



四、六维的 Lin-Ni 猜想

献给齐民友教授 90 华诞

魏军城^{1*}, 徐斌², 杨文³

1. Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, BC V6T 1Z4, Canada;

2. 江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116;

3. 中国科学院武汉物理与数学研究所, 武汉 430071

E-mail: jcwei@math.ubc.ca, xubin0518@jsnu.edu.cn, wyang@wipm.ac.cn

收稿日期: 2018-04-29; 接受日期: 2018-09-28; 网络出版日期: 2018-12-27; * 通信作者

摘要 本文对于四、六维任意区域的 Lin-Ni 猜想给出一个非常数解的反例, 这里对于区域的对称性、几何以及拓扑性质不作任何假定.

关键词 Lin-Ni 猜想 先验估计 爆破解

MSC (2010) 主题分类 35J75, 35J25, 35J61

1 引言

本文考虑以下非线性椭圆型的 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} \Delta u - \mu u + u^q = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上成立,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $1 < q < +\infty$, $\mu > 0$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中一个光滑的有界区域.

方程 (1.1) 来源于很多问题. 例如, 在生物数学中, 该方程既可以看成是 Gierer-Meinhardt 系统衍生出的一类 Shadow 系统的平衡态方程, 参见文献 [1, 2]; 也可以看成是 Keller-Segel 模型中趋化方程的平衡态方程, 参见文献 [3]. 当指标 $q = \frac{n+2}{n-2}$ 时, 方程 (1.1) 也可以看成是 Brezis-Nirenberg 型的 Neumann 问题^[4].

注意到方程 (1.1) 至少有一个解, 也就是常数 $u = \mu^{\frac{1}{q-1}}$. 当 μ 很小以及 $q < \frac{n+2}{n-2}$ 时, Lin 等^[3] 利用爆破分析和紧性的办法, 证明了该常值解是方程 (1.1) 唯一的解. 在此基础上, Lin 和 Ni^[5] 提出了以下的猜想:

英文引用格式: Wei J C, Xu B, Yang W. On Lin-Ni's conjecture in dimensions four and six (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 281–306, doi: 10.1360/N012018-00120

猜想 1.1 (Lin-Ni 猜想^[5]) 若 $q = \frac{n+2}{n-2}$ 以及 μ 充分小, 问题 (1.1) 只有常数解.

近年来, 关于 Lin-Ni 猜想的研究有许多重要的进展. 其中第一个结果来自于 Adimurthi 和 Yadava^[6-8] 及 Budd 等^[9], 他们独立地考虑了此猜想在单位球时的情形, 也就是针对以下问题:

$$\begin{cases} \Delta u - \mu u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, & \text{在 } B_R(0) \text{ 内成立,} \\ u = u(|x|), \quad u > 0, & \text{在 } B_R(0) \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial B_R(0) \text{ 上成立,} \end{cases} \quad (1.2)$$

他们有如下的结论:

定理 A^[6-9] 当 μ 足够小时,

- (1) 若 $n = 3$ 或者 $n \geq 7$, 问题 (1.2) 只有常数解;
- (2) 若 $n = 4, 5, 6$, 问题 (1.2) 存在一个非常数解.

定理 A 揭示出 Lin-Ni 猜想受维数的影响. 由于定理 A 的证明依赖于区域和解的对称性, 所以很难被推广运用于一般的区域. 该问题在一般区域的结论尚不完全, 但是有一些结果. 对于三维的凸区域, Zhu^[10] 及 Wei 和 Xu^[11] 证明了以下的结论:

定理 B^[10, 11] 在三维的凸区域, Lin-Ni 猜想是正确的.

Zhu^[10] 的证明利用了爆破分析和先验估计, 而 Wei 和 Xu^[11] 则利用分部积分给出了一个直接的证明. 随后, Druet 等^[12] 把定理 A 的结论 (1) 推广到区域具有正平均曲率的边界, 以及有限能量解的情形.

定理 C^[12] 若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中光滑的有界区域, 其中 $n = 3$ 或者 $n \geq 7$. 假定该区域边界的平均曲率恒为正, 则存在一个正的常数 $\mu_0(\Omega, \Lambda)$, 使得对于方程 (1.1) 所有的光滑解, 当常数 $\mu \in (0, \mu_0(\Omega, \Lambda))$ 时, 我们有以下的结论:

$$\begin{cases} \Delta u + \mu u = u^{2^*-1}, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上成立,} \\ \int_{\Omega} u^{2^*} dx \leq \Lambda, \end{cases} \Rightarrow u \equiv \mu^{\frac{n-2}{4}}.$$

这里需要提及的是定理 C 中能量有界的假设是必要的. 因为如果没有这个假设, 在区域边界处某点具有负平均曲率的条件下, 方程 (1.1) 被证明具有无穷能量的解, 参见文献 [13]. 具体而言, 假定光滑的有界区域 Ω 满足以下性质 (H1)–(H3):

(H1) $y \in \Omega$ 当且仅当 $(y_1, y_2, \dots, -y_i, \dots, y_n) \in \Omega, \forall i = 3, \dots, n$;

(H2) 若 $(r, 0, y'') \in \Omega$, 则 $(r \cos \theta, r \sin \theta, y'') \in \Omega, \forall \theta \in (0, 2\pi)$, 其中 $y'' = (y_3, \dots, y_n)$;

(H3) 设 $T := \partial\Omega \cap \{y_3 = \dots = y_n = 0\}$, 则集合 T 存在一个连通的分支 Γ 使得 $H(x) \equiv \gamma < 0, \forall x \in \Gamma$.

Wang 等^[13] 对于 Lin-Ni 猜想在 $n \geq 3$ 的情形给出了非常数解的反例.

定理 D 假定 $n \geq 3, q = \frac{n+2}{n-2}$ 以及 Ω 是一个光滑的有界区域并且满足性质 (H1)–(H3). 设 μ 是一个固定的正常数, 则问题 (1.1) 有无穷多的正解, 其能量可以任意大.

对于一部分凸区域, Wang 等^[14] 在 $n \geq 4$ 时也给出了 Lin-Ni 猜想非常数解的反例.

定理 E 假定 $n \geq 4$, $q = \frac{n+2}{n-2}$ 以及 Ω 是一个光滑的有界区域并且满足性质 (H1) 和 (H2). 设 μ 是一个固定的正常数, 则问题 (1.1) 有无穷多的正解, 其能量可以任意大.

定理 A-E 表明 Lin-Ni 猜想依赖于空间的维数以及区域 Ω 的形状. 那么一个自然的问题是, 对于一般的区域, Lin-Ni 猜想的结论是否正确?

到目前为止, 这个方向唯一的结论是由 Rey 和 Wei^[15] 给出的. 他们在 μ 足够小时, 对于五维一般的区域 Ω 给出了一个在其内部 K 个点爆破的非平凡解. 由于定理 A 的结论, Rey 和 Wei^[15] 猜测 Lin-Ni 猜想在四至六维一般区域的情形下都存在着非常数解, 这也是本文即将讨论的问题.

本文的目的是针对四维和六维一般区域下的 Lin-Ni 问题在 μ 很小的情形下给出一个在 Ω 内部单点爆破的非平凡解. 从现在起, 我们将考虑以下问题:

$$\begin{cases} \Delta u - \mu u + u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上成立,} \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $n = 4, 6$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中光滑的有界区域以及 μ 充分小. 我们的主要结果陈述如下:

主要结论 对于问题 (1.3), 我们可以找到正常数 μ_0 使得对于所有的常数 $\mu \in (0, \mu_0)$, 方程 (1.3) 在四维和六维任意的区域都具有一个于 Ω 内部单点爆破的非平凡解.

结合文献 [15] 中的主要结果, 我们有以下推论:

推论 1.1 Lin-Ni 猜想在四至六维、一般区域的情形下存在非常数解.

为了更加详细地叙述主要定理, 我们引入以下记号. 设 $G(x, Q)$ 为满足以下条件的 Green 函数:

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, Q) + \delta_Q - \frac{1}{|\Omega|} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial G}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上成立,} \\ \int_{\Omega} G(x, Q) dx = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

则有

$$G(x, Q) = K(|x - Q|) - H(x, Q),$$

其中

$$K(r) = \frac{1}{c_n r^{n-2}}, \quad c_n = (n-2)|\mathbb{S}^{n-1}| \quad (1.5)$$

是 Laplace 算子在 $\mathbb{R}^n$ 中的基本解 ($|\mathbb{S}^{n-1}|$ 表示 $n-1$ 维单位球面的面积), $n = 4, 6$.

为了方便起见, 我们通过伸缩变换将问题 (1.3) 转化为以下问题:

$$\begin{cases} \Delta u - \mu u + n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ u > 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上成立,} \end{cases} \quad (1.6)$$

由文献 [16] 可知,

$$U_{\Lambda, Q} = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^2 + |x - Q|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad \Lambda > 0, \quad Q \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

给出了以下方程的所有解:

$$-\Delta u = n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

基于以上的讨论, 我们在本文中的主要结论可以叙述如下:

定理 1.1 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个光滑的有界区域.

(1) 若 $n = 4$, 存在正的常数 μ_1 使得对于所有的 $\mu \in (0, \mu_1)$, 问题 (1.6) 有一个非平凡解

$$u_\mu = U_{e^{-\frac{c_1}{\mu^2}}\Lambda, Q^\mu} + O(\mu^{-1}e^{-\frac{c_1}{\mu^2}}),$$

其中 c_1 是一个仅依赖于区域的常数, 将在下面的讨论中具体给出, Λ 是一个不依赖于其他参数的常数, 爆破点 Q^μ 的位置依赖于区域和参数 Λ 的选取.

(2) 若 $n = 6$, 存在正的常数 μ_2 使得对于所有的 $\mu \in (0, \mu_2)$, 问题 (1.6) 有一个非平凡解

$$u_\mu = U_{\mu\Lambda, Q^\mu} + O(\mu),$$

其中 $\Lambda \rightarrow \Lambda_0$, Λ_0 是一个指定的正常数, 爆破点 Q^μ 的位置依赖于区域和参数 Λ 的选取.

为了方便起见, 我们引入一些记号. 设

$$\Omega_\varepsilon := \frac{\Omega}{\varepsilon} = \{z \mid \varepsilon z \in \Omega\}, \quad (1.9)$$

以及

$$\mu = \begin{cases} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}, & n = 4, \\ \varepsilon, & n = 6. \end{cases} \quad (1.10)$$

通过变换 $u(x) \mapsto \varepsilon^{-\frac{n-2}{2}}u(x/\varepsilon)$, (1.6) 可以写成以下的形式:

$$\begin{cases} \Delta u - \mu\varepsilon^2 u + n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ u > 0, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立.} \end{cases} \quad (1.11)$$

令

$$S_\varepsilon[u] := -\Delta u + \mu\varepsilon^2 u - n(n-2)u_+^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad u_+ = \max(u, 0), \quad (1.12)$$

并引入以下泛函:

$$J_\varepsilon[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \mu\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 - \frac{(n-2)^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |u|^{\frac{2n}{n-2}}, \quad u \in H^1(\Omega_\varepsilon). \quad (1.13)$$

由于空间维数的影响, 我们需要处理因其产生的不同困难. 在四维的情形下, 一个主要的问题是 μ 与 ε 的关系十分隐秘. 六维则在某种意义上是一种临界情形, 这源自常数项 μu 不再出现于该问题线性化算子的主要项中. 为了克服此困难, 我们必须引入一个人为的参数 η . 因为该线性化算子的核空间包含常数, 所以, 此情形可以被看作是某种“共振”现象.

本文的结构如下: 第 2 节构造出一个合适的近似爆破解 W , 并列举出该近似函数一些所需的性质. 第 3 节分析一类在近似解 W 处的线性化算子. 第 4 节求解与之对应的一个非线性问题. 第 5 节研究剩余的有限维问题, 然后在第 6 节中求解所对应的约化泛函的临界值. 我们将一些详细计算的结果留在了第 7 节.

2 近似爆破解

本节将构造一个合适的近似解, 并在这个近似解的附近求解出定理 1.1 所需的解. 我们将根据不同的维数构造相应形式的近似解.

设参数 μ 和 ε 的关系由 (1.10) 给出. 对于 Ω 内的点 Q , (1.7) 中定义的 $U_{\Lambda, Q/\varepsilon}$ 提供了方程 (1.11) 的一阶逼近解. 由于多出的线性项 $\mu\varepsilon^2 u$ 和齐次的 Neumann 边值, 我们需要在 $U_{\Lambda, Q/\varepsilon}$ 的基础上进行一些修正, 从而得到更加精确的近似解. 接下来将根据不同的维数来定义低阶项.

