

# 风沙两相流中的跃移运动 \* \*\*

朱久江<sup>①②</sup> 匡震邦<sup>③</sup> 邹学勇<sup>②</sup> 刘玉章<sup>③</sup>

①中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室, 北京 100080;

②中国科学院沙漠研究所风沙物理与沙漠环境实验室, 兰州 730000;

③上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

**摘要** 从单个跃移沙粒在气流中的运动方程出发, 导出了风沙两相流中沙粒相速度分布函数的 Boltzmann 方程; 并以此将单相颗粒流理论中的广义平衡方程推广到气固两相流的情形. 提出用 Grad 方法将粒子相速度分布函数展成无穷级数, 并引入 Gauss 分布取代单相颗粒流理论中传统的 Maxwell 分布. 在保留到 3 次项的情况下, 建立了气体-颗粒两相湍流边界层三阶矩封闭理论的动力学方程组. 并在风洞频闪摄影实验的基础上, 对理论进行简化, 得到便于工程应用的简化方程.

**关键词** 风沙两相流 速度分布函数 广义平衡方程 三阶矩封闭理论

风沙流是发生在边界层中的两相湍流流动, Bagnold<sup>[1]</sup> 将风沙流运动分为悬移、跃移和蠕移 3 种基本形式, 其中跃移运动粒子是沙量传输的主要运动形式, 也是对工农业生产产生巨大危害的一种运动形式. 长期以来, 关于风沙运动的理论基本上是经验或半经验的. Owen<sup>[2]</sup> 通过单一形状轨道假定, 揭示了粒子对风速的反作用是不可忽视的, 必须采用双向耦合的模型. 为了克服单一轨道假定的缺点, 同时又能考虑沙粒的群体特性与风速的相互作用, 人们将注意力更多的集中到沙粒的起跃速度分布上, 如文献[3~6]. Anderson 等<sup>[7]</sup> 对这种方法进行了综述. 从风沙物理学的学科发展角度看, 非常需要将微观研究与宏观研究结合起来, 在微观与宏观之间架起一座桥梁. 建立风沙两相流的双流体流动模型. 本文建立了气体-颗粒两相流的完整的三阶矩封闭理论, 并在实验的基础上得到可应用于工程的简化方程.

## 1 颗粒相的速度分布函数和广义平衡方程

人们经过长期研究之后发现<sup>[8]</sup>, 在风沙流中, 跃移层与地表蠕移层不断发生质量、动量和能量的交换, 沙粒在地表发生的碰撞过程, 使得风沙流具有颗粒流的基本特征, 即每颗沙粒的运动完全是随机的, 无序的. 根据风沙流特点对跃移运动作如下假定: ①. 粒子都有相同的粒径和质量. ②. 在一个微小的代表性体积元内, 跃移层内粒子是随机分布的, 即粒子的宏观运动状态可以用粒子相速度分布函数加以描述. ③. 粒子相的转动效应可以略去不计.

1997-04-02 收稿, 1997-11-18 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 49301002; 19672022)

\*\* 本文的初始工作是在西安交通大学完成的

④. 粒子对气流脉动不产生响应, 气流对粒子的阻尼, 只取决于粒子相对于气流的时均流速. 因为本文只限于研究粒子的跃移运动, 此时 Rouse 数:  $Ro = \tau_v g / (\kappa u^*) \gg 1$ , 在这种情况下, 粒子通过气流时, 来不及对高频的气流脉动产生影响, 于是随机力的作用可略去不计.

设气流的密度为  $\rho_a$ , 粘性系数为  $\mu_a$ , 运动速度为  $\mathbf{u}$ , 若  $t$  时刻处于空间点  $r$  [其空间坐标为  $(x, y, z)$ ] 处, 有一直径为  $D$  的球形粒子, 其质量密度为  $\rho_p$ , 运动速度为  $\mathbf{v}$ , 作用于该粒子上的作用力为  $F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ . 于是在重力场中, 它的运动方程可表示为:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_D + m\mathbf{g}, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{F}_D = m\beta(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad m = \pi D^3 \rho_p / 6, \quad (2)$$

$$\beta = f_D(Re) / \tau_v, \quad \tau_v = \rho_p D^2 / 18\mu_a. \quad (3)$$

根据 Rudinger<sup>[9]</sup>,  $f_D$  可近似表示为:  $f_D(Re) \approx 1 + Re^{2/3} / 6$ , 其中:  $Re = \rho_a D |\mathbf{u} - \mathbf{v}| / \mu_a = D |\mathbf{u} - \mathbf{v}| / \nu$  为粒子运动 Reynold 数. 于是  $\beta$  可近似表示为:

