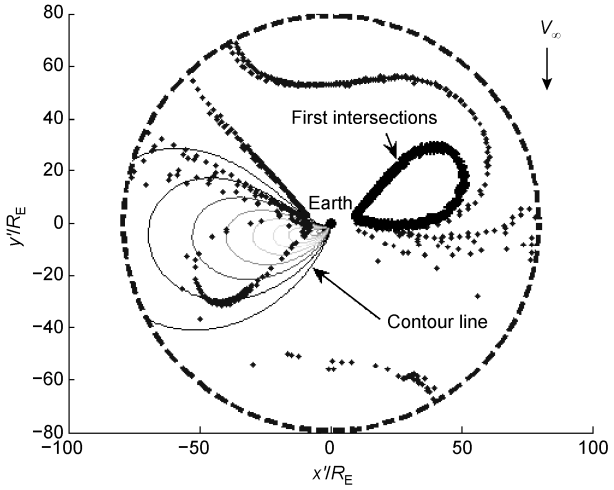


**图 7　地球 $L_1$ 稳定流形在近拱点庞加莱映射上的局部投影**

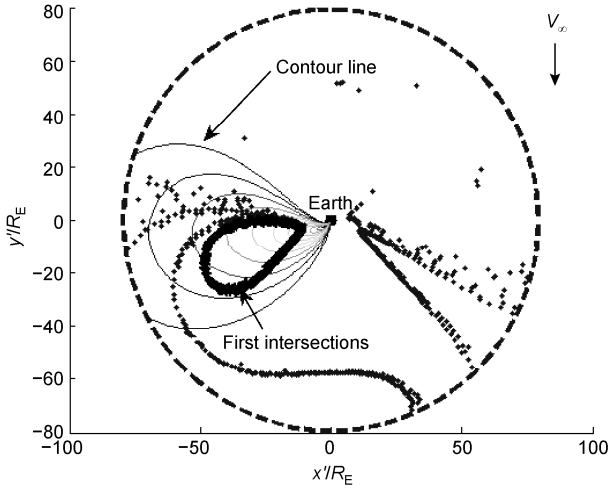


**图 8　地球 $L_2$ 稳定流形在近拱点庞加莱映射上的局部投影**

由于三体系统关于$x'$轴的对称性, 同一周期轨道的稳定流形与不稳定流形在近拱点庞加莱映射的投影关于 $x'$轴对称. 另外, 对同一方向双曲超速, 适合顺行逃逸区域与捕获区域关于 $s$ 轴对称. 在双曲超速与 $y'$轴平行时, 逃逸区域与捕获区域关于 $x'$轴对称. 由此可得, 由外行星向内行星逃逸时, 逃逸脉冲与 $y'$轴指向相反, $L_2$ 点处周期轨道的不稳定流形更易于逃逸; 外行星到内行星捕获时, $L_1$ 点处周期轨道的稳定流形更易于捕获.

综上所述, $L_1$ 点周期轨道不稳定流形适合于向外行星快速逃逸, $L_2$ 点周期轨道不稳定流形适合于向内行星快速逃逸, $L_2$ 点周期轨道稳定流形适合于快速捕获来自内行星的探测器, $L_1$ 点周期轨道稳定流形适合于快速捕获来自外行星的探测器. 对于任意两个不同系统间周期轨道的行星际转移, 可以直接利用本文方法进行设计, 也可以借用异宿连接首先进行周期轨道之间的转移, 之后利用本文研究方式进行快速的行星际转移, 从而达到节省转移时间的目的.

## 5　转移轨道优化

为实现转移轨道的优化设计, 本文建立圆型限制性三体受摄模型, 并在该模型下对逃逸近拱点至捕获近拱点间的轨道进行优化, 从而消耗轨道拼接以及双曲线逼近带来的误差.