当 $n = 4$ 时, 考虑以下的线性方程:

$$\begin{aligned}\Delta \bar{\Psi} + U_{1,0} &= 0, \quad \text{在 } \mathbb{R}^4 \text{ 中成立,} \\ \bar{\Psi}(0) &= 1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

注意到方程 (2.1) 拥有一个唯一的镜像对称解, 并且该解具有以下渐近行为:

$$\bar{\Psi}(|y|) = -\frac{1}{2} \ln |y| + I + O\left(\frac{1}{|y|}\right), \quad \bar{\Psi}' = -\frac{1}{2|y|} \left(1 + O\left(\frac{\ln(1+|y|)}{|y|^2}\right)\right), \quad \text{当 } |y| \rightarrow \infty,\tag{2.2}$$

其中 I 是一个不依赖于 y 的常数. 对于 Ω_ε 中的点 Q , 设

$$\Psi_{\Lambda, Q} = \frac{\Lambda}{2} \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} + \Lambda \bar{\Psi}\left(\frac{y-Q}{\Lambda}\right),\tag{2.3}$$

其中 $\Psi_{\Lambda, Q}$ 满足 $\Delta \Psi_{\Lambda, Q} + U_{\Lambda, Q} = 0$ 在 $\mathbb{R}^4$ 中成立. 从 (2.2) 中得到

$$\begin{aligned}|\Psi_{\Lambda, Q}(y)| &\leq C \left| \ln \frac{1}{\varepsilon(1+|y-Q|)} \right|, \quad |\partial_\Lambda \Psi_{\Lambda, Q}(y)| \leq C \left| \ln \frac{1}{\varepsilon(1+|y-Q|)} \right|, \\ |\partial_{Q_i} \Psi_{\Lambda, Q}(y)| &\leq \frac{C}{1+|y-Q|}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

接下来考虑 $n = 6$ 的情形. 设 $\Psi(|y|)$ 为以下方程的镜像解:

$$\begin{aligned}\Delta \Psi + U_{1,0} &= 0, \quad \text{在 } \mathbb{R}^6 \text{ 中成立,} \\ \Psi &\rightarrow 0, \quad \text{当 } |y| \rightarrow +\infty.\end{aligned}\tag{2.5}$$

不难发现

$$\Psi(y) = \frac{1}{4|y|^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{|y|^2}\right)\right), \quad \text{当 } |y| \rightarrow +\infty.\tag{2.6}$$

对于 Ω_ε 中的点 Q , 设

$$\Psi_{\Lambda, Q}(y) = \Psi\left(\frac{y-Q}{\Lambda}\right),$$

其中 $\Psi_{\Lambda, Q}$ 满足

$$\Delta \Psi_{\Lambda, Q}(y) + U_{\Lambda, Q} = 0, \quad \text{在 } \mathbb{R}^6 \text{ 中成立.}$$

通过直接的计算, 有

$$|\Psi_{\Lambda, Q}(y)| \leq \frac{C}{(1+|y-Q|)^2}, \quad |\partial_\Lambda \Psi_{\Lambda, Q}(y)| \leq \frac{C}{(1+|y-Q|)^2}, \quad |\partial_{Q_i} \Psi_{\Lambda, Q}(y)| \leq \frac{C}{(1+|y-Q|)^3}.\tag{2.7}$$

考虑到线性项 $\mu\varepsilon^2 u$ 的影响, 我们需要对近似解进行修正使其满足 Neumann 边界条件. 出于这个目的, 我们需要在原近似解的基础上增添一个修正项. 定义

$$\hat{U}_{\Lambda, Q/\varepsilon}(z) = -\Psi_{\Lambda, Q/\varepsilon}(z) - c_n \mu^{-1} \varepsilon^{n-4} \Lambda^{\frac{n-2}{2}} H(\varepsilon z, Q) + R_{\varepsilon, \Lambda, Q}(z) \chi(\varepsilon z), \quad (2.8)$$

其中 $R_{\varepsilon, \Lambda, Q}$ 是满足以下边值问题的唯一解:

$$\begin{cases} \Delta R_{\varepsilon, \Lambda, Q} - \varepsilon^2 R_{\varepsilon, \Lambda, Q} = 0, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \mu\varepsilon^2 \frac{\partial R_{\varepsilon, \Lambda, Q}}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial \nu} [U_{\Lambda, Q/\varepsilon} - \mu\varepsilon^2 \Psi_{\Lambda, Q/\varepsilon} - c_n \varepsilon^{n-2} \Lambda^{\frac{n-2}{2}} H(\varepsilon z, Q)], & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \end{cases} \quad (2.9)$$

这里 $\chi(x)$ 是一个在 Ω 上的光滑截断函数, 满足以下性质:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } d(x, \partial\Omega) < \frac{\delta}{4}, \\ 0, & \text{若 } d(x, \partial\Omega) > \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

从 (2.2)、(2.6)、 $U_{\Lambda, \frac{Q}{\varepsilon}}$ 的表达展开式以及 H 的定义, 我们得到 $R_{\varepsilon, Q}$ 在 Ω_ε 的边界上满足

$$R_{\varepsilon, Q} = O(\varepsilon^{n-3}),$$

由此可以得到¹⁾

$$|R_{\varepsilon, \Lambda, Q}| + |\varepsilon^{-1} \nabla_z R_{\varepsilon, \Lambda, Q}| + |\varepsilon^{-2} \nabla_z^2 R_{\varepsilon, \Lambda, Q}| \leq \begin{cases} C\Lambda, & n = 4, \\ C\varepsilon^2, & n = 6. \end{cases} \quad (2.10)$$

现在可以定义近似爆破解. 当 $n = 4$ 时, 令

$$\Lambda_{4,1} \leq \Lambda \leq \Lambda_{4,2}, \quad Q \in \mathcal{M}_{\delta_4} := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta_4\}, \quad (2.11)$$

其中

$$\Lambda_{4,1} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^\beta, \quad \Lambda_{4,2} = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{-\beta}$$

为依赖于区域的两个常数以及 δ_4 是一个充分小的数, 将在随后的讨论中给出. 定义四维的近似解为

$$W_{\varepsilon, \Lambda, Q} = U_{\Lambda, \bar{Q}} + \mu\varepsilon^2 \hat{U}_{\Lambda, \bar{Q}} + \frac{c_4 \Lambda}{|\Omega|} \mu^{-1} \varepsilon^2, \quad (2.12)$$

其中 $\bar{Q} = Q/\varepsilon$.

当 $n = 6$ 时, 令参数 (Λ, Q, η) 满足

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_6} \left(\frac{1}{96} - \Lambda_6 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right)} &\leq \Lambda \leq \sqrt{\frac{|\Omega|}{c_6} \left(\frac{1}{96} + \Lambda_6 \varepsilon^{\frac{2}{3}} \right)}, \\ Q &\in \mathcal{M}_{\delta_6} := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta_6\}, \\ \frac{1}{48} - \eta_6 \varepsilon^{\frac{1}{3}} &\leq \eta \leq \frac{1}{48} + \eta_6 \varepsilon^{\frac{1}{3}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

1) 对于四维的情形, 由于参数 Λ 所设置的区间依赖于 ε , 因此在计算误差时需要考虑 Λ . 同时我们注意到 (2.9) 第二个方程右端的每一项都携带 Λ .

其中 $c_6 = 4|S^5|$, Λ_6 和 η_6 为仅依赖于区域的参数, 以及 δ_6 是一个充分小的数, 也将在随后的讨论中给出. 定义六维的近似解为

$$W_{\varepsilon, \Lambda, Q, \eta} = U_{\Lambda, \bar{Q}} + \mu \varepsilon^2 \hat{U}_{\Lambda, \bar{Q}} + \eta \mu^{-1} \varepsilon^4, \quad (2.14)$$

其中 $\bar{Q} = Q/\varepsilon$.

我们注明四维和六维近似解的设置是有区别的. 对于后者, 我们需要引入一个新的参数 η . 这样做的原因是, 在处理六维线性化的问题中, 线性项 $\mu \varepsilon^2$ 不起作用. 事实上这也是主要的困难之一. 对于 Neumann 边值问题来说, 这也是一个新颖的点.

为方便起见, 接下来, 我们分别用记号 W 、 U 、 $\hat{U}$ 、 R 和 Ψ 代替 $W_{\varepsilon, \Lambda, Q}$ 、 $U_{\varepsilon, Q/\varepsilon}$ 、 $\hat{U}_{\Lambda, Q/\varepsilon}$ 、 $R_{\varepsilon, \Lambda, Q}$ 和 $\Psi_{\Lambda, Q/\varepsilon}$. 通过上述讨论, 我们可以得到 W 在边界上的法向导数为 0, 并且满足

$$-\Delta W + \mu \varepsilon^2 W = \begin{cases} 8U^3 + \mu^2 \varepsilon^4 \hat{U} - \mu \varepsilon^2 \Delta(R_{\varepsilon, \Lambda, Q} \chi), & n = 4, \\ 24U^2 + \mu^2 \varepsilon^4 \hat{U} - \mu \varepsilon^2 \Delta(R_{\varepsilon, \Lambda, Q} \chi) + \varepsilon^6 \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right), & n = 6. \end{cases} \quad (2.15)$$

注意到 W 连续依赖于 Λ 、 $\bar{Q}$ 和 η (六维的情形). 对于 Ω_ε 中的点 z , 设置

$$\langle z - \bar{Q} \rangle = (1 + |z - \bar{Q}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

通过简单的计算, 有

$$|W(z)| \leq \begin{cases} C(\varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-2}), & n = 4, \\ C(\varepsilon^3 + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}), & n = 6, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$|D_\Lambda W(z)| \leq \begin{cases} C(\varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-2}), & n = 4, \\ C\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}, & n = 6, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$|D_{\bar{Q}} W(z)| \leq \begin{cases} C(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-3}), & n = 4, \\ C(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-5}), & n = 6, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$|D_\eta W(z)| = O(\varepsilon^3), \quad n = 6. \quad (2.19)$$

根据 W 的表达式, 我们有以下关于误差和能量的估计, 这些估计的证明将在第 7 节给出.

引理 2.1 对于四维的情形, 有

$$|S_\varepsilon[W](z)| \leq C(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} \varepsilon^2 (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} \varepsilon^4 (-\ln \varepsilon)) + C \left(\left(\frac{\varepsilon^4}{(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon^4}{-\ln \varepsilon} \left| \ln \left(\frac{1}{\varepsilon(1 + |z - \bar{Q}|)} \right) \right| \right) \Lambda \right), \quad (2.20)$$

$$|D_\Lambda S_\varepsilon[W](z)| \leq C \left(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} \varepsilon^2 (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} \varepsilon^4 (-\ln \varepsilon) + \frac{\varepsilon^4}{(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varepsilon^4}{-\ln \varepsilon} \left| \ln \left(\frac{1}{\varepsilon(1 + |z - \bar{Q}|)} \right) \right| \right), \quad (2.21)$$

$$|D_{\bar{Q}} S_\varepsilon[W](z)| \leq C \left(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-5} \varepsilon^2 (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-3} \varepsilon^4 (-\ln \varepsilon) \right)$$

$$+ \langle z - \bar{Q} \rangle^{-1} \frac{\varepsilon^4}{-\ln \varepsilon} \Big), \quad (2.22)$$

以及

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[W] &= 2 \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + \frac{c_4 \Lambda^2}{4} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} - \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_4^2 \Lambda^2 \varepsilon^2 H(Q, Q) + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2\right) + O(\varepsilon^4 (-\ln \varepsilon)^2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

而对于六维的情形, 我们有

$$S_\varepsilon[W](z) = -\varepsilon^6 \left(24\eta^2 - \eta + \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) + O(1) \varepsilon^3 \langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}, \quad (2.24)$$

$$|D_\Lambda S_\varepsilon[W](z)| = O(1) (\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} \varepsilon^3 + \varepsilon^6), \quad (2.25)$$

$$|D_\eta S_\varepsilon[W](z)| = O(1) (\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} \varepsilon^3 + \varepsilon^{6\frac{1}{3}}), \quad (2.26)$$

$$|D_{\bar{Q}} S_\varepsilon[W](z)| \leq C \langle z - \bar{Q} \rangle^{-5} \varepsilon^3, \quad (2.27)$$

以及

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[W] &= 4 \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \left(\frac{1}{2} \eta^2 |\Omega| - c_6 \eta \Lambda^2 + \frac{1}{48} c_6 \Lambda^2 - 8\eta^3 |\Omega| \right) \varepsilon^3 + \frac{1}{2} c_6^2 \Lambda^4 \varepsilon^4 H(Q, Q) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\Lambda^2}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (2.28)$$

3 有限维约化

我们将利用有限维约化的办法来求解此临界指数的问题. 有限维约化的办法首先被 Floer 和 Weinstein 应用于构造一维非线性 Schrödinger 方程的单胞 (bump) 解. 随后, 这个方法被发展并应用于临界指标的问题, 我们推荐读者参见文献 [15, 17–20] 以及这些文献中引用的参考文献. 对于最新的以及处理临界指标问题手法较为精细的内容可参见文献 [21].