$$\begin{cases} \beta = [\beta_0 + \beta_1 |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^{2/3}], \\ \beta_0 = 18\mu_a / (\rho_p D^2), \quad \beta_1 = 3\rho_a \nu^{1/3} / (\rho_p D^{4/3}), \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\tau_v$  为粒子运动的速度松弛时间. 我们并不打算跟踪每个粒子, 我们只关心粒子的群体运动特性, 为此引入速度分布函数  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ . 设  $t$  时刻, 位于空间点  $\mathbf{r}$  处的体积元  $d\Omega_r (= dx dy dz)$  内运动速度介于  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  之间的粒子数为  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\Omega_r d\Omega_v$  (其中  $d\Omega_v = dv_x dv_y dv_z$ ), 则颗粒相速度分布函数的 Boltzmann 方程为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{m} f \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = \mathcal{L}f, \quad (5)$$

式中“ $\cdot$ ”为点积,  $(\partial / \partial \mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}$  是由间隙流体的粘性阻尼引起的.  $\mathcal{L}f$  表示某空间固定点处因粒子间的相互碰撞而引起的速度分布函数  $f$  的变化率. 由于在跃移层内粒子的平均自由程比粒径大一个数量级以上, 因此可以略去碰撞效应<sup>[10-11]</sup>, 在以后的讨论中略去此项.

设在  $t$  时刻位于空间点  $\mathbf{r}$  处的单位体积内所包含的粒子个数为  $n(\mathbf{r}, t)$ , 则  $n$  称之为粒子相的数密度, 由定义我们有

$$n = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\Omega_v = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) dv_x dv_y dv_z, \quad (6)$$

其中的积分遍及整个速度空间. 对于任意粒子属性  $\psi = \psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  (可以是标量, 矢量或张量), 定义它对应的宏观量为平均值:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\Omega_v, \quad (7)$$

特别地当  $\psi = \mathbf{v}$  时,  $\bar{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle$ , 则  $\bar{\mathbf{v}}$  为粒子相的平均速度. 令  $\mathbf{C} = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ , 则  $\mathbf{C}$  称之为粒子相的脉动速度, 或

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{C}. \quad (8)$$

由(8)式可将任意粒子属性  $\psi$  表示为脉动速度  $\mathbf{C}$  的函数, 于是(7)式又可改写为:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) d\Omega_C. \quad (9)$$

从(5)式出发, 我们可以证明(见附录 A)风沙两相流中颗粒相的粒子属性变化率方程或广

义平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \psi \rangle + \Delta \cdot \langle n v \psi \rangle = n \langle \mathcal{D} \psi \rangle, \quad (10)$$

$$\mathcal{D} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}}. \quad (11)$$

取  $\psi = m$ , 则  $\mathcal{D} \psi = 0$ , 由(10)式得:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \Delta \cdot \bar{v} = 0; \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12)$$

上述诸方程中的微观基本变量为  $(v, \mathbf{r}, t)$ , 但用  $(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  作微观基本变量更方便, 即:

$$\psi(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \psi(\bar{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{C}, \mathbf{r}, t). \quad (13)$$

因此, 保持  $v$  不变和保持  $\mathbf{C}$  不变时的  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  和  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}$  是不同的, 它们之间的关系可由(13)式

导出. 我们约定, 今后如不作特殊说明,  $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$  都为保持  $\mathbf{C}$  不变. 由(11)式可得

$$\mathcal{D} \psi = \frac{D\psi}{Dt} + \left[ \frac{1}{m} \mathbf{F} - \frac{D\bar{v}}{Dt} \right] \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{C} \cdot \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{r}} \right], \quad (14)$$

于是粒子属性变化率方程(10)用脉动速度  $\mathbf{C}$  表示时为

$$\rho \frac{D\langle \psi \rangle}{Dt} + \Delta \cdot \langle \rho \mathbf{C} \psi \rangle = \rho \langle \mathcal{D} \psi \rangle, \quad (15)$$

其中  $\mathcal{D} \psi$  由(14)式给出. 把  $\psi = \mathbf{C}$  代入(15)式, 得粒子相的动量平衡方程为

$$\begin{cases} \rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\Delta \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}, \\ \mathbf{P} = \langle \rho \mathbf{C} \mathbf{C} \rangle, \mathbf{b} = n \langle \mathbf{F} \rangle = \int \mathbf{F} f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) d\Omega_{\mathbf{C}} \end{cases} \quad (16)$$