平面圆型限制性三体受摄模型描述如下: 中心天体 $P_1$ 和逃逸星体 $P_2$ 围绕两者共同质心作圆周运动, 目标天体 $P_4$ (质量 $m_4$)不影响 $P_1$ 和逃逸星体 $P_2$ 的运动并在平面内环绕三体系统质心进行圆周运动, 则探测器 $P_3$ 的运动方程为

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{y}&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{(x_m-x)\mu_t}{\left((x_m-x)^2-(y_m-y)^2\right)^{3/2}},\\ \ddot{y}+2\dot{x}&=\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{(x_m-x)\mu_t}{\left((x_m-x)^2-(y_m-y)^2\right)^{3/2}},\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $\mu_t=m_4/(m_1+m_2)$, $x_m$, $y_m$ 为 $P_4$ 在三体坐标系中的位置, 令 0 时刻 $P_4$ 的位置矢量相对于 $x$ 轴的夹角为 $\theta$, $P_4$ 的轨道半径为 $r_m$, 则 $P_4$ 在三体坐标系中的位置计算如下:

$$\begin{bmatrix}x_m\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\-\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_m\cos(\theta+t/\sqrt{1/r_m^3})\\r_m\sin(\theta+t/\sqrt{1/r_m^3})\end{bmatrix},\tag{22}$$

其中 $t$ 表示距离初始时刻的时间.

在确定了逃逸流形以及捕获流形的基础上, 为确定捕获点的位置需要考虑交会时目标星体的位置. 由于目标星在圆轨道上运动, 通过交会时目标星所处的位置矢量与 $x$ 轴之间的夹角 $\varphi$ 可以确定捕获点的位置. 在确定逃逸点及捕获点在受摄三体系统中的状态后, 为完成转移轨道的设计, 仅需要求解逃逸点施加的脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}_e$, 捕获点施加的脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}_m$ 及飞行时间 $t$, 故该轨道设计问题可归结为求解如下参数:

$$\boldsymbol{X}=\{t,\varphi,\Delta\boldsymbol{v}_e,\Delta\boldsymbol{v}_m\}.\tag{23}$$

为保证转移能量最小, 将目标函数取为

$$J=\|\Delta v_e(\boldsymbol{X})\|+\|\Delta v_m(\boldsymbol{X})\|\to\min.\tag{24}$$

转移轨道的设计目的是保证探测器完成与捕获点的交会, 故 $\boldsymbol{X}$ 应满足的末端状态约束为

$$g=\boldsymbol{M}(t)\begin{bmatrix}x_e\\y_e\\\dot{x}_e+\Delta v_e^x\\\dot{y}_e+\Delta v_e^y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_m\\y_m\\\dot{x}_m-\Delta v_m^x\\\dot{y}_m-\Delta v_m^y\end{bmatrix}=0,\tag{25}$$

其中 $x_e,y_e,\dot{x}_e,\dot{y}_e$ 为逃逸点的状态, $x_m,y_m,\dot{x}_m,\dot{y}_m$ 为捕获点的状态, $\boldsymbol{M}(t)$ 为经过时间 $t$ 轨道状态相对于初始状态的状态转移矩阵.

可以看出, 在确定 $t,\varphi$ 时, 轨道设计转换为一两点边值问题. 故影响约束满足的参数为 $\Delta\boldsymbol{v}_e,\Delta\boldsymbol{v}_m$, 而影响最优性的参数为 $t,\varphi$. 下面通过利用约束求解 $\Delta\boldsymbol{v}_e,\Delta\boldsymbol{v}_m$ 将最优性与可行性分离从而简化该最优问题, 则优化参数为

$$\bar{\boldsymbol{X}}=\{t,\varphi\}.\tag{26}$$

利用约束求解脉冲的方法如下: 调整 $\Delta\boldsymbol{v}_e$ 使轨道满足如下约束

$$\begin{aligned}f_1&=x_m-x_a(\Delta\boldsymbol{v}_e)=0,\\f_2&=y_m-y_a(\Delta\boldsymbol{v}_e)=0,\end{aligned}\tag{27}$$

其中 $x_a, y_a$ 表示施加 $\Delta\boldsymbol{v}_e$ 后经过时间 $t$ 探测器到达的位置状态, 则制动脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}_m$ 的计算如下:

$$\Delta\boldsymbol{v}_m = [\dot{x}_m, \dot{y}_m] - [\dot{x}_a, \dot{y}_a]. \tag{28}$$

该约束方程组可通过微分修正进行求解, $\Delta\boldsymbol{v}_e$ 的初值 $\Delta\boldsymbol{v}_e^0$ 由二体拼接设计结果给出, 迭代方程如下:

$$\left(\Delta\boldsymbol{v}_e^{k+1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\Delta\boldsymbol{v}_e^{k}\right)^{\mathrm{T}} - \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1/\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{v}_e \\ \mathrm{d}f_2/\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{v}_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, k = 0, 1, \cdots. \tag{29}$$

迭代的停止条件为 $|f_1| < \sigma, |f_2| < \sigma$, $\sigma$ 为容许误差. 经过上述处理, 问题变为一个无约束的寻优问题, 且优化变量仅为两个, 通过单纯形算法可以快速求解由(24)和(26)式构成的最优问题.