这个方法的过程如下: 我们将求解非线性问题 (1.11) 分为以下两个步骤. 第一步, 在有限维近似核空间的补空间中求解该问题. 第二步, 我们把原问题等价于一个在有限维的集合中求解极值问题.

我们证明中一个新颖的地方是对于六维的问题引入了一个新的空间 (与参数 η 对应). 这有别于处理临界指标问题的传统办法, 传统办法中线性化算子的核空间是 $n+1$ 维, 而现在我们需要处理的核空间维数为 $n+2=8$ 维.

定义空间 $H^1(\Omega_\varepsilon)$ 及其内积

$$(u, v)_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla v + \mu \varepsilon^2 uv). \quad (3.1)$$

对于四维的情形, 任意的函数在空间 $H^1(\Omega_\varepsilon)$ 中正交于以下函数:

$$Y_0 = \frac{\partial W}{\partial \Lambda}, \quad Y_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (3.2)$$

等价于在空间 $L^2(\Omega_\varepsilon)$ 中正交于函数 Z_i , $0 \leq i \leq 4$, 其中

$$\begin{cases} Z_0 = -\Delta \frac{\partial W}{\partial \Lambda} + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial \Lambda}, \\ Z_i = -\Delta \frac{\partial W}{\partial \bar{Q}_i} + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial \bar{Q}_i}, \quad 1 \leq i \leq 4. \end{cases} \quad (3.3)$$

通过直接的计算可得

$$|Z_i(z)| \leq C(\varepsilon^4 + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-6}). \quad (3.4)$$

接下来将考虑以下问题: 对于给定的函数 h , 寻找 ϕ 使得以下方程成立:

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \mu \varepsilon^2 \phi - 24W^2 \phi = h + \sum_{i=0}^4 c_i Z_i, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial \Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \\ \langle Z_i, \phi \rangle = 0, \quad 0 \leq i \leq 4. \end{cases} \quad (3.5)$$

对于六维的情形, 任意的函数在空间 $H^1(\Omega_\varepsilon)$ 中正交于以下函数:

$$Y_0 = \frac{\partial W}{\partial \Lambda}, \quad Y_i = \frac{\partial W}{\partial \bar{Q}_i}, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad Y_7 = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad (3.6)$$

则等价于在空间 $L^2(\Omega_\varepsilon)$ 中正交于函数 Z_i , $0 \leq i \leq 7$, 其中

$$\begin{cases} Z_0 = -\Delta \frac{\partial W}{\partial \Lambda} + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial \Lambda}, \\ Z_i = -\Delta \frac{\partial W}{\partial \bar{Q}_i} + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial \bar{Q}_i}, \quad 1 \leq i \leq 6, \\ Z_7 = -\Delta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial \eta}. \end{cases} \quad (3.7)$$

通过直接的计算, 有

$$|Z_i(z)| \leq C(\varepsilon^6 + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-8}), \quad 0 \leq i \leq 6, \quad Z_7(z) = O(\varepsilon^6). \quad (3.8)$$

同四维的问题一样, 考虑以下问题: 对于给定的 h , 寻找解 ϕ 使得以下方程成立:

$$\begin{cases} -\Delta \phi + \mu \varepsilon^2 \phi - 48W\phi = h + \sum_{i=0}^7 d_i Z_i, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial \Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \\ \langle Z_i, \phi \rangle = 0, \quad 0 \leq i \leq 7. \end{cases} \quad (3.9)$$

我们将在一个加权的空间中处理问题 (3.5) 和 (3.9) 的存在性和唯一性. 出于这个目的, 定义

$$\begin{cases} \|\phi\|_* = \|\langle z - \bar{Q} \rangle \phi(z)\|_\infty, & \|f\|_{**} = \varepsilon^{-3}(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} |\bar{f}| + \|\langle z - \bar{Q} \rangle^3 f(z)\|_\infty, & n = 4, \\ \|\phi\|_{***} = \|\langle z - \bar{Q} \rangle^2 \phi(z)\|_\infty, & \|f\|_{****} = \|\langle z - \bar{Q} \rangle^4 f(z)\|_\infty, & n = 6, \end{cases} \quad (3.10)$$

其中 $\|f\|_\infty = \max_{z \in \Omega_\varepsilon} |f(z)|$, $\bar{f} = |\Omega_\varepsilon|^{-1} \int_{\Omega_\varepsilon} f(z) dz$ 表示 f 在 Ω_ε 积分的平均.

在介绍问题 (3.5) 和 (3.9) 的存在性之前, 我们需要下面的这个引理.

引理 3.1 设函数 u 和 f 满足

$$-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \bar{u} = \bar{f} = 0,$$

则

$$|u(x)| \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}} dy. \quad (3.11)$$

详细的讨论参见文献 [15, 引理 3.1], 这里省略证明.

作为该引理的推论, 我们下面的推论:

推论 3.1 若 $n = 4$, 假定函数 u 和 f 满足

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu\varepsilon^2 u = f, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \end{cases}$$

则

$$\|u\|_* \leq C\|f\|_{**}. \quad (3.12)$$

若 $n = 6$, 假定函数 u 和 f 满足

$$\begin{cases} -\Delta u + c\mu\varepsilon^2 u = f, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \\ \bar{u} = \bar{f} = 0, \end{cases}$$

其中 c 是一个任意的常数, 则

$$\|u\|_{***} \leq C\|f\|_{****}. \quad (3.13)$$

证明 对于四维的情形, 利用分部积分, 有 $\bar{f} = \mu\varepsilon^2 \bar{u}$. 我们可以把原方程改写为

$$\Delta(u - \bar{u}) = \mu\varepsilon^2(u - \bar{u}) - (f - \bar{f}).$$

借助引理 3.1, 我们有

$$|u(y) - \bar{u}| \leq C\mu\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|u(x) - \bar{u}|}{|x-y|^2} dx + C \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|f(x) - \bar{f}|}{|x-y|^2} dx.$$

因为 $\langle y - \bar{Q} \rangle \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{|x-y|^2} \langle x - \bar{Q} \rangle^{-3} dx < \infty$, 所以,

$$\begin{aligned} \|\langle y - \bar{Q} \rangle |u - \bar{u}|\|_\infty &\leq C\mu\varepsilon^2 \|\langle y - \bar{Q} \rangle^3 |u - \bar{u}|\|_\infty + C \|\langle y - \bar{Q} \rangle^3 |f - \bar{f}|\|_\infty \\ &\leq C\mu \|\langle y - \bar{Q} \rangle |u - \bar{u}|\|_\infty + C \|\langle y - \bar{Q} \rangle^3 |f - \bar{f}|\|_\infty, \\ \|\langle y - \bar{Q} \rangle |u - \bar{u}|\|_\infty &\leq C \|\langle y - \bar{Q} \rangle^3 |f - \bar{f}|\|_\infty. \end{aligned}$$

利用上式, 进一步有

$$\|\langle y - \bar{Q} \rangle u\|_\infty \leq C \|\langle y - \bar{Q} \rangle\|_\infty \|\bar{u}\| + C\varepsilon^{-3} \|\bar{f}\| + \|\langle y - \bar{Q} \rangle^3 f\|_\infty \leq C\|f\|_{**}.$$

于是我们完成了四维情形的证明.

对于六维的情形, 利用引理 3.1, 有

$$|\langle y - \bar{Q} \rangle^2 u| \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\langle y - \bar{Q} \rangle^2 (|\mu \varepsilon^2 u| + |f|)}{|x - y|^4} dx \leq C(|\mu \ln \varepsilon| \|u\|_{***} + \|f\|_{****}),$$

其中我们用到类似于四维情形的估计. 由此可以得到 $\|u\|_{***} \leq \|f\|_{****}$, 从而该推论证毕. $\square$

接下来陈述本节中的主要结果:

命题 3.1 存在常数 $\varepsilon_0 > 0$, 以及一个不依赖于 (2.11) 中定义的 ε 、 Λ 、 Q 及 (2.13) 中定义的 ε 、 η 、 Λ 、 Q 的常数 $C > 0$, 使得对所有的 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ 以及 $h \in L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, 问题 (3.5) 和 (3.9) 拥有一个唯一的解 $\phi = L_\varepsilon(h)$. 另外, 对于问题 (3.5) 和 (3.9), 我们有以下的估计:

$$\begin{aligned} \|L_\varepsilon(h)\|_* &\leq C\|h\|_{**}, \quad |c_i| \leq C\|h\|_{**}, \quad 0 \leq i \leq 4, \\ \|L_\varepsilon(h)\|_{***} &\leq C\|h\|_{****}, \quad |d_i| \leq C\|h\|_{****}, \quad 0 \leq i \leq 6. \end{aligned} \quad (3.14)$$

进一步地, 该映射 $L_\varepsilon(h)$ 满足以下估计:

$$\|D_{(\Lambda, \bar{Q})} L_\varepsilon(h)\|_* \leq C\|h\|_{**}, \quad n = 4; \quad \|D_{(\eta, \Lambda, \bar{Q})} L_\varepsilon(h)\|_{***} \leq C\varepsilon^{-1}\|h\|_{****}, \quad n = 6. \quad (3.15)$$

此命题的证明同文献 [15, 命题 3.1] 的证明类似, 这里提供证明的概要. 首先需要以下的引理:

引理 3.2 对于四维的情形, 假定 ϕ_ε 和 $h = h_\varepsilon$ 满足方程 (3.5). 若 $\|h_\varepsilon\|_{**}$ 随着 ε 趋于 0 而趋于 0, 那么 $\|\phi_\varepsilon\|_*$ 也满足此性质. 对于六维的情形, 假定 ϕ_ε 和 $h = h_\varepsilon$ 满足方程 (3.9). 若 $\|h_\varepsilon\|_{****}$ 随着 ε 趋于 0 而趋于 0, 那么 $\|\phi_\varepsilon\|_{***}$ 也满足此性质.

证明 下面给出证明的主要思路, 反证法. 首先考虑四维的情形. 假设 $\|\phi_\varepsilon\|_* = 1$. 在方程 (3.5) 两端同时乘以 Y_j 然后在 Ω_ε 内积分, 可得

$$\sum_i c_i \langle Z_i, Y_j \rangle = \langle -\Delta Y_j + \mu \varepsilon^2 Y_j - 24W^2 Y_j, \phi_\varepsilon \rangle - \langle h_\varepsilon, Y_j \rangle. \quad (3.16)$$

根据 Z_i 和 Y_i 的定义, 不难发现

$$\begin{aligned} \langle Z_0, Y_0 \rangle &= \|Y_0\|_\varepsilon^2 = \gamma_0 + o(1), \\ \langle Z_i, Y_i \rangle &= \|Y_i\|_\varepsilon^2 = \gamma_1 + o(1), \quad 1 \leq i \leq 4, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中 γ_0 和 γ_1 是严格正的常数, 以及

$$\langle Z_i, Y_j \rangle = o(1), \quad i \neq j. \quad (3.18)$$

另一方面, 通过直接的计算, 有

$$\langle -\Delta Y_j + \mu \varepsilon^2 Y_j - 24W^2 Y_j, \phi_\varepsilon \rangle = o(\|\phi_\varepsilon\|_*), \quad \langle h_\varepsilon, Y_j \rangle = O(\|h_\varepsilon\|_{**}).$$

结合上述的讨论以及方程 (3.16), 我们可以解出 c_i ($i = 0, \dots, 4$) 满足

$$c_i = O(\|h_\varepsilon\|_{**}) + o(\|\phi_\varepsilon\|_*). \quad (3.19)$$

特别地, c_i 随着 ε 趋于 0 而趋向于 0.