对于  $\psi = \psi(\mathbf{C})$  的情形(即  $\psi$  不是  $\mathbf{r}$  和  $t$  的函数), 利用(16)式又可将广义平衡方程简化为

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\langle \psi \rangle}{Dt} &= \Delta \cdot \mathbf{P} \cdot \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right\rangle - \Delta \cdot \langle \rho \mathbf{C} \psi \rangle - \rho \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right\rangle \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{r}} + \\ &\frac{\rho}{m} \left[ \left\langle \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right\rangle - \langle \mathbf{F} \rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

## 2 气体-颗粒两相流的三阶矩封闭理论及其在二维定常情况下的简化

定义  $N$  阶矩为

$$M_{i_1 i_2 \dots i_N} = \langle C_{i_1} C_{i_2} \dots C_{i_N} \rangle, \quad (18)$$

取  $\psi = C_k C_l$ , 并代入(17)式可得二阶矩平衡方程为

$$\rho \frac{DM_{kl}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho M_{ikl}) + 2P_{i(1} \frac{\partial \bar{v}_{k)}}{\partial r_i} = 2 \frac{\rho}{m} \langle F_{(k} C_l \rangle, \quad (19)$$

取  $\psi = C_k C_l C_m$ , 将  $\psi$  代入(17)式, 可得三阶矩平衡方程

$$\begin{aligned} \rho \frac{DM_{klm}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho M_{iklm}) + \rho \left[ M_{ilm} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial r_i} + M_{ikm} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial r_i} + M_{ikl} \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial r_i} \right] = \\ \frac{\partial P_{ik}}{\partial r_i} M_{lm} + \frac{\partial P_{il}}{\partial r_i} M_{km} + \frac{\partial P_{im}}{\partial r_i} M_{kl} + \frac{\rho}{m} (\langle F_k C_l C_m \rangle + \end{aligned}$$

$$\langle F_l C_k C_m \rangle + \langle F_m C_k C_l \rangle - \langle F_k \rangle M_{lm} - \langle F_l \rangle M_{km} - \langle F_m \rangle M_{kl}. \quad (20)$$

注意到在三阶矩的平衡方程中, 相应的扩散项涉及四阶矩. 同样在  $N$  阶矩平衡方程中, 相应的扩散项涉及  $N+1$  阶矩, 因此和湍流理论一样, 在实际应用中必须作某种截断处理才能得到所需要的封闭方程. 在颗粒流理论中传统的处理方式: 模仿 Grad<sup>[12]</sup> 处理稀薄气体的手段将分布函数在 Maxwell 分布附近展成无穷级数<sup>[10]</sup>, 但在风沙流边界中, 由于三个方向运动特性的差异, 使得颗粒相的速度分布函数是强各向异性的, 这已为风洞频闪摄影实验所证实. 为此我们尝试引进分布函数  $f_0$ , 设它服从如下的 Gauss 分布而不是气体分子运动论中的 Maxwell 分布. 令:

$$f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \frac{n}{[2\pi]^{3/2} [\det \mathbf{M}]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C}^T\right\}, \quad (21)$$

其中  $\mathbf{M}$  为三维的二阶对称张量, 其分量为由(18)式所定义的二阶矩,  $\det \mathbf{M}$  为矩阵  $\mathbf{M}$  的行列式,  $\mathbf{M}^{-1}$  为  $\mathbf{M}$  的逆. 对于任意粒子属性  $\psi(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  定义如下的平均值:

$$\langle \psi \rangle^0 = \frac{1}{n} \int \psi(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) d\Omega_c, \quad (22)$$

定义  $f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  的特征函数  $\varphi(\eta, \mathbf{r}, t)$  为

$$\varphi(\eta, \mathbf{r}, t) = \langle \exp(\sqrt{-1} \eta \cdot \mathbf{C}) \rangle^0 = \exp\left\{-\frac{1}{2} \eta \mathbf{M} \eta^T\right\}, \quad (23)$$