为验证本文所提方法的有效性, 对横向幅值 $a_x = 1\times10^5$ km 的地球 $L_1$ 点 Lyapunov 轨道向 $a_x = 1\times10^5$ km 的火星 $L_2$ 点 Lyapunov 轨道进行设计, 设计结果如表 1 及图 9~11 所示. 图 10 和图 11 中的虚线表示转移轨道, 可以看出, 施加脉冲后的逃逸段和施加脉冲前的捕获段基本为双曲线轨道, 且双曲超速基本与 $y$ 轴平行. 另外, 逃逸脉冲与转移轨道基本相切, 同样捕获脉冲也与转移轨道基本相切.

由表 1 可以看出, 优化结果与初始设计结果相差不大, 且相比于直接借用流形进行转移, 借助了引力辅助的转移轨道可以有效的减少燃料消耗. 由图 11 可以看出, $L_1$ 点周围周期轨道的稳定流形上最优捕获点不在第一次近拱点, 这条流形上第一次近拱点同样处于适合捕获的区域, 但所需要的燃料消耗较大. 在实际任务设计过程中, 可以根据任务需求, 平衡转移时间与燃料消耗进行轨道设计.

为验证外行星向内行星的转移, 以地球-金星转移为例进行设计. 选取 $a_x = 2\times10^5$ km 地球 $L_2$ 点 Lyapunov 轨道和 $a_x = 8\times10^4$ km 金星 $L_1$ 点 Lyapunov 轨道, 得到的结果如表 2 和图 12 所示. 由图 12 可以看出, 地球-金星转移轨道不同于地球-火星转移轨道, 为一顺行轨道, 原因在于金星的角速度大于地