利用 $\|\phi_\varepsilon\|_* = 1$ 以及经典的椭圆估计, 我们可以得到一串收敛的子列使得其极限 $\phi_{\varepsilon,0} = \phi_\varepsilon(y - \bar{Q})$ 是满足以下方程的一个非平凡解:

$$-\Delta\phi_0 = 24U_{\Lambda,0}^2\phi_0.$$

运用拔靴法 (参见文献 [22, 命题 2.2]), 有 $|\phi_0(y)| \leq C(1 + |y|)^{-2}$. 作为推论, ϕ_0 可以写成 (参见文献 [23])

$$\phi_0 = \alpha_0 \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial \Lambda} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i}.$$

另一方面, 从等式 $\langle Z_i, \phi_\varepsilon \rangle = 0$ 可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} -\Delta \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial \Lambda} \phi_0 &= \int_{\mathbb{R}^4} U_{\Lambda,0}^2 \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial \Lambda} \phi_0 = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^4} -\Delta \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i} \phi_0 &= \int_{\mathbb{R}^4} U_{\Lambda,0}^2 \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i} \phi_0 = 0, \quad 1 \leq i \leq 4. \end{aligned}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} \left| \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial \Lambda} \right|^2 &= \gamma_0 > 0, \quad \int_{\mathbb{R}^4} \left| \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i} \right|^2 = \gamma_i > 0, \quad 1 \leq i \leq 4, \\ \int_{\mathbb{R}^4} \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial \Lambda} \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i} &= \int_{\mathbb{R}^4} \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_i} \nabla \frac{\partial U_{\Lambda,0}}{\partial y_j} = 0, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

利用上述两个方程式, 我们得到 α_i 满足一个严格对角占优、齐次的线性方程, 因此, $\alpha_i = 0, 0 \leq i \leq 4, \phi_0 = 0$. 作为推论, 我们有 $\phi_\varepsilon(z - \bar{Q})$ 在 $C_{\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon)$ 趋于 0.

接下来, 我们利用方程 (3.5) 证明 $\|\phi_\varepsilon\|_* = o(1)$. 结合 (3.5) 和推论 3.1, 有

$$\|\phi_\varepsilon\|_* \leq C \left(\|W^2\phi_\varepsilon\|_{**} + \|h\|_{**} + \sum_i |c_i| \|Z_i\|_{**} \right). \quad (3.20)$$

我们逐项分析 (3.20) 的右端项. 借助 (2.16), 可推导出

$$|\langle z - \bar{Q} \rangle^3 W^2 \phi_\varepsilon| \leq C\varepsilon^4 (-\ln \varepsilon) \langle z - \bar{Q} \rangle^2 \|\phi_\varepsilon\|_* + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-1} |\phi_\varepsilon|. \quad (3.21)$$

因为 $\|\phi_\varepsilon\|_* = 1$, 我们知道方程 (3.21) 右端的第一项可以被 $\varepsilon^2(-\ln \varepsilon)$ 控制住. 对于第二项, 我们可得其在任意的球 $B_R(\bar{Q})$ 一致收敛到 0, 在 $\Omega_\varepsilon \setminus B_R(\bar{Q})$ 中可以被 $\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} \|\phi_\varepsilon\|_* = \langle z - \bar{Q} \rangle^{-2}$ 控制住, 从而可以通过选取 R 使得其充分小. 由此推出, 若 ε 充分小, 则

$$|\langle z - \bar{Q} \rangle^3 W^2 \phi_\varepsilon| = o(1). \quad (3.22)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-3}(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \overline{W^2 \phi_\varepsilon} &\leq C\varepsilon(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} (\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} + \varepsilon^4(-\ln \varepsilon)) |\phi_\varepsilon| \\ &\leq C\varepsilon(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} (\langle z - \bar{Q} \rangle^{-5} + \varepsilon^4(-\ln \varepsilon) \langle z - \bar{Q} \rangle^{-1}) \|\phi_\varepsilon\|_* \\ &= o(1). \end{aligned}$$

于是可得

$$\|W^2\phi_\varepsilon\|_{**} = o(1).$$

利用 (3.4), 我们有

$$\begin{aligned} \langle z - \bar{Q} \rangle^3 |Z_i| &\leq C \left(\langle z - \bar{Q} \rangle^3 \varepsilon^4 \left(\frac{1}{-\ln \varepsilon} \right) + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-3} \right) = O(1), \\ \varepsilon^{-3} (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \bar{Z}_i &\leq C \varepsilon (-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} |\langle z - \bar{Q} \rangle^{-6} + \varepsilon^4| dx = o(1). \end{aligned}$$

从以上的式子可推导出 $\|Z_i\|_{**} = O(1)$. 因此,

$$\|\phi_\varepsilon\|_* \leq C \left(\|W^2 \phi_\varepsilon\|_{**} + \|h\|_{**} + \sum_i |c_i| \|Z_i\|_{**} \right) = o(1), \quad (3.23)$$

这与我们的假设 $\|\phi_\varepsilon\|_* = 1$ 矛盾.

对于六维的情形, 仍然假设 $\|\phi_\varepsilon\|_{***} = 1$. 类似于四维情形的讨论, 我们有

$$\begin{aligned} d_i &= O(\|h\|_{****}) + o(\|\phi\|_{***}), \quad 0 \leq i \leq 6, \\ d_7 &= O(\varepsilon^{-2} \|h\|_{****}) + O(\varepsilon^{-1} \|\phi\|_{***}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

以及 $\phi_\varepsilon(z - \bar{Q})$ 在 $C^1_{\text{loc}}(\Omega_\varepsilon)$ 趋于 0. 接下来利用方程 (3.9) 证明 $\|\phi_\varepsilon\|_{***} = o(1)$. 首先, 将 (3.9) 写成如下的形式:

$$-\Delta \phi_\varepsilon + \mu \varepsilon^2 (1 - 48\eta) \phi_\varepsilon = h + \sum_i d_i Z_i + 48U \phi_\varepsilon + 48\varepsilon^3 \hat{U} \phi_\varepsilon. \quad (3.25)$$

由于 $\int_{\Omega_\varepsilon} \phi = 0$, 我们可以推出方程 (3.25) 两端在 Ω_ε 的积分均为 0. 再一次利用推论 3.1, 有

$$\|\phi_\varepsilon\|_{***} \leq C \left(\|(U + \varepsilon^3 \hat{U}) \phi_\varepsilon\|_{****} + \|h\|_{****} + \sum_i |d_i| \|Z_i\|_{****} \right). \quad (3.26)$$

根据函数 U 和 $\hat{U}$ 的定义, 不难发现

$$U + \varepsilon^3 \hat{U} \leq C \langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}.$$

类似于四维的情形, 可以证明 $\|\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} \phi_\varepsilon\|_{****} = o(1)$, $\|Z_i\|_{****} = O(1)$ ($0 \leq i \leq 6$), $\|Z_7\|_{****} = O(\varepsilon^2)$. 因此, 利用上述结论以及 (3.24), 我们可以推导得到

$$\|\phi_\varepsilon\|_{***} \leq o(1) + C \|h\|_{****} + o(1) \|\phi_\varepsilon\|_{***} = o(1),$$

这个与我们的假设 $\|\phi_\varepsilon\|_{***} = 1$ 矛盾. 从而我们完成了引理的证明. $\square$

命题 3.1 的证明 由于四维和六维情形的证明类似, 我们在这里只给出前者的证明. 设定

$$H = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid \langle Z_i, \phi \rangle = 0, 0 \leq i \leq 4\},$$

其空间的内积定义为 $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$. 问题 (3.5) 等价于寻找 $\phi \in H$ 使得

$$(\phi, \theta)_\varepsilon = \langle 24W^2 \phi + h, \theta \rangle, \quad \forall \theta \in H,$$

也就是

$$\phi = T_\varepsilon(\phi) + \tilde{h}, \quad (3.27)$$

其中 $\tilde{h}$ 线性地依赖于 h , T_ε 是空间 H 的紧算子. 借助 Fredholm 二择一的结论, 我们现在需要证明算子 $Id - T_\varepsilon$ 的核空间是 0. 我们注意到若函数 $\phi_\varepsilon \in \text{Ker}(Id - T_\varepsilon)$ 并且满足方程 (3.5), 其中 $h = 0$, 从引理 3.2 可得, 随着 ε 趋于 0, $\|\phi_\varepsilon\|_*$ 也趋于 0, 于是可以得到 $\text{Ker}(Id - T_\varepsilon)$ 是零空间. 作为推论, 我们可以从引理 3.2 和 (3.19) 导出不等式 (3.14). 这也证明了命题 3.1 的第一个部分.

算子 L_ε 相对于 Λ 和 $\bar{Q}$ 的光滑性可以从 T_ε 以及 $\tilde{h}$ 相对于 Λ 和 $\bar{Q}$ 的光滑性推导出来. 通过对 (3.5) 微分, 以及把函数 ϕ 相对于 Λ 和 $\bar{Q}$ 的导数写成核函数 Z_i 和其正交部分的线性组合形式, 我们可以用类似于处理第一部分的办法得到不等式 (3.15). 与之相关的详细计算可参见文献 [18, 24]. $\square$

4 有限维约化: 一个非线性化问题

本节将把注意力放在一个非线性问题上. 令 $S_\varepsilon[u]$ 如方程 (1.12) 中定义, 则 (1.11) 等价于

$$\begin{cases} S_\varepsilon[u] = 0, & u_+ \neq 0, \text{ 在 } \Omega_\varepsilon \text{ 内成立,} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立.} \end{cases} \quad (4.1)$$

事实上, 如果 u 满足 (4.1), 可以通过最大值原理证明 $u > 0$ 在 Ω_ε 内成立. 观察到

$$S_\varepsilon[W + \phi] = -\Delta(W + \phi) + \mu\varepsilon^2(W + \phi) - n(n-2)(W + \phi)^{\frac{n+2}{n-2}}$$

可以被写作

$$S_\varepsilon[W + \phi] = -\Delta\phi + \mu\varepsilon^2\phi - n(n+2)W^{\frac{4}{n-2}}\phi + R^\varepsilon - n(n-2)N_\varepsilon(\phi), \quad (4.2)$$

其中

$$N_\varepsilon(\phi) = (W + \phi)^{\frac{n+2}{n-2}} - W^{\frac{n+2}{n-2}} - \frac{n+2}{n-2}W^{\frac{4}{n-2}}\phi, \quad (4.3)$$

$$R^\varepsilon = S_\varepsilon[W] = -\Delta W + \mu\varepsilon^2 W - n(n-2)W^{\frac{n+2}{n-2}}. \quad (4.4)$$

从引理 2.1 中得到

$$\begin{cases} \|R^\varepsilon\|_{**} \leq C\varepsilon\Lambda + \varepsilon^2(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, & \|D_{(\Lambda, \bar{Q})}R^\varepsilon\|_{**} \leq C\varepsilon, & n = 4, \\ \|R^\varepsilon\|_{****} \leq C\varepsilon^{\frac{2}{3}}, & \|D_{(\Lambda, \bar{Q}, \eta)}R^\varepsilon\|_{****} \leq C\varepsilon^2, & n = 6. \end{cases} \quad (4.5)$$

现在考虑寻找函数 ϕ , 以及选取一些适当的常数 c_i 使得 ϕ 和 c_i 满足下列四维的线性化问题:

$$\begin{cases} -\Delta(W + \phi) + \mu\varepsilon^2(W + \phi) - 8(W + \phi)^3 = \sum_i c_i Z_i, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 中成立,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \\ \langle Z_i, \phi \rangle = 0, & 0 \leq i \leq 4; \end{cases} \quad (4.6)$$

寻找函数 ϕ , 以及选取一些适当的常数 d_i 使得 ϕ, d_i 满足下列六维的线性化问题:

$$\begin{cases} -\Delta(W + \phi) + \mu\varepsilon^2(W + \phi) - 24(W + \phi)^2 = \sum_i d_i Z_i, & \text{在 } \Omega_\varepsilon \text{ 中成立,} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 上成立,} \\ \langle Z_i, \phi \rangle = 0, & 0 \leq i \leq 7. \end{cases} \quad (4.7)$$

(4.6) 和 (4.7) 中的第一个方程也可以被写为

$$\begin{aligned} -\Delta\phi + \mu\varepsilon^2\phi - 24W^2\phi &= 8N_\varepsilon(\phi) - R^\varepsilon + \sum_i c_i Z_i, \\ -\Delta\phi + \mu\varepsilon^2\phi - 48W\phi &= 24N_\varepsilon(\phi) - R^\varepsilon + \sum_i d_i Z_i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

为了运用压缩映射的办法证明 (4.6) 和 (4.7) 分别在 $\|\phi\|_*$ 和 $\|\phi\|_{***}$ 充分小的集合里有解, 我们需要下面关于高阶项 N_ε 的估计:

引理 4.1 当 $n=4$ 时, 存在不依赖于 Λ 和 $\bar{Q}$ 的常数 $\varepsilon_1 > 0$, 以及不依赖于 $\varepsilon, \Lambda, \bar{Q}$ 的常数 C , 使得对所有的 $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, 若 $\|\phi\|_* \leq C\varepsilon\Lambda$, 则

$$\|N_\varepsilon(\phi)\|_{**} \leq C\varepsilon\Lambda\|\phi\|_*, \quad (4.9)$$

$$\|N_\varepsilon(\phi_1) - N_\varepsilon(\phi_2)\|_{**} \leq C\varepsilon\Lambda\|\phi_1 - \phi_2\|_*. \quad (4.10)$$

当 $n=6$ 时, 存在不依赖于 $\Lambda, \bar{Q}$ 和 η 的常数 $\varepsilon_2 > 0$, 以及不依赖于 $\varepsilon, \Lambda, \bar{Q}$ 和 η 的常数 C , 使得对所有的 $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, 若 $\|\phi\|_{***} \leq C\varepsilon^{2\frac{2}{3}}$, 则

$$\|N_\varepsilon(\phi)\|_{****} \leq C\varepsilon\|\phi\|_{***}, \quad (4.11)$$

$$\|N_\varepsilon(\phi_1) - N_\varepsilon(\phi_2)\|_{****} \leq C\varepsilon\|\phi_1 - \phi_2\|_{***}. \quad (4.12)$$

证明 由于两种情形的证明类似, 这里只考虑四维的情形. 从 (4.3) 中, 我们注意到

$$|N_\varepsilon(\phi)| \leq C(W\phi^2 + |\phi|^3). \quad (4.13)$$

我们有 $\varepsilon^{-3}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\overline{W\phi^2 + |\phi|^3} = \varepsilon(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\int_{\Omega_\varepsilon}(W\phi^2 + |\phi|^3)$, 利用以下的方式估计上式右端的积分项:

$$\begin{aligned} |W\phi^2 + |\phi|^3| &\leq C((\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} + \varepsilon^2(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}})|\phi|^2 + |\phi|^3) \\ &\leq C((\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} + \varepsilon^2(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2})\|\phi\|_*^2 + \langle z - \bar{Q} \rangle^{-3}\|\phi\|_*^3) \\ &\leq C((\varepsilon\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4} + \varepsilon^3(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2})\Lambda)\|\phi\|_*. \end{aligned}$$

作为推论, 有 $\varepsilon^{-3}(-\ln\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\overline{W\phi^2 + |\phi|^3} \leq C\varepsilon^2(-\ln\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\Lambda\|\phi\|_* \leq C\varepsilon\Lambda\|\phi\|_*$. 另一方面,

$$\|\langle z - \bar{Q} \rangle^3(W\phi^2 + |\phi|^3)\|_\infty \leq C\varepsilon\Lambda\|\phi\|_*.$$

因此, (4.9) 成立. 对于 (4.10), 有

$$N_\varepsilon(\phi_1) - N_\varepsilon(\phi_2) = \partial_\vartheta N_\varepsilon(\vartheta)(\phi_1 - \phi_2),$$

其中 $\vartheta = x\phi_1 + (1-x)\phi_2$, $x \in [0, 1]$. 根据 $\partial_\vartheta N_\varepsilon(\vartheta) = 3[(W + \vartheta)^2 - W^2]$, 我们导出

$$\partial_\vartheta N_\varepsilon(\vartheta) \leq C(|W||\vartheta| + \vartheta^2). \quad (4.14)$$

重复 (4.9) 的证明, 可得 (4.10). $\square$

命题 4.1 若 $n=4$, 我们可以找到常数 C , 不依赖于 (2.11) 中定义的 ε, Λ 和 Q , 使得对于充分小的 ε , 问题 (4.6) 会有一个唯一的解 $\phi = \phi(\Lambda, \bar{Q}, \varepsilon)$ 并且满足以下的估计:

$$\|\phi\|_* \leq C\varepsilon\Lambda. \quad (4.15)$$

进一步地, $(\Lambda, \bar{Q}) \rightarrow \phi(\Lambda, \bar{Q}, \varepsilon)$ 在 $*$ 范数意义下是 C^1 连续的, 以及

$$\|D_{(\Lambda, \bar{Q})}\phi\|_* \leq C\varepsilon. \quad (4.16)$$

若 $n = 6$, 则可以找到常数 C , 不依赖于 (2.13) 中定义的 ε 、 Λ 、 η 和 Q , 使得对于充分小的 ε , 问题 (4.7) 会有一个唯一的解 $\phi = \phi(\Lambda, \eta, \bar{Q}, \varepsilon)$ 并且满足以下的估计:

$$\|\phi\|_{***} \leq C\varepsilon^{\frac{8}{3}}. \quad (4.17)$$

进一步地, $(\Lambda, \eta, \bar{Q}) \rightarrow \phi(\Lambda, \eta, \bar{Q}, \varepsilon)$ 在 $***$ 范数意义下是 C^1 连续的, 以及

$$\|D_{(\Lambda, \eta, \bar{Q})}\phi\|_{***} \leq C\varepsilon^{\frac{5}{3}}. \quad (4.18)$$

证明 这里只给出四维情形的证明. 同文献 [18] 的思路一样, 考虑从空间 $\mathcal{F} = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid \|\phi\|_* \leq C'\varepsilon\Lambda\}$ 到 $H^1(\Omega_\varepsilon)$ 定义的映射

$$A_\varepsilon(\phi) = L_\varepsilon(8N_\varepsilon(\phi) + R^\varepsilon),$$

其中 C' 是一个充分大的数, 稍后再确定, L_ε 由命题 3.1 给出. 我们注意到求解问题 (4.6) 等价于找到映射 A_ε 的不动点. 另一方面, 对于空间 $\mathcal{F}$, 利用 (4.5)、命题 3.1 和引理 4.1, 有

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon(\phi)\|_* &\leq 8\|L_\varepsilon(N_\varepsilon(\phi))\|_* + \|L_\varepsilon(R^\varepsilon)\|_* \leq C_1(\|N_\varepsilon(\phi)\|_{**} + \varepsilon\Lambda) \\ &\leq C_2C'\varepsilon^2\Lambda + C_1\varepsilon\Lambda \leq C'\varepsilon\Lambda, \end{aligned}$$

其中 $C' = 2C_1$ 并且 ε 充分小. 上式推出 A_ε 将空间 $\mathcal{F}$ 映到其自身. 现在证明 A_ε 是一个压缩映射. 事实上, 对于空间 $\mathcal{F}$ 中的函数 ϕ_1 和 ϕ_2 , 在 ε 充分小时,

$$\|A_\varepsilon(\phi_1) - A_\varepsilon(\phi_2)\|_* \leq C\|N_\varepsilon(\phi_1) - N_\varepsilon(\phi_2)\|_{**} \leq C\varepsilon\Lambda\|\phi_1 - \phi_2\|_* \leq \frac{1}{2}\|\phi_1 - \phi_2\|_*.$$

利用压缩映射定理可知, A_ε 在空间 $\mathcal{F}$ 中有一个唯一的不动点, 即问题 (4.6) 有一个唯一的解 ϕ 并且有 $\|\phi\|_* \leq C'\varepsilon\Lambda$.

我们将证明映射 $(\Lambda, \bar{Q}) \rightarrow \phi(\Lambda, \bar{Q})$ 是 C^1 连续的. 注意到, 如果对 $\mathcal{F}$ 中的函数 ψ , 设置

$$B(\Lambda, \bar{Q}, \psi) \equiv \psi - L_\varepsilon(8N_\varepsilon(\psi) + R^\varepsilon),$$

那么 ϕ 可以被定义为以下方程的解:

$$B(\Lambda, \bar{Q}, \phi) = 0. \quad (4.19)$$

我们有 $\partial_\psi B(\Lambda, \bar{Q}, \psi)[\theta] = \theta - 8L_\varepsilon(\theta(\partial_\psi N_\varepsilon)(\psi))$. 利用命题 3.1 和方程 (4.14), 可得

$$\begin{aligned} \|L_\varepsilon(\theta(\partial_\psi N_\varepsilon)(\psi))\|_* &\leq C\|\theta(\partial_\psi N_\varepsilon)(\psi)\|_{**} \leq \|\langle z - \bar{Q} \rangle^{-1}(\partial_\psi N_\varepsilon)(\psi)\|_{**}\|\theta\|_* \\ &\leq C\|\langle z - \bar{Q} \rangle^{-1}(W_+|\psi| + |\psi|^2)\|_{**}\|\theta\|_*. \end{aligned}$$

运用 (2.16) 和 (3.10), 有 $\|L_\varepsilon(\theta(\partial_\psi N_\varepsilon)(\psi))\|_* \leq C\varepsilon\|\theta\|_*$. 所以, $\partial_\psi B(\Lambda, \bar{Q}, \phi)$ 是可逆的并且其逆映射是一致有界的. 那么利用 $(\Lambda, \bar{Q}, \psi) \mapsto L_\varepsilon(N_\varepsilon(\psi))$ 是 C^1 连续的以及隐函数定理可知, $(\Lambda, \bar{Q}) \mapsto \phi(\Lambda, \bar{Q})$ 也是 C^1 连续的.

最后, 我们证明 (4.16). 对 (4.19) 关于参数 Λ 求导, 有

$$\partial_{\Lambda}\phi = (\partial_{\psi}B(\Lambda, \xi, \phi))^{-1}((\partial_{\Lambda}L_{\varepsilon})(N_{\varepsilon}(\phi)) + L_{\varepsilon}((\partial_{\Lambda}N_{\varepsilon})(\phi)) + L_{\varepsilon}(\partial_{\Lambda}R^{\varepsilon})).$$

运用命题 3.1, 可得

$$\|\partial_{\Lambda}\phi\|_* \leq C(\|N_{\varepsilon}(\phi)\|_{**} + \|(\partial_{\Lambda}N_{\varepsilon})(\phi)\|_{**} + \|\partial_{\Lambda}R^{\varepsilon}\|_{**}).$$

借助引理 4.1 和 (4.15), 我们得到 $\|N_{\varepsilon}(\phi)\|_{**} \leq C\varepsilon^2$. 根据 N_{ε} 的定义, 有

$$|\partial_{\Lambda}N_{\varepsilon}(\phi)| = 3\phi^2|\partial_{\Lambda}W|.$$

结合 $|\partial_{\Lambda}W(z)| \leq C(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} + \varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}})$, 可得 $\|\partial_{\Lambda}N_{\varepsilon}(\phi)\|_{**} \leq C\varepsilon$. 最后, 利用 (4.5), 可以证明 $\|\partial_{\Lambda}\phi\|_* \leq C\varepsilon$. 通过同样的办法我们可以估计出 ϕ 关于参数 $\bar{Q}$ 的导数. 这样就完成了全部的证明. $\square$

5 有限维约化: 约化的能量

定义四、六维约化的能量泛函如下:

$$I_{\varepsilon}(\Lambda, Q) \equiv J_{\varepsilon}[W_{\Lambda, \bar{Q}} + \phi_{\varepsilon, \Lambda, \bar{Q}}], \quad n = 4, \quad (5.1)$$

$$I_{\varepsilon}(\Lambda, \eta, Q) \equiv J_{\varepsilon}[W_{\Lambda, \eta, \bar{Q}} + \phi_{\varepsilon, \Lambda, \eta, \bar{Q}}], \quad n = 6. \quad (5.2)$$

我们有下面的命题:

命题 5.1 函数 $u = W_{\Lambda, \bar{Q}} + \phi_{\varepsilon, \Lambda, \bar{Q}}$ 是问题 (1.11) 在四维情形的解当且仅当参数 $(\Lambda, \bar{Q})$ 是 I_{ε} 的临界值. 函数 $u = W_{\Lambda, \eta, \bar{Q}} + \phi_{\varepsilon, \Lambda, \eta, \bar{Q}}$ 是问题 (1.11) 在六维情形的解当且仅当参数 $(\Lambda, \eta, \bar{Q})$ 是 I_{ε} 的临界值.