利用公式  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots$  和特征函数的基本性质容易验证

$$\langle C_i C_{i_2} \dots C_{i_N} \rangle^0 = 0, \quad \text{当 } N \text{ 为奇数时}, \quad (24)$$

$$\langle C_k C_l \rangle^0 = M_{kl}. \quad (25)$$

应用 Grad 方法, 设速度分布函数  $f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  为在  $f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  附近展成的无穷级数

$$f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \left[ 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{P!} \frac{\partial^p}{\partial C_{i_1} \partial C_{i_2} \dots \partial C_{i_p}} \right] f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t). \quad (26)$$

于是对于任意粒子属性  $\psi(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  有

$$\langle \psi \rangle = \langle \psi \rangle^0 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{P!} \frac{\mathcal{P} \psi}{\langle \partial C_{i_1} \partial C_{i_2} \dots \partial C_{i_p} \rangle}^0. \quad (27)$$

由(24)~(26)式以及粒子数密度  $n$ , 平均速度  $\bar{v}$ , 二阶矩  $M_{kl}$  的定义可得:  $a_i = 0$ ,  $a_{ij} = 0$ , 因此(26)式又可改写为

$$f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \left[ 1 + \sum_{p=3}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{P!} \frac{\partial^p}{\partial C_{i_1} \partial C_{i_2} \dots \partial C_{i_p}} \right] f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t). \quad (28)$$

所以在只考虑到二阶矩(即在上式中当  $P \geq 3$  时, 令  $a_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ )时,  $f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$ , 这也是在(21)式构造  $f_0$  时所预先考虑到的. 由三阶矩的定义和(27)式又可得

$$M_{lmn} = \langle C_l C_m C_n \rangle = \langle C_l C_m C_n \rangle^0 + \frac{a_{ijk}}{3!} \frac{\mathcal{P} (C_l C_m C_n)}{\langle \partial C_i \partial C_j \partial C_k \rangle}^0.$$

利用(24)式可得:  $M_{lmn} = a_{lmn}$ , 所以

$$f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \left[ 1 - \frac{M_{ijk}}{3!} \frac{\mathcal{P}}{\partial C_i \partial C_j \partial C_k} + \sum_{p=4}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_{i_1 i_2 \dots i_p}}{P!} \frac{\partial^p}{\partial C_{i_1} \partial C_{i_2} \dots \partial C_{i_p}} \right] f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t). \quad (29)$$

由四阶矩的定义和(27)式, 又可得

$$M_{lmnp} = \langle C_l C_m C_n C_p \rangle^0 + a_{lmnp} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \eta_k \partial \eta_l \partial \eta_m \partial \eta_n} \Big|_{\eta=0} + a_{lmnp}. \quad (30)$$

将(23)式展开到 4 次项, 代入上式可得

$$M_{klmn} = M_{kl}M_{mn} + M_{km}M_{ln} + M_{kn}M_{lm} + a_{lmnp}. \quad (31)$$

利用(31)式可将(20)式改写为

$$\begin{aligned} \rho \frac{DM_{klm}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho a_{iklm}) + P_{ik} \frac{\partial M_{lm}}{\partial r_i} + P_{il} \frac{\partial M_{km}}{\partial r_i} + P_{im} \frac{\partial M_{kl}}{\partial r_i} + \rho \left[ M_{ilm} \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial r_i} + \right. \\ \left. M_{ikm} \frac{\partial \bar{v}_l}{\partial r_i} + M_{ikl} \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial r_i} \right] = \frac{\rho}{m} (\langle F_k C_l C_m \rangle + \langle F_l C_k C_m \rangle + \langle F_m C_k C_l \rangle - \\ \langle F_k \rangle M_{lm} - \langle F_l \rangle M_{km} - \langle F_m \rangle M_{kl}). \end{aligned} \quad (32)$$

作为三阶矩封闭理论我们假定粒子相的系统状态参数为:  $n, \bar{v}_i, M_{ij}, M_{ijk}$ . 粒子相的任意宏观量都可以表示为粒子相的系统状态参数的函数, 即假定在(28)式中 4 次项以上的系数  $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$  都可以用粒子相的系统状态参数来模拟. 和湍流理论一样, 一般说来对高次项的系数应根据实验经验加以模拟. 在缺乏实验经验的情况下, 可以模仿 Jenkins 和 Richman<sup>[10]</sup> 截断到 3 次项, 即当  $P \geq 4$  时, 令  $a_{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ . 本文中以下只考虑这种情况. 于是(12)、(16)、(19)、(32)式再加上气体的运动方程就构成了完整的三阶矩理论封闭方程组.