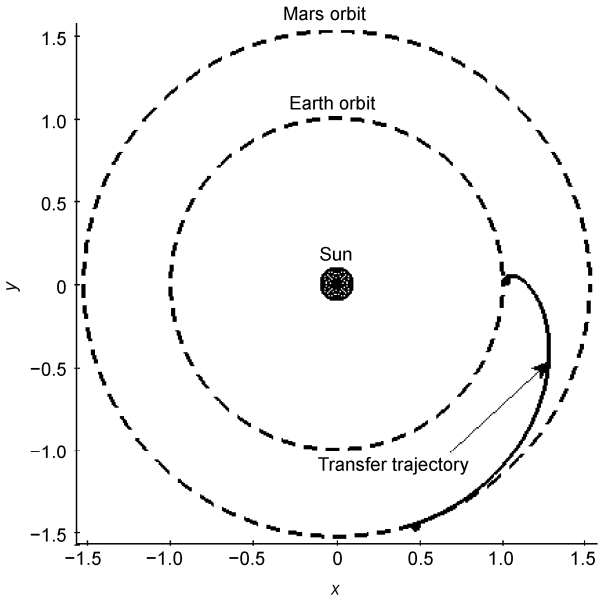


**图 9　太阳-地球旋转坐标系下地-火转移轨道示意图**

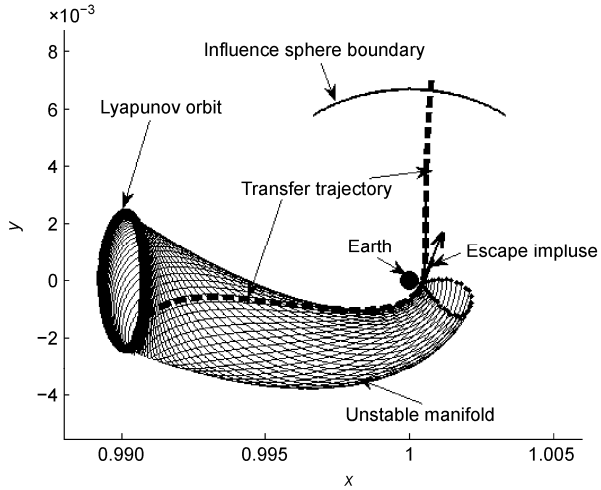


**图 10　地球-火星转移轨道逃逸部分示意图**

**表 1　地球-火星转移轨道设计结果**

| | Initial design result | Optimal result | Transfer employing manifold [12] |
|---|---|---|---|
| $\lVert\Delta\boldsymbol{v}_e\rVert$ (km/s) | 1.1926 | 1.1710 | 2.828 |
| $\lVert\Delta\boldsymbol{v}_m\rVert$ (km/s) | 1.4360 | 1.4237 | 2.455 |
| $t$ (d) | 258.8658 | 259.9585 | – |
| $\varphi$ (rad) | −1.3114 | −1.3087 | – |

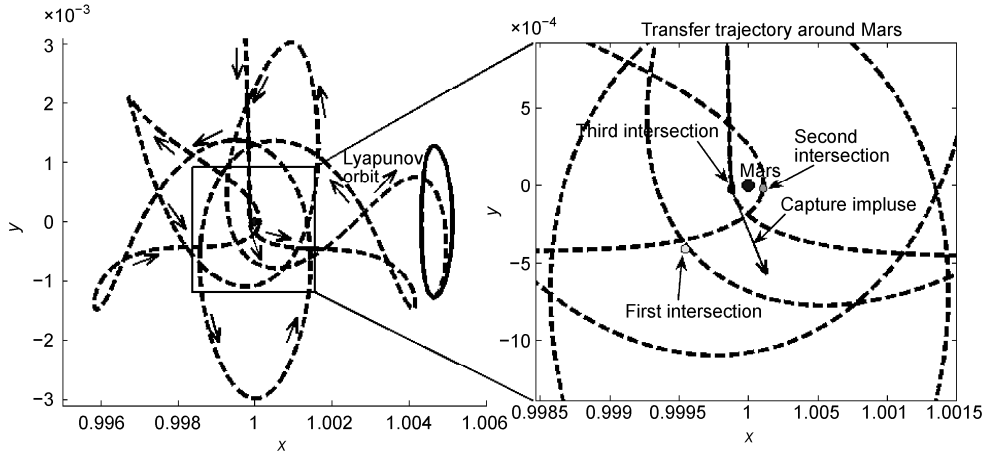


**图 11　地球-火星转移轨道捕获部分示意图**

**表 2　地球-金星转移轨道设计结果**

| | Initial design result | Optimal result |
|---|---|---|
| $\lVert\Delta \boldsymbol{v}_e\rVert$ (km/s) | 0.7847 | 0.7629 |
| $\lVert\Delta \boldsymbol{v}_m\rVert$ (km/s) | 0.9814 | 0.9448 |
| $t$ (d) | 140.0751 | 148.0267 |
| $\varphi$ (rad) | 0.6288 | 0.6297 |

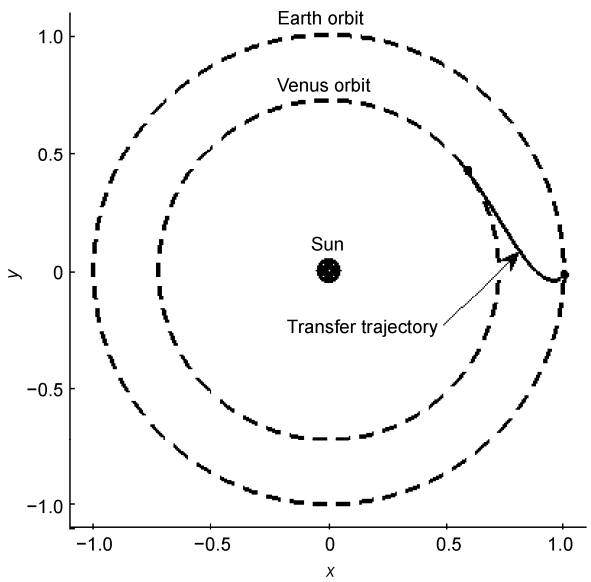


**图 12　太阳-地球旋转坐标系下地球-金星转移轨道示意图**

球, 故金星在地球旋转坐标系中为顺行, 而火星则为逆行. 由表 2 可知, 该文给出的初始设计结果可以给出一个良好的初值猜测, 优化结果与初值设计结果偏差不大.