证明 这里只给出六维情形的证明, 四维情形可以类似地证明. 注意到 $u = W + \phi$ 是方程 (1.11) 的解当且仅当 u 是 J_{ε} 的临界点, 这也等价于 (4.7) 中的系数满足 $d_i = 0$, 通过以下的关系:

$$\begin{aligned} \langle Z_0, Y_0 \rangle &= \|Y_0\|_{\varepsilon}^2 = \gamma_0 + o(1), \\ \langle Z_i, Y_i \rangle &= \|Y_i\|_{\varepsilon}^2 = \gamma_1 + o(1), \quad 1 \leq i \leq 6, \\ \langle Z_7, Y_7 \rangle &= \|Y_7\|_{\varepsilon}^2 = \gamma_2 \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (5.3)$$

其中 γ_0 、 γ_1 和 γ_2 均为正的常数, 以及

$$\begin{aligned} \langle Z_i, Y_j \rangle &= o(1), \quad i \neq j, \quad 0 \leq i, j \leq 6, \\ \langle Z_i, Y_j \rangle &= O(\varepsilon^3), \quad i \neq j, \quad i = 7 \quad \text{或者} \quad j = 7, \end{aligned} \quad (5.4)$$

我们有

$$J'_{\varepsilon}[W + \phi][Y_i] = 0, \quad 0 \leq i \leq 7. \quad (5.5)$$

另一方面, 从 (5.2) 推出 $I'_{\varepsilon}(\Lambda, \eta, Q) = 0$ 等价于 $J'_{\varepsilon}(W + \phi)$ 作用在 $W + \phi$ 关于 Λ 、 η 和 $\bar{Q}$ 的导数为 0. 利用 Y_i 的定义和命题 4.1, 有

$$\frac{\partial(W + \phi)}{\partial \Lambda} = Y_0 + y_0, \quad \frac{\partial(W + \phi)}{\partial \bar{Q}_i} = Y_i + y_i, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad \frac{\partial(W + \phi)}{\partial \eta} = Y_7 + y_7,$$

其中 $\|y_i\|_{***} = O(\varepsilon^2)$, $0 \leq i \leq 7$. 我们写下如下的方程:

$$-\Delta(W + \phi) + \mu\varepsilon^2(W + \phi) - 24(W + \phi)^2 = \sum_{j=0}^7 \alpha_j Z_j,$$

然后记 $a_{ij} = \langle y_i, Z_j \rangle$. 因为对于所有的函数 θ , 若 $\langle \theta, Z_i \rangle = (\theta, Y_i)_\varepsilon = 0$ ($0 \leq i \leq 7$), 则 $J'_\varepsilon[W + \phi][\theta] = 0$, 我们推出 $I'_\varepsilon(\Lambda, \eta, \bar{Q}) = 0$ 等价于 $([b_{ij}] + [a_{ij}])[\alpha_j] = 0$, 其中 $b_{ij} = \langle Y_i, Z_j \rangle$. 利用 $\|y_i\|_{***} = O(\varepsilon^2)$ 以及 Z_i 和 Y_i ($0 \leq i \leq 7$) 的表达式, 可以直接得到

$$\begin{aligned} b_{00} &= \gamma_0 + o(1), \quad b_{ii} = \gamma_1 + o(1), \quad 1 \leq i \leq 6, \quad b_{77} = \gamma_2 \varepsilon^3, \\ b_{ij} &= o(1), \quad 0 \leq i \neq j \leq 6, \quad b_{ij} = O(\varepsilon^3), \quad i = 7 \text{ 或者 } j = 7, \quad i \neq j, \\ a_{ij} &= O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq i \leq 7, \quad 0 \leq j \leq 6, \quad a_{i7} = O(\varepsilon^4), \quad 0 \leq i \leq 7. \end{aligned}$$

从上面的计算可知, $[b_{ij} + a_{ij}]$ 是一个可逆的矩阵, 这可以推出 $\alpha_i = 0$. 于是可得 $I'_\varepsilon(\Lambda, \eta, \bar{Q}) = 0$ 等价于 (5.5), 于是命题 5.1 证毕. $\square$

在证明了命题 5.1 之后, 接下来将考虑 I_ε 的临界值. 首先, 计算出 I_ε 的表达式.

命题 5.2 当 $n = 4$ 时, 若 ε 充分小, 则

$$I_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) = J_\varepsilon[W] + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\varepsilon,4}(\Lambda, Q), \quad (5.6)$$

其中 $\sigma_{\varepsilon,4} = O(\Lambda^2) + o_\varepsilon(1)$, $D_\Lambda(\sigma_{\varepsilon,4}) = O(\Lambda) + o_\varepsilon(1)$. 当 $n = 6$ 时, 若 ε 充分小, 则

$$I_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) = J_\varepsilon[W] + \varepsilon^4 \sigma_{\varepsilon,6}(\Lambda, \eta, Q), \quad (5.7)$$

其中 $\sigma_{\varepsilon,6} = o_\varepsilon(1)$, $D_{\Lambda,\eta}(\sigma_{\varepsilon,6}) = o_\varepsilon(1)$.

证明 这里只给出四维情形的证明, 六维情形的证明类似. 利用 (5.1)、Taylor 展开和 $J'_\varepsilon[W + \phi][\phi] = 0$, 我们有

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\Lambda, Q) - J_\varepsilon[W] &= J_\varepsilon[W + \phi] - J_\varepsilon[W] = - \int_0^1 J''_\varepsilon(W + t\phi)[\phi, \phi](t) dt \\ &= - \int_0^1 \left(\int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla \phi|^2 + \mu\varepsilon^2 \phi^2 - 24(W + t\phi)^2 \phi^2) \right) t dt, \end{aligned}$$

由此得到

$$I_\varepsilon(\Lambda, Q) - J_\varepsilon[W] = - \int_0^1 \left(8 \int_{\Omega_\varepsilon} (N_\varepsilon(\phi)\phi + 3[W^2 - (W + t\phi)^2]\phi^2) \right) t dt + \int_{\Omega_\varepsilon} R^\varepsilon \phi. \quad (5.8)$$

我们可以按如下的方式估计 (5.8) 右端的第一项:

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} N_\varepsilon(\phi)\phi \right| \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^4 + |W\phi^3| = O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon).$$

类似地, 对于 (5.8) 右端的第二项, 我们得到

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} [W^2 - (W + t\phi)^2]\phi^2 \right| \leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\phi|^4 + |W\phi^3| = O(\varepsilon^4 \ln \varepsilon).$$

对于 (5.8) 中的最后一项, 有

$$|R^\varepsilon|_* = |S_\varepsilon[W]| = O(\varepsilon^4(-\ln \varepsilon)\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} + \varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}) \\ + O(\Lambda) \left(\frac{\varepsilon^4}{-\ln \varepsilon} \left| \ln \frac{1}{\varepsilon(1+|z-\bar{Q}|)} \right| + \frac{\varepsilon^4}{(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

在 Ω_ε 一致成立. 通过简单的计算可得 $|\int_{\Omega_\varepsilon} R^\varepsilon \phi| = O(\varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}\Lambda^2 + \varepsilon^3(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}})$, 这里用到了 $\|\phi\|_* = O(\varepsilon\Lambda)$. 这就完成了命题 5.2 第一部分的证明.

对方程 (5.8) 的两端进行求导, 利用 (4.3)、(4.5) 以及引理 2.1, 依次对每一项进行估计, 然后重复同样的讨论过程, 我们可以给出 I_ε 关于 Λ 导数的估计. 命题 5.2 证毕. $\square$

6 定理 1.1 的证明

本节将分别证明 $I_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 和 $I_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q)$ 存在着临界点, 从而结合命题 5.1 证明出定理 1.1. 根据命题 5.2 和引理 2.1, 定义

$$K_\varepsilon(\Lambda, Q) = \frac{I_\varepsilon(\Lambda, Q) - 2 \int_{\mathbb{R}^4} U^4}{(-\frac{\ln \varepsilon}{c_1})^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2}, \quad (6.1)$$

$$K_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) = \frac{I_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) - 4 \int_{\mathbb{R}^6} U^3}{\varepsilon^3}. \quad (6.2)$$

对于四维的情形, 有

$$K_\varepsilon(\Lambda, Q) = \frac{1}{4} c_4 \Lambda^2 \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) - \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2|\Omega|} + \frac{1}{2} c_4^2 \Lambda^2 H(Q, Q) \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{\Lambda^2}{-\ln \varepsilon} + \varepsilon \right), \quad (6.3)$$

对于六维的情形, 有

$$K_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) = \left(\frac{1}{2} \eta^2 |\Omega| - c_6 \Lambda^2 \eta + \frac{1}{48} c_6 \Lambda^2 - 8 \eta^3 |\Omega| \right) + \frac{1}{2} c_6^2 \Lambda^4 H(Q, Q) \varepsilon \\ + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \varepsilon \int_{\Omega} \frac{\Lambda^2}{|x - Q|^4} + o(\varepsilon). \quad (6.4)$$

接下来将考虑 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$, 找出其相对于 Λ 和 Q 的临界点, 以及找出 $K_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q)$ 相对于 Λ 、 η 和 Q 的临界点.

首先, 考虑四维情形时的 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$. 根据参数 Λ 和 Q 的设定, 我们知道 Λ 和 Q 落在一个紧致集里, 从而可以得到 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 在这个紧致的集合里拥有一个最大值. 我们断言:

断言 6.1 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 相对于 Λ 和 Q 的最大值点不会落在参数区域的边界上.

一旦我们能证明上述断言, 那么就可以证明 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 存在一个内点极值点. 在我们证明这个断言之前, 首先考虑

$$F_\varepsilon(\Lambda) = \frac{1}{4} c_4 \Lambda^2 \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) - \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2|\Omega|}.$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} [F_\varepsilon(\Lambda)] = \frac{1}{2} c_4 \Lambda \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) - \frac{1}{4} c_4 \Lambda \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) - \frac{c_4^2 \Lambda}{|\Omega|},$$

选取 $c_1 = \frac{2c_4}{|\Omega|}$, 我们可以找到

$$\Lambda^* = \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \in \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^\beta, \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\varepsilon^{-\beta}\right),$$

其中 $\beta \in (0, \frac{1}{3})$ 是一个固定的常数, 使得 $\frac{\partial}{\partial \Lambda} F_\varepsilon|_{\Lambda=\Lambda^*} = 0$. 我们可得 Λ^* 是函数 $F_\varepsilon(\Lambda)$ 在 $[\Lambda_{4,1}, \Lambda_{4,2}]$ 中的最大值点, 其中 $\Lambda_{4,1} = \exp(-\frac{1}{2})\varepsilon^\beta$, $\Lambda_{4,2} = \exp(-\frac{1}{2})\varepsilon^{-\beta}$. 为了证明上述断言, 我们需要在能量的展开式中考虑 Λ 的影响. 通过第 7 节中第一部分的计算, 我们有

$$K_\varepsilon(\Lambda, Q) = \frac{1}{4}c_4\Lambda^2 \ln \frac{1}{\Lambda\varepsilon} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right) - \frac{c_4^2\Lambda^2}{2|\Omega|} + \frac{1}{2}c_4^2\Lambda^2 H(Q, Q) \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} + O\left(\frac{\Lambda^2}{-\ln \varepsilon} + \varepsilon\right).$$

选取 $\Lambda = \Lambda^*$, $Q = p$. (这里 p 是函数 $H(Q, Q)$ 取得最大值的点, 这样的点是不难找到的. 我们注意到这样一个事实: 随着 $d(Q, \partial\Omega) \rightarrow 0$, $H(Q, Q) \rightarrow -\infty$, 详细证明参见文献 [15] 及其参考文献. 因此我们可以找到这样的点 p .)

我们将证明最大值点不会落在 $\partial\mathcal{M}_{\delta_4}$. 选取 δ_4 使得 $\omega_1 < \max_{\partial\mathcal{M}_{\delta_4}} H < \omega_2$, 其中 ω_1 和 ω_2 是充分大的负数. 接下来固定集合 $\mathcal{M}_{\delta_4}$. 我们可以很容易发现 $K_\varepsilon(\Lambda, Q) < K_\varepsilon(\Lambda, p)$ 对任意的 $Q \in \partial\mathcal{M}_{\delta_4}$ 和 $\Lambda \in [\Lambda_{4,1}, \Lambda_{4,2}]$ 成立.

接下来证明 $K_\varepsilon(\Lambda^*, p) > K_\varepsilon(\Lambda_{4,2}, Q)$. 不难发现

$$F_\varepsilon[\Lambda_{4,2}] \leq c\varepsilon^{-2\beta},$$

其中 $c < 0$. 考虑到 $K_\varepsilon(\Lambda_{4,2}, Q)$ 中其他项都是 $\varepsilon^{-2\beta}$ 的无穷小量, 于是可以找到常数 $c < 0$ 使得对于任意的 $Q \in \mathcal{M}_{\delta_4}$, 有 $K_\varepsilon(\Lambda_{4,2}, Q) \leq c\varepsilon^{-2\beta}$. 另一方面, 根据 Λ^* 和 p 的选取, 得到 $K_\varepsilon(\Lambda^*, p) = O(1)$. 因此, 我们可以证明 $K_\varepsilon(\Lambda^*, p) > K_\varepsilon(\Lambda_{4,2}, Q)$, $\forall Q \in \mathcal{M}_{\delta_4}$.