对于充分发展的二维定常边界层问题, 假定: ①  $v_z = 0$  和 ② 一切宏观量都只是  $y$  的函数, 与时间  $t$  以及  $x, z$  无关. 即  $f(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t)$  只是  $y$  的函数, 因而又可称为广义一维定常问题. 由

假定 ① 知, 此时质量守恒方程(12)简化为:  $\frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{v}_y) = 0$ , 由此可得  $\rho \bar{v}_y = \text{const}$ , 又因  $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\rho \bar{v}_y) = 0$ , 从而  $\rho \bar{v}_y = 0$ , 所以  $\bar{v}_y = 0$ , 即在充分发展的定常问题中粒子相的平均速度, 只有

$x$  方向的分量且不随  $x$  变化, 记为  $\bar{v}(y)$ . 在此情形下我们又可得: 任意宏观量经算子  $\frac{D}{Dt} =$

$\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial r_i}$  作用后恒为零. 同理气相速度只有  $x$  方向的分量  $u(y)$ . 如前所述, 我们假定粒子的

运动不会影响气相的湍流结构, 因此单相湍流边界层中的 Prandtl 混合长度理论仍然成立, 粒子对气流的作用可简单地简化为气流对粒子阻力的反作用力. 设气相的切应力为  $\tau_a$ , 粒子相的切应力为  $\tau_s$ , 则气固混合物沿  $x$  方向的动量方程简化为

$$\partial(\tau_a + \tau_s) / \partial y = 0 \quad \text{或} \quad \tau_a + \tau_s = \tau_0, \quad (33)$$

其中  $\tau_0$  为常数, 是边界层中总的切应力,  $\tau_s = -\rho M_{12}$ , 由 Prandtl 混合长度假定可得  $\tau_a = \rho_a (\kappa y du/dy)^2$ , 于是气相的运动方程为

$$\rho_a (\kappa y du/dy)^2 = \tau_0 + \rho M_{12}, \quad (34)$$

其中  $\kappa$  为 Karman 常数. 由假定 ② 知: 在颗粒相的各阶矩中, 其下标含有 3 的量都退化为零. 于是在充分发展的二维定常边界层中, 三阶矩封闭理论的基本未知量为

$$u, \rho, \bar{v}, M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{111}, M_{122}, M_{112}, M_{222}.$$

(21)式退化为

$$f_0(\mathbf{C}, \mathbf{r}, t) = \frac{n}{2\pi \sqrt{M_{11}M_{22} - M_{12}^2}}.$$

$$\exp\left\{-\frac{M_{11}M_{22}}{(M_{11}M_{22}-M_{12}^2)}\left[\frac{C_1^2}{M_{11}}-\frac{2M_{12}C_1C_2}{M_{11}M_{22}}+\frac{C_2^2}{M_{22}}\right]\right\}, \quad (35)$$

于是可将三阶矩封闭理论的基本方程组简化为

$$\left\{\begin{aligned} \rho_a \left( \kappa y \frac{du}{dy} \right)^2 &= \tau_0 + \rho M_{12}, \\ \frac{d}{dy}(\rho M_{12}) &= \rho [ \langle \beta \rangle (u - \bar{v}) - \langle \beta C_1 \rangle ], \\ \frac{d}{dy}(\rho M_{22}) &= -\rho g - \rho \langle \beta C_2 \rangle, \\ \frac{d}{dy}(\rho M_{222}) &= -2\rho \langle \beta C_2 C_2 \rangle, \\ \frac{d}{dy}(\rho M_{112}) + 2\rho M_{12} \frac{d\bar{v}}{dy} &= 2\rho [ \langle \beta C_1 \rangle (u - \bar{v}) - \langle \beta C_1 C_1 \rangle ], \\ \frac{d}{dy}(\rho M_{122}) + \rho M_{22} \frac{d\bar{v}}{dy} &= \rho [ \langle \beta C_2 \rangle (u - \bar{v}) - 2\langle \beta C_1 C_2 \rangle ], \\ M_{12} \frac{dM_{11}}{dy} + M_{111} \frac{d\bar{v}}{dy} &= [ (\langle \beta C_1 C_1 \rangle - \langle \beta \rangle M_{11})(u - \bar{v}) + \\ &\quad \langle \beta C_1 \rangle M_{11} - \langle \beta C_1 C_1 C_1 \rangle ], \\ M_{12} \frac{dM_{22}}{dy} + 2M_{22} \frac{dM_{12}}{dy} + M_{222} \frac{d\bar{v}}{dy} &= \\ &\quad [ (\langle \beta C_2 C_2 \rangle - \langle \beta \rangle M_{22})(u - \bar{v}) + \langle \beta C_1 \rangle M_{22} + \\ &\quad 2\langle \beta C_2 \rangle M_{12} - 3\langle \beta C_1 C_2 C_2 \rangle ], \\ M_{22} \frac{dM_{11}}{dy} + 2M_{12} \frac{dM_{12}}{dy} + 2M_{122} \frac{d\bar{v}}{dy} &= \\ &\quad [ 2(\langle \beta C_1 C_2 \rangle - \langle \beta \rangle M_{12})(u - \bar{v}) + \langle \beta C_2 \rangle M_{11} + \\ &\quad 2\langle \beta C_1 \rangle M_{12} - 3\langle \beta C_1 C_1 C_2 \rangle ], \\ M_{22} \frac{dM_{22}}{dy} &= [ \langle \beta C_2 \rangle M_{22} - \langle \beta C_2 C_2 C_2 \rangle ], \end{aligned} \right. \quad (36)$$