## 6　结论

本文研究了不同太阳-行星三体系统周期轨道之间结合流形技术与引力辅助的转移方式, 结合近拱点庞加莱映射与双曲线逼近给出了一种新颖的分段轨道设计方法. 该方法通过引入近拱点庞加莱映射完整的描述了不变流形近拱点的分布, 并通过双曲线逼近得到近拱点处速度增量, 有效简化了流形逃逸点及捕获点的选取. 研究表明, 由于该方式通过流形达到了改变能量最有效的近拱点, 极大降低了转移过程中的能量消耗. 另外, 本文结合等高线法与庞加莱映射对该类型转移轨道的性质进行了分析. 结果表明, $L_1$ 点附近周期轨道更适于向外行星逃逸和捕获来自外行星的探测器, $L_2$ 点附近周期轨道更适于向内行星逃逸和捕获来自内行星的探测器. 同时由分析结果可得到如下结论, 针对一些固定周期轨道间的转移, 可利用异宿连接达到减少转移时间的目的.

## 参考文献

1　Farquhar R, Muhonen D, Richardson D. Mission design for a halo orbiter of the Earth. J Spacecraft Rockets, 1977, 14: 170–177

2　Dunham D, Farquhar R. Libration point missions, 1978–2002. In: Libration Point Orbits and Applications. Girona, Spain: World Scientific

Publishing Company, 2002. 45–73
3 Wilczak D, Zgliczynski P. Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three body problem–a computer assisted proof. Commun Math Phys, 2003, 234: 37–75
4 Gomez G, Masdemont J J. Some zero cost transfers between halo orbits. Adv Astron Sci, 2000, 105(2): 1199–1216
5 Howell K C, Hiday L A. Time-free transfers between libration point orbits in the elliptic restricted problem. Acta Astron, 1994, 32: 245–254
6 Davis K E, Anderson R L, Scheeres D J, et al. The use of invariant manifolds for transfers between unstable periodic orbits of different energies. Celest Mech Dyn Astr, 2010, 107: 471–485
7 Davis K E, Anderson R L, Scheeres D J, et al. Optimal transfers between unstable periodic orbits using invariant manifolds. Celest Mech Dyn Astr, 2011, 109(3): 241–264
8 Ross S D, Koon W S, Lo M W, et al. Design of a multi-moon orbiter. In: 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Ponce, Puerto Rico: AAS Publications Office, 2003
9 Ross S D, Koon W S, Lo M W, et al. Application of dynamical systems theory to a very low energy transfer. In: 14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting. Maui, Hawaii: AAS Publications Office, 2004
10 俞辉, 宝音贺西, 李俊峰. 双三体系统不变流形拼接成的低成本探月轨道. 宇航学报, 2007, 28(3): 637–642
11 龚胜平, 李俊峰, 宝音贺西, 等. 基于不变流形的登月轨道设计. 应用数学和力学, 2007, 28(2): 183–190
12 Alonso G P. The design of system-to-system transfer arcs using invariant manifolds in the multi-body problem. Dissertation of Doctoral Degree. Indiana, USA: Purdue University, 2006
13 Pergola P, Geurts K, Casaregola C, et al. Earth-Mars Halo to Halo low thrust manifold transfers. Celest Mech Dyn Astr, 2009, 105: 19–32
14 Nakamiya M, Yamakawa H. Earth escape trajectories starting from l2 point. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Keystone, Colorado: AIAA, 2006
15 Nakamiya M, Scheeres D J, Yamakawa H, et al. Analysis of capture trajectories to libration points. J Guid Contr Dynam, 2008, 31(5): 1344–1369
16 Nakamiya M, Yamakawa H, Scheeres D J, et al. Interplanetary transfers between halo orbits: connectivity between escape and capture trajectories. J Guid Contr Dynam, 2010, 33(3): 803–813
17 Haapala A F. Trajectory design using periapse maps and invariant manifolds. Dissertation of Masteral Degree. Indiana, USA: Purdue University, 2010