最后来证明最大值点的 Λ 不会满足 $\Lambda = \Lambda_{4,1}$. 选取 $\Lambda = \varepsilon^{\beta/2}$, $Q = p$, 直接的计算推导出

$$K_\varepsilon(\varepsilon^{\beta/2}, p) = \frac{\beta c_4^2 \varepsilon^\beta}{4|\Omega|} (1 + o(1)), \quad K_\varepsilon(\Lambda_{4,1}, Q) = \frac{\beta c_4^2 \varepsilon^{2\beta}}{2|\Omega|} (1 + o(1)).$$

当 ε 充分小时, $K_\varepsilon(\varepsilon^{\beta/2}, p) > K_\varepsilon(\Lambda_{4,1}, Q)$, $\forall Q \in \mathcal{M}_{\delta_4}$. 于是, 我们证明了断言 6.1 在四维情形时是正确的. 换言之, 我们可得函数 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 在 $[\Lambda_{4,1}, \Lambda_{4,2}] \times \mathcal{M}_{\delta_4}$ 的内部有一个最大值点. 因此, 我们找到了函数 $K_\varepsilon(\Lambda, Q)$ 关于 Λ 和 Q 的极值点.

对于六维的情形. 令 $\eta = \frac{1}{48} + a\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, $\frac{c_6\Lambda^2}{|\Omega|} = \frac{1}{96} + b\varepsilon^{\frac{2}{3}}$, 则

$$K_\varepsilon(a, b, Q) := K_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q) = \frac{1}{6912}|\Omega| + [F(Q) - (8a^3 + ab)|\Omega|]\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6.5)$$

其中 $F(x) = \frac{|\Omega|}{18432}(|\Omega|H(x, x) + \frac{1}{c_6} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^4} dy)$, $-\eta_6 \leq a \leq \eta_6$, $-\Lambda_6 \leq b \leq \Lambda_6$.

设定 $C_0 = F(p_0)$, p_0 为 $F(x)$ 取得最大值的点. 事实上, 随着 $d(Q, \partial\Omega) \rightarrow 0$, $H(Q, Q) \rightarrow -\infty$, 以及 $I(x) = \int_\Omega \frac{1}{|x-y|^4} dy$ 在 Ω 内一致有界, 于是, 我们总可以选取满足上述要求的点 p_0 . 现在引入另外 5 个常数 C_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 其中 $C_2 < C_1 < C_0$, $0 < C_3 < C_4 < \eta_6$, $0 < C_3 < C_5 < \Lambda_6$, 具体的值随后给出.

设定

$$\Sigma_0 = \{-C_4 \leq a \leq C_4, -C_5 \leq b \leq C_5, Q \in \mathcal{N}_{C_2}\}, \quad (6.6)$$

其中 $\mathcal{N}_{C_i} = \{q : F(q) > C_i\}$ ($i = 1, 2$) 以及选取 δ_6 满足 $\mathcal{N}_{C_2} \subset \mathcal{M}_{\delta_6}$.

定义

$$B = \{(a, b, Q) \mid (a, b) \in B_{C_3}(0), Q \in \overline{\mathcal{N}_{C_1}}\}, \quad B_0 = \{(a, b) \mid (a, b) \in B_{C_3}(0)\} \times \partial\mathcal{N}_{C_1}, \quad (6.7)$$

其中 $B_r(0) := \{0 \leq a^2 + b^2 \leq r\}$.

显然, $B_0 \subset B \subset \Sigma_0$, 这里 B 是一个紧致的集合. 令 Γ 是 $B \rightarrow \Sigma_0$ 满足 $\varphi(y) = y$ ($\forall y \in B_0$) 的所有连续映射组成的集合. 我们按如下方式定义 c :

$$c = \min_{\varphi \in \Gamma} \max_{y \in B} K_\varepsilon(\varphi(y)).$$

我们将要证明 c 是一个极值. 出于这个目的, 我们将要验证以下两个条件:

(T1) $\max_{y \in B_0} K_\varepsilon(\varphi(y)) < c, \forall \varphi \in \Gamma$;

(T2) 对于 $\partial\Sigma_0$ 上所有满足 $K_\varepsilon(y) = c$ 的点 y , 我们找到 y 相对于集合 $\partial\Sigma_0$ 的切向向量 τ_y 使得 $\partial_{\tau_y} K_\varepsilon(y) \neq 0$.

假定 (T1) 和 (T2) 成立. 利用经典的形变理论我们可以证明出 c 是 $K_\varepsilon(\Lambda, \eta, Q)$ 在集合 Σ_0 内的一个 (拓扑非平凡) 极值点 (同样的记号在文献 [25] 中被引入用来寻找平均曲率退化的极值点).

为了证明 (T1) 和 (T2), 定义 $\varphi(y) = \varphi(a, b, Q) = (\varphi_a, \varphi_b, \varphi_Q)$, 其中 $(\varphi_a, \varphi_b) \in [-C_4, C_4] \times [-C_5, C_5]$, $\varphi_Q \in \mathcal{N}_{C_2}$.

对于任意的映射 $\varphi \in \Gamma$ 和 $\mathcal{N}_{C_1}$ 中的点 Q , $Q \rightarrow \varphi_Q(a, b, Q)$ 是一个从 $\mathcal{N}_{C_1}$ 到 $\mathcal{N}_{C_2}$ 的连续函数并满足 $\varphi_Q(a, b, Q) = Q, \forall Q \in \partial\mathcal{N}_{C_1}$. 设 $\mathcal{D}$ 是包含集合 $\mathcal{N}_{C_2}$ 最小的球, 定义从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{D}$ 的映射 $\tilde{\varphi}_Q$ 如下:

$$\tilde{\varphi}_Q(x) = \varphi_Q(x), \quad x \in \mathcal{N}_{C_1},$$

$$\tilde{\varphi}_Q(x) = Id, \quad x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{N}_{C_1}.$$

我们可以证明存在 $Q' \in \mathcal{D}$ 使得 $\tilde{\varphi}_Q(Q') = p_0$. 如若不成立, $\frac{\tilde{\varphi}_Q - p_0}{|\tilde{\varphi}_Q - p_0|}$ 提供了一个从 $\mathcal{D}$ 到 S^5 的连续映射, 然而 Brouwer 不动点定理告诉我们这个是不可能的. 于是, 存在 $Q' \in \mathcal{D}$ 使得 $\tilde{\varphi}_Q(Q') = p_0$. 借助 $\tilde{\varphi}$ 的定义, 我们可以得到 $Q' \in \mathcal{N}_{C_1}$. 那么,

$$\max_{y \in B} K_\varepsilon(\varphi(y)) \geq K_\varepsilon(\varphi_a(a, b, Q'), \varphi_b(a, b, Q'), p_0) \geq \frac{1}{6912}|\Omega| + (C_0 - C_6|\Omega|)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6.8)$$

其中 $C_6 = 8C_4^3 + C_4C_5$ 代表了 $8a^3 + ab$ 在 $[-C_4, C_4] \times [-C_5, C_5]$ 中的最大值. 作为推论, 有

$$c \geq \frac{1}{6912}|\Omega| + (C_0 - C_6|\Omega|)\varepsilon + o(\varepsilon). \quad (6.9)$$

对于 $(a, b, Q) \in B_0$, 有 $F(\varphi_Q(a, b, Q)) = C_1$. 于是,

$$K_\varepsilon(a, b, Q) \leq \frac{1}{6912}|\Omega| + (C_1 + C_7|\Omega|)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6.10)$$

其中 $C_7 = \max_{(a,b) \in B_{C_3}(0)} 8a^3 + ab < 8C_3^3 + C_3^2$.

如果选取 $C_0 - C_1 > (8C_4^3 + C_4C_5 + 8C_3^3 + C_3^2)|\Omega| > (C_6 + C_7)|\Omega|$, 那么, $\max_{y \in B_0} K_\varepsilon(\varphi(y)) < c$ 成立. 这样就推出了 (T1).

为了证明 (T2), 我们观察到

$$\partial\Sigma_0 := \{(a, b, Q) \mid a = -C_4 \text{ 或者 } a = C_4 \text{ 或者 } b = -C_5 \text{ 或者 } b = C_5 \text{ 或者 } Q \in \partial\mathcal{N}_{C_2}\}.$$

因为 C_4 和 C_5 是任意的, 所以可以设定 $0 < 24C_4^2 < C_5$. 那么当 $a = -C_4$ 或者 $a = C_4$, 可以选取 $\tau_y = \frac{\partial}{\partial b}$; 当 $b = -C_5$ 或者 $b = C_5$, 可以选取 $\tau_y = \frac{\partial}{\partial a}$. 根据 C_4 和 C_5 的选取, 我们可以证明 $\partial_{\tau_y} K_\varepsilon(y) \neq 0$. 最后考虑若 $Q \in \partial\mathcal{N}_{C_2}$, 则有

$$K_\varepsilon(a, b, Q) \leq \frac{1}{6912}|\Omega| + (C_2 + C_7|\Omega|)\varepsilon + o(\varepsilon), \quad (6.11)$$

其中右端项在 $C_2 < C_1 + C_7|\Omega| - C_6|\Omega|$ 时小于 c . 于是我们就验证了 (T2).

综上所述, 我们证明了当 ε 充分小时, c 是一个临界值, 也就是 K_ε 在集合 Σ_0 中存在内部的极值点. 从而推出 K_ε 在集合 (2.13) 存在极值点.

定理 1.1 的证明 若 $n = 4$, ε 充分小时, 我们证明了 I_ε 有一个极值点 $(\Lambda^\varepsilon, Q^\varepsilon)$. 令 $u_\varepsilon = W_{\Lambda^\varepsilon, \bar{Q}^\varepsilon, \varepsilon}$, 则 u_ε 是问题 (1.12) 在四维情形时的一个非平凡解. 利用最大值原理可以得到 u_ε 于 Ω_ε 满足 $u_\varepsilon > 0$. 令 $u_\mu = \varepsilon^{-1}u_\varepsilon(x/\varepsilon)$. 根据我们的构造, u_μ 满足定理 1.1 所需的所有条件, 于是我们完成了四维情形的证明. 类似地, 我们也可以证明六维的情形. 定理 1.1 证毕. $\square$

7 引理 2.1 的证明

我们把证明分为两部分. 首先考虑四维的情形. 根据 W 的定义、(2.10) 和 (2.15), 可得

$$\begin{aligned} S_\varepsilon[W] &= -\Delta W + \mu\varepsilon^2 W - 8W^3 \\ &= 8U^3 + \varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) \hat{U} - \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta(R_{\varepsilon, \Lambda, Q} \chi) - 8W^3 \\ &= O(\varepsilon^4(-\ln \varepsilon)\langle z - \bar{Q} \rangle^{-2} + \varepsilon^2(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}\langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}) \\ &\quad + O(\Lambda) \left(\frac{\varepsilon^4}{-\ln \varepsilon} \left| \ln \frac{1}{\varepsilon(1 + |z - \bar{Q}|)} \right| + \frac{\varepsilon^4}{(-\ln \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

同样的过程, 我们可得 $D_\Lambda S_\varepsilon[W]$ 和 $D_{\bar{Q}} S_\varepsilon[W]$ 的估计.