其中的  $\beta$  由(4)式确定. 在方程组(36)中含  $\langle \dots \rangle$  的项用(29)式计算.

### 3 实用简化方程

我们在吹气式直风洞中进行了风沙两相湍流边界层运动的实验研究(由于篇幅关系, 本文略去). 将实验结果在 0.04m 以内求平均值可得在本文实验条件下:

$$\begin{cases} M_{11} = 1.772\text{m}^2/\text{s}^2, & M_{12} = -0.472\text{m}^2/\text{s}^2, \\ M_{22} = 0.179\text{m}^2/\text{s}^2. \end{cases} \quad (37)$$

实验结果还表明  $M_{222}$  比  $M_{22}$  小一个数量级以上. 三阶矩的结果比较分散, 我们的实验得不到满意的结果, 因而只能作出适当的估计. 粒子的密度可以用粒子质量流量  $q$  和粒子相平均速度  $\bar{v}$  来计算  $\rho = q/\bar{v}$ , 实验结果表明, 粒子相密度  $\rho$  的值沿高度  $y$  大约呈现负指数衰减, 可近似表示为

$$\rho = \exp\{-54.75y\}, \quad (38)$$

其中  $\rho$  的单位为  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $y$  的单位为  $\text{cm}$ . 实测得到的密度值与拟合曲线的对比如图 1 所示; 这一结论在现有文献中也有报道, 如吴正<sup>[13]</sup>, Nalpanis 等<sup>[3]</sup>.

由第 2 节知, 在二维充分发展的气体-颗粒两相湍流边界层中, 三阶矩封闭理论的动力学基本方程组由(36)式给出. 在一般情况下所有方程都是耦合的. 另一方面就作者目前的实验条件而言, 实验精度无法保证准确测量三阶矩的值. 这些都给方程组的求解带来了困难. 为此我们可以根据上面指出的实验数据的数量级对(36)式作进一步的简化, 得到如下的近似解(细节略去):

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 e^{-\frac{gy}{M_{22}}}, & M_{222} = 0, & M_{22} = \text{const}, \\ M_{12} = \text{const}, & M_{11} = \text{const}, \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} \rho_a \left[ \kappa y \frac{du}{dy} \right] = \tau_0 + \rho_0 M_{12} e^{-\frac{gy}{M_{22}}}, \\ -\frac{gM_{12}}{M_{22}} = \beta_0(u - \bar{v}) + \beta_1(u - \bar{v})^{5/3} + \frac{2}{3}\beta_1(u - \bar{v})^{-1/3} M_{11}. \end{cases} \quad (40)$$

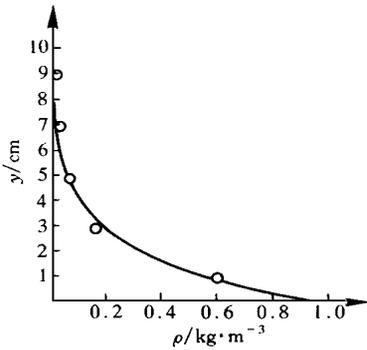


图 1 粒子相密度及其拟合曲线

(39)式中的密度分布和(38)式吻合. 由(40)式可以确定  $u$ ,  $\bar{v}$  的值. 求解方程组(40)还需要两个边界条件: (1)  $y = 0$  处粒子切应力的值, (2)  $y = D$  处的风速值. 关于第 1 个边界条件, 虽然我们可由实验来确定  $M_{12}$  的值, 但用实验精确测定  $y = 0$  处的密度值仍然非常困难. 这里我们仍引用 Owen 假定<sup>[2]</sup>: 即假定  $y = 0$  处气相切应力等于临界状态的气相切应力:  $\tau_a = \rho_a u_{*t}^2$ . 由  $\tau_0 = \rho_a u_{*t}^2$ , 可得

$$\tau_{s0} = \rho_0 M_{12} = -\rho_a |M_{12}| = -\rho_a \left[ u_{*t}^2 - u_{*t}^2 \right]. \quad (41)$$

将(41)式代入(40)式的第一个方程, 并注意到  $\tau_0 = \rho_a u_{*t}^2$ , 可得

$$\frac{du}{dy} = \frac{u^*}{\kappa y} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{u_{*t}^2}{u^{*2}} \right) e^{-\frac{gy}{M_{22}}} \right]^{1/2}. \quad (42)$$

假定第 2 个边界条件为

$$\text{当 } y = D \text{ 时, } u = Bu^*, \quad (43)$$

其中的系数  $B$  应由实验确定. 对于本文而言实验结果为  $B$  略大于 8.5, 可近似取为 8.5. 由(42)、(43)式可得:

$$u = \frac{u^*}{\kappa} \int_D^y \left[ 1 - \left( 1 - \frac{u_{*t}^2}{u^{*2}} \right) e^{-\frac{gy_1}{M_{22}}} \right]^{1/2} \frac{dy_1}{y_1} + Bu^*. \quad (44)$$

将各有关参数代入(44)式后进行数值积分便可求得理论风速剖面. 如图 2 所示, 计算结果表明, 在 0.02m 以上, 理论值与实验拟合曲线几乎完全重合. 由于风速的实验曲线是按对数曲线拟合的. 这表明在 0.02m 以上, 粒子切应力很小, 气相切应力可近似为常数, 从而风速仍呈现出对数分布. 而在 0.02m 以下, 随着高度的减小, 粒子切应力急剧增大, 气相切应力不再为常数, 从而风速偏离对数分布, 因此实验拟合曲线在 0.02m 以下必然偏离实际风速值. 从图 2

可知实验拟合曲线上的风速值小于理论计算的风速值。由图 2 我们还可以看出, 由于粒子切应力的存在, 导致了边界层粗糙度的增大, 即存在两种不同情况的边界层, 一个是起沙了的气固两相流边界层, 另一个是沙粒被固定于地表的单相流边界层。设两者的总切应力相等, 则在相同的高度上, 前者的风速值小于后者的风速值。图 2 中最右边的一条曲线为  $u = \frac{u_*}{\kappa} \ln(y/y_0)$  其中  $y_0 = D/30$  相当于沙粒被固在地表面上的边界,  $u_*$  为由实测值回归出的摩阻流速。最左边的一条曲线为实验拟合曲线, 中间为理论曲线。按本节的简化模型我们得到 3 个二阶矩都是常数, 粒子相的密度随着高度增大按负指数衰减, 从而粒子相的切应力也随着高度的增大而成负指数衰减。

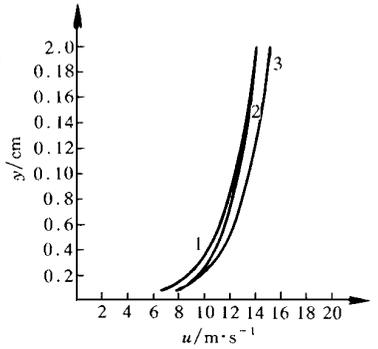


图 2 理论风速曲线  
1 为实验拟合曲线, 2 为理论曲线, 3 为沙被固定时的相应曲线

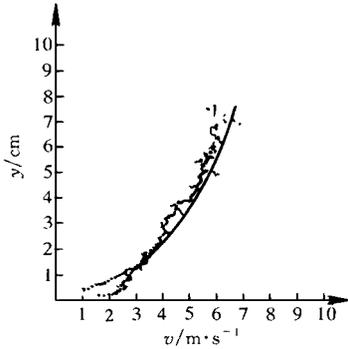


图 3 理论粒子相平均速度

$$\tau_s = \tau_{s0} e^{-\frac{gy}{M_{22}}}, \quad (45)$$

$\rho_0$  为  $y = 0$  处粒子相的数密度,  $M_{12}$  的值为负数, 由 (45) 式可得:

$$\tau_a = \tau_0 - \tau_{s0} e^{-\frac{gy}{M_{22}}} = \rho_a u_*^2 + \rho_0 M_{12} e^{-\frac{gy}{M_{22}}}, \quad (46)$$