接下来证明能量估计 (2.23). 从 (2.15) 和 (2.16) 可以得到

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W|^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} W^2 \\ &= 8 \int_{\Omega_\varepsilon} U^3 W + \varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} W - \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(R_\chi) W. \end{aligned} \quad (7.1)$$

对于方程 (7.1) 右端的第一项, 有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U^3 W = \int_{\Omega_\varepsilon} U^4 + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U^3 + \frac{c_4 \Lambda}{|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} U^3. \quad (7.2)$$

注意到 $\int_{\Omega_\varepsilon} U^4 = \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + O(\varepsilon^4)$, $\int_{\Omega_\varepsilon} U^3 = \frac{c_4 \Lambda}{8} + O(\varepsilon^2)$, 则

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U^3 W = \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + \frac{c_4^2 \Lambda^2}{8|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U^3 + O\left(\varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

对于上述等式右端的第三项, 有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U^3 = - \int_{\Omega_\varepsilon} \Psi U^3 - c_4 \Lambda \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} H(x, Q) U^3 + \int_{\Omega_\varepsilon} (R_\chi) U^3$$

$$= -\frac{c_4\Lambda^2}{16} \ln \frac{1}{\Lambda\varepsilon} - \frac{c_4^2\Lambda^2}{8} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} H(Q, Q) + O(\Lambda^2).$$

从而,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U^3 W &= \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + \frac{c_4^2\Lambda^2}{8|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{c_4\Lambda^2}{16} \ln \frac{1}{\Lambda\varepsilon} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{c_4^2\Lambda^2}{8} \varepsilon^2 H(Q, Q) + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 + \varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

对于方程 (7.1) 右端的第二项, 有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} W = \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U}^2 + \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U}.$$

利用

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U &= O\left(\varepsilon^{-2} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \Lambda^2 \right), \quad \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U}^2 = O(\varepsilon^{-4} (-\ln \varepsilon) \Lambda^2), \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} &= \varepsilon^{-4} \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \frac{\Lambda}{|x-Q|^2} + O(\varepsilon^{-4} \Lambda), \end{aligned}$$

其中我们运用了 $\int_{\Omega} G(x, Q) = 0$, 则有

$$\varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right) \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} W = \frac{c_4\Lambda^2}{|\Omega|} \varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x-Q|^2} + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 \right). \quad (7.4)$$

对于方程 (7.1) 右端剩余的一项, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(R\chi) W &= \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(R\chi) + O(\Lambda^2) \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial(R\chi)}{\partial\nu} + O(\Lambda^2) \\ &= \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-1} \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial(U - \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi - c_4\Lambda\varepsilon^2 H)}{\partial\nu} + O(\Lambda^2) \\ &= \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-1} \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left(U - \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi - c_4\Lambda\varepsilon^2 H \right) + O(\Lambda^2) \\ &= \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-1} \frac{c_4\Lambda}{|\Omega|} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(-8U^3 + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} U + c_4\Lambda\varepsilon^4 \frac{1}{|\Omega|} \right) + O(\Lambda^2) \\ &= \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{c_4\Lambda^2}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon^2\Lambda^2 + |x-Q|^2} + O(\Lambda^2 + \varepsilon^2(-\ln \varepsilon)). \end{aligned} \quad (7.5)$$

(7.3)–(7.5) 推出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla W|^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} W^2 \right) &= 4 \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{c_4^2\Lambda^2}{2|\Omega|} - \frac{c_4^2\Lambda^2}{2} H(Q, Q) \varepsilon^2 \\ &\quad - \frac{c_4\Lambda^2}{4} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{\Lambda\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 \right) \end{aligned}$$

$$+ O\left(\varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (7.6)$$

最后, 我们计算 $\int_{\Omega_\varepsilon} W^4$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} W^4 &= \int_{\Omega_\varepsilon} U^4 + 4\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} U^3 \hat{U} + 4\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{c_4 \Lambda}{|\Omega|} \int_{\Omega_\varepsilon} U^3 + O\left(\varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-2}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 - \frac{c_4 \Lambda^2}{4} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} - \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2} \varepsilon^2 H(Q, Q) + \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2\right) + O\left(\varepsilon^4 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-2}\right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

利用 (7.6) 和 (7.7), 可得

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[W] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W|^2 + \frac{\mu \varepsilon^2}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} W^2 - 2 \int_{\Omega_\varepsilon} W^4 \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^4} U_{1,0}^4 + \frac{c_4 \Lambda^2}{4} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{\Lambda \varepsilon} - \frac{c_4^2 \Lambda^2}{2|\Omega|} \varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} c_4^2 \Lambda^2 \varepsilon^2 H(Q, Q) + O\left(\varepsilon^2 \left(\frac{c_1}{-\ln \varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \Lambda^2\right) + O(\varepsilon^4 (-\ln \varepsilon)^2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

在本节的最后, 我们证明 (2.24)–(2.28). 通过 W 的定义、(2.10) 和 (2.15), 我们有

$$\begin{aligned} S_\varepsilon[W] &= -\Delta W + \varepsilon^3 W - 24W^2 \\ &= 24U^2 + \varepsilon^6 \hat{U} - \varepsilon^3 \Delta(R\chi) + \varepsilon^6 \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|}\right) - 24U^2 - 24\eta^2 \varepsilon^6 + O(\varepsilon^3 \langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}) \\ &= -\varepsilon^6 \left(24\eta^2 - \eta + \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|}\right) + O(\varepsilon^3 \langle z - \bar{Q} \rangle^{-4}) \\ &= O(\langle z - \bar{Q} \rangle^{-3\frac{2}{3}} \varepsilon^3). \end{aligned}$$

利用同样的办法, 我们可以得到 $D_\Lambda S_\varepsilon[W]$ 、 $D_{\bar{Q}} S_\varepsilon[W]$ 和 $D_\eta S_\varepsilon[W]$ 的估计. 接下来计算能量的展开式. 从 (2.15) 和 (2.16) 推出

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W|^2 + \varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} W^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} (-\Delta W + \varepsilon^3 W) W \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(24U^2 + \varepsilon^6 \hat{U} - \varepsilon^3 \Delta(R\chi) + \varepsilon^6 \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|}\right)\right) W. \end{aligned} \quad (7.9)$$

对于 (7.9) 右端的第一项, 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 W &= \int_{\Omega_\varepsilon} U^3 + \varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} U^2 + \eta \varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \frac{1}{24} c_6 \eta \Lambda^2 \varepsilon^3 - \varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 \Psi - c_6 \Lambda^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 H + O(\varepsilon^5) \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \frac{1}{24} c_6 \eta \Lambda^2 \varepsilon^3 - \frac{1}{24} c_6^2 \Lambda^4 \varepsilon^4 H(Q, Q) - \frac{1}{576} c_6 \Lambda^2 \varepsilon^3 + O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (7.10)$$

对于 (7.9) 右端的第二和三项, 类似于四维情形处理的方法, 可得

$$\varepsilon^6 \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} W = \varepsilon^6 \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} (U + \varepsilon^3 \hat{U} + \eta \varepsilon^3) = -\eta \Lambda^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5), \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(R\chi) W &= \varepsilon^3 \eta \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(U - \varepsilon^3 \Psi - c_6 \varepsilon^4 \Lambda^2 H) + O(\varepsilon^5) = \varepsilon^6 \eta \int_{\Omega_\varepsilon} U + O(\varepsilon^5) \\ &= \eta \Lambda^2 \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\varepsilon^6 \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \int_{\Omega_\varepsilon} W = (\eta^2 |\Omega| - c_6 \eta \Lambda^2) \varepsilon^3 + \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\Lambda^2}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5). \quad (7.13)$$

从 (7.10)–(7.13) 可推出

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla W|^2 + \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} W^2 &= 12 \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \left(\frac{1}{2} \eta^2 |\Omega| - \frac{1}{48} c_6 \Lambda^2 \right) \varepsilon^3 - \frac{c_6^2 \Lambda^4}{2} H(Q, Q) \varepsilon^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\Lambda^2}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5), \end{aligned} \quad (7.14)$$

则

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} W^3 &= \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + 3\varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 \hat{U} + 3\varepsilon^3 \int_{\Omega_\varepsilon} U^2 \eta + 3\varepsilon^6 \int_{\Omega_\varepsilon} U \eta^2 + 3\varepsilon^9 \int_{\Omega_\varepsilon} \hat{U} \eta^2 + \varepsilon^9 \int_{\Omega_\varepsilon} \eta^3 + O(\varepsilon^5) \\ &= \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \frac{1}{8} c_6 \eta \Lambda^2 \varepsilon^3 - \frac{1}{192} c_6 \Lambda^2 \varepsilon^3 + \eta^3 |\Omega| \varepsilon^3 - \frac{1}{8} c_6^2 \Lambda^4 H(Q, Q) \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (7.15)$$

从 (7.14) 和 (7.15) 可得六维能量的表达式

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[W] &= 4 \int_{\mathbb{R}^6} U_{1,0}^3 + \left(\frac{1}{2} \eta^2 |\Omega| - c_6 \eta \Lambda^2 + \frac{1}{48} c_6 \Lambda^2 - 8\eta^3 |\Omega| \right) \varepsilon^3 + \frac{1}{2} c_6^2 \Lambda^4 H(Q, Q) \varepsilon^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\eta - \frac{c_6 \Lambda^2}{|\Omega|} \right) \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\Lambda^2}{|x - Q|^4} + O(\varepsilon^5). \end{aligned} \quad (7.16)$$

因此, 我们完成了引理 2.1 的证明.

参考文献

- 1 Gierer A, Meinhardt H. A theory of biological pattern formation. *Kybernetik*, 1972, 12: 30–39
- 2 Ni W M. Qualitative properties of solutions to elliptic problems. In: *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, vol. I. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2004, 157–233
- 3 Lin C S, Ni W M, Takagi I. Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. *J Differential Equations*, 1988, 72: 1–27
- 4 Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm Pure Appl Math*, 1983, 36: 437–477
- 5 Lin C S, Ni W M. On the diffusion coefficient of a semilinear Neumann problem. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1340. Berlin: Springer, 1986, 160–174
- 6 Adimurthi, Yadava S L. Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents. *Arch Ration Mech Anal*, 1991, 115: 275–296
- 7 Adimurthi, Yadava S L. Nonexistence of positive radial solutions of a quasilinear Neumann problem with a critical Sobolev exponent. *Arch Ration Mech Anal*, 1997, 139: 239–253
- 8 Adimurthi, Yadava S L. On a conjecture of Lin-Ni for a semilinear Neumann problem. *Trans Amer Math Soc*, 1993, 336: 631–637

- 9 Budd C, Knaap M C, Peletier L A. Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions. *Proc Roy Soc Edinburgh Sect A*, 1991, 117: 225–250
- 10 Zhu M J. Uniqueness results through a priori estimates, I: A three dimensional Neumann problem. *J Differential Equations*, 1999, 154: 284–317
- 11 Wei J C, Xu X W. Uniqueness and a priori estimates for some nonlinear elliptic Neumann equations in $\mathbb{R}^3$. *Pacific J Math*, 2005, 221: 159–165
- 12 Druet O, Robert F, Wei J C. *The Lin-Ni's Problem for Mean Convex Domains*. Providence: Amer Math Soc, 2012
- 13 Wang L P, Wei J C, Yan S S. A Neumann problem with critical exponent in nonconvex domains and Lin-Ni's conjecture. *Trans Amer Math Soc*, 2010, 362: 4581–4615
- 14 Wang L P, Wei J C, Yan S S. On Lin-Ni's conjecture in convex domains. *Proc Lond Math Soc (3)*, 2011, 102: 1099–1126
- 15 Rey O, Wei J C. Arbitrary number of positive solutions for an elliptic problem with critical nonlinearity. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2005, 7: 449–476
- 16 Caffarelli L A, Gidas B, Spruck J. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm Pure Appl Math*, 1989, 42: 271–297
- 17 Bahri A, Li Y Y, Rey O. On a variational problem with lack of compactness: The topological effect of the critical points at infinity. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1995, 3: 67–93
- 18 del Pino M, Felmer P, Musso M. Two-bubble solutions in the super-critical Bahri-Coron's problem. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2003, 16: 113–145
- 19 Rey O, Wei J C. Blowing up solutions for an elliptic Neumann problem with sub- or supercritical nonlinearity. Part I: $N = 3$. *J Funct Anal*, 2004, 212: 472–499
- 20 Wei J C, Yan S S. Infinitely many solutions for the prescribed scalar curvature problem on $\mathbb{S}^N$. *J Funct Anal*, 2010, 258: 3048–3081
- 21 Li Y Y, Wei J C, Xu H. Multi-bump solutions of $-\Delta u = K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}}$ on lattices in $\mathbb{R}^n$. *J Reine Angew Math*, 2018, 743: 163–211
- 22 Wang X F, Wei J C. On the equation $\Delta u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2} \pm \varepsilon^2} = 0$ in $\mathbb{R}^n$. *Rend Circ Mat Palermo (2)*, 1995, 44: 365–400
- 23 Rey O. The role of the Green's function in a non-linear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent. *J Funct Anal*, 1990, 89: 1–52
- 24 Khenissy S, Rey O. A criterion for existence of solutions to the supercritical Bahri-Coron's problem. *Houston J Math*, 2004, 30: 587–613
- 25 del Pino M, Felmer P L, Wei J C. On the role of mean curvature in some singularly perturbed Neumann problems. *SIAM J Math Anal*, 1999, 31: 63–79

On Lin-Ni's conjecture in dimensions four and six

Juncheng Wei, Bin Xu & Wen Yang

Abstract We give negative answers to Lin-Ni's conjecture for any four and six dimensional domains. No condition on the symmetry, geometry and topology of the domain is needed.

Keywords Lin-Ni's conjecture, a priori estimate, blow-up solution

MSC(2010) 35J75, 35J25, 35J61

doi: 10.1360/N012018-00120