$\tau_s$  与  $\tau_a$  沿高度的变化和 McEwan 和 Willetts<sup>[9]</sup> 的数值模拟给出的切应力变化曲线趋势完全吻合。由 (40) 式第二式可得在

一定范围内  $(u - \bar{v})$  大约为常数。在风洞实验中也同样发现这一现象(由前面所给实验数据容易验证)。由 (40) 式第二式确定的粒子相平均速度与实验值的比较如图 3 所示, 从图中可以看出两者符合良好。

### 参 考 文 献

- 1 Bagnold R A. The Physics of Blown Sand and Desert Dunes. London: Methuen & Co, 1941. 钱 宁, 林秉南译. 风沙和荒漠沙丘物理学. 北京: 科学出版社, 1959
- 2 Owen P R. Saltation of uniform grains in air. J Fluid Mech, 1964, 20: 225~242
- 3 Nafsanis P, Hunt J C R, Barrett C F. Saltating particles over flat beds. J Fluid Mech, 1993, 251: 661~685
- 4 White B R. Two-phase measurements of saltating turbulent boundary layer flow. Int J Multiphase Flow, 1982, 8: 459~472
- 5 Anderson R S, Haff P K. Wind modification and bed response during saltation of sand in air. Acta Mech, 1991, 1: 21~52
- 6 McEwan I K, Willetts B B. Numerical model of the saltation cloud. Acta Mech, 1991, 1: 53~66
- 7 Anderson R S, Sorensen M, Willetts B B. A review of recent progress in our understanding of aeolian sediment transport. Acta Mech, 1991, 1: 1~19
- 8 贺大良, 刘大有. 跃移沙粒起跳的受力机制. 中国沙漠, 1984, 9: 14~22
- 9 Rudinger G. Fundamentals of Gas particle Flow. New York: Elsevier, 1980. 张远君译. 气体-颗粒流基础. 北京, 国防工业出版社, 1986
- 10 Jenkins J T, Richman M W. Grad's 13-moment system for a dense gas of inelastic spheres. Arch Rat Mech Anal, 1985, 87: 355~376

- 11 Jenkins J T. Richman M W. Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical, rough, inelastic circular disks. *Phys Fluids*, 1985, 28: 3 485 ~ 3 494
- 12 Grad H. On the kinetic theory of rarified gases. *Comm Pure and Appl Math*, 1949, 2: 331 ~ 407
- 13 吴 正. 风沙地貌学. 北京: 科学出版社, 1987

### 附录 A 粒子属性变化率方程

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \psi d\Omega_v = \int \left[ \frac{\partial (f\psi)}{\partial t} - f \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] d\Omega_v = \frac{\partial}{\partial t} \int \psi f d\Omega_v - \int \frac{\partial \psi}{\partial t} f d\Omega_v = \frac{\partial}{\partial t} \langle n \psi \rangle - n \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle, \quad (\text{A1})$$

$$\int v \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \psi d\Omega_v = \int \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (v \psi f) - f v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right] d\Omega_v = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int v f \psi d\Omega_v - \int v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} f d\Omega_v = \Delta \cdot \langle n v \psi \rangle - n \left\langle v \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle \quad (\text{A2})$$

$$\int \left[ \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} \psi + \frac{1}{m} f \frac{\partial}{\partial v} \cdot \mathbf{F} \psi \right] d\Omega_v = \int \left[ \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left( \frac{1}{m} \mathbf{F} f \psi \right) - \frac{1}{m} f \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] d\Omega_v = - \int \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} f d\Omega_v = - n \left\langle \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle \quad (\text{A3})$$

在上式中利用了  $\int \frac{\partial}{\partial v} \cdot \left( \frac{1}{m} \mathbf{F} f \psi \right) d\Omega_v = 0$ . (A1)、(A2)、(A3)三式相加, 可得

$$\int \mathcal{L}^* f \psi d\Omega_v = \frac{\partial}{\partial t} \langle n \psi \rangle + \Delta \cdot \langle n v \psi \rangle - n \left\langle \mathcal{L} \psi \right\rangle. \quad (\text{A4})$$

由(11)式、(A4)式以及(5)式, 可得(10)式, 证毕.