中国科学（A 辑）
第23卷 第7期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993年7月

非牛顿流体中气泡过程的数值模拟

唐亦农
（江汉石油学院开发系，江陵 434102）

陈耀松 陈文芳*
（北京大学力学系，北京 100871）

摘 要

本文通过对有限区域内不同流体介质（如 Carreau 流体、Maxwell 流体）下的淹没喷嘴产生的气泡生长过程的数值模拟，成功地求解了集气泡的非球性、流体流变性的复杂性以及流场本身的复杂于一身的典型流动问题，并探讨了流体的流变性、物性参数、外部条件对气泡过程的影响机理.

关键词 Carreau 流体、Maxwell 流体、空泡、MAC 方法

在石油工业深井钻井技术中，人们发现空穴射流颇具有利之处[1]，由于空泡的出现，使得钻井液对岩石的破坏能力大大增加，这种现象的产生机理是一个迫切需要解决的问题.

本文通过非牛顿流体中气泡过程的数值模拟，探讨流体的流变性、物性参数、外部条件对气泡过程的影响机理，这对分析空穴射流机理是十分有用的.

1 方程组及边界条件

如图1所示，一块含有喷嘴半径 R_h 的平板将体积 V_c 的气室同深 H 的液体隔开，在气室下端通过常气体输入流量 G 供给气体. 上部为半径 W 的圆柱形容器，密度为 ρ_l 的液体顶面承受外来常压 P_0，并通过溢流装置维持液体水面高度不变. 气室压力为 P_c，初始时刻气泡为半径 R_b 的半球形.

以不断生长的气泡表面、刚性平板、容器壁面以及气-液交界面为边界，不可压流体的连续和运动方程为：

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_l \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \rho_l \mathbf{b} - \mathrm{grad}\, p + \mathrm{div}\boldsymbol{\tau}. \tag{2}$$

本构方程为：

(a) Carreau 流体

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \overset{(1)}{\mathbf{A}}, \tag{3a}$$

1992-04-17 收稿，1992-10-19 收修改稿.

* 现住址：126 Laurier Street, Dollard des Ormeaux, Ouebec, Canada H9B 3B2.

其中 $$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda_c^2 \mathrm{II}^2)^{(n_c-1)/2},\ \mathrm{II} = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\overset{(1)}{\mathrm{A}}{}^2\right)^{1/2}; \tag{3b}$$

(b) Maxwell 流体

$$\tau + \lambda_1 \frac{\delta\tau}{\delta t} = \eta_0 \overset{(1)}{\mathrm{A}}, \tag{4a}$$

$$\frac{\delta\tau}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} - \mathrm{L}_1\tau - \tau\mathrm{L}_1^T, \tag{4b}$$

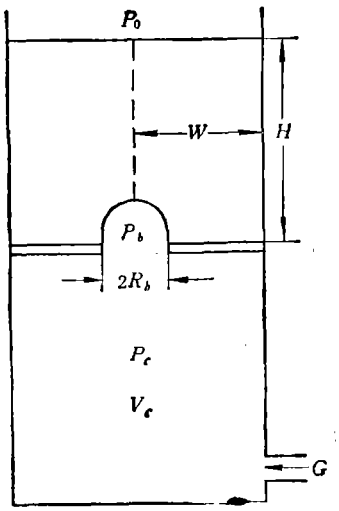

图 1 计算环境示意图

式中 p 为液体压力，b 为体积力(本问题只有重力)，τ 为偏应力张量，$\mathrm{v} = (u, 0, w)$，$\overset{(1)}{\mathrm{A}}$ 为第一阶 Rivlin-Ericksen 张量，L_1 为速度梯度张量，η_∞ 和 η_0 分别为无穷剪切粘度和零切粘度，II 为 $\overset{(1)}{\mathrm{A}}$ 的第二不变量，λ_1 和 λ_c 分别为松驰时间和特征时间，n_c 为幂律指数.

边界条件:

(i) 固壁:

$$V_n = 0,\ \frac{\partial v_\tau}{\partial n} = 0; \tag{5}$$

(ii) 气-液交界面:

$$p = P_0 = \mathrm{Const}, \tag{6}$$

$$V_n = 0,\ H = \mathrm{Const}, \tag{7}$$

$$t_r n_r + t_z n_z = P_0,\ t_r n_z - t_z n_r = 0, \tag{8a}$$

其中 $$t_r = (\tau_{(rr)} - p)n_r + \tau_{(rz)} n_z \xrightarrow[\text{法线、切线条件}]{\text{代入已知平面}} \tau_{(rz)}, \tag{8b}$$

$$t_z = \tau_{(rz)} n_r + (\tau_{(zz)} - p) n_z \xrightarrow[\text{法线、切线条件}]{\text{代入已知平面}} \tau_{(zz)} - p. \tag{8c}$$

当偏应力需作为独立变量求解时，我们假定自由面上受力均匀，即

$$\tau_{(rr)} = \tau_{(\theta\theta)} = 0; \tag{8d}$$

(iii) 气泡表面:

气泡表面上任意点的液相压力 p_{bl} 与气泡内的压力 p_b 有关，即

$$p_{bl} = p_b - \frac{2\sigma}{R}, \tag{9}$$

式中 σ 为表面张力，R 为气泡表面曲线的曲率半径. 鉴于本文情况可略去气体动量效应即假定气泡内的压力处处均匀.

假定气泡内的条件是等温不可压 ($\rho_g = \mathrm{Const}$)，内能仍近似为常数，由喷嘴方程可得到通过喷嘴的气体平均速度 v_h 与气泡生长的关系为[2]

$$v_h = \frac{1}{A_h}\frac{\mathrm{d}V_b}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_c - p_b}{\rho_g K}\right)^{1/2}, \tag{10}$$

式中 A_h 为喷嘴面积，$V_b(t)$ 为气泡体积，ρ_g 为气体密度，K 为喷嘴系数，p_c 为气室压力.

进一步假定气室内部是绝热的，则[2]

$$p_c = p_c|_{t=0} - \frac{c_0^2\rho_g}{V_c}[(V_b|_t - V_b|_{t=0}) - Gt], \tag{11}$$

式中 c_0 为气体中的声速。由气泡表面力平衡关系有

$$t_r n_r + t_z n_z = \frac{2\sigma}{R} - p_b, \tag{12a}$$

$$t_r n_z - t_z n_r = 0. \tag{12b}$$

对于 Maxwell 流体我们需做些假定，即认为 p 为当前状态的各向同性压力，与 3 个法向应力的关系为

$$-p = \frac{1}{3}(S_{(rr)} + S_{(\theta\theta)} + S_{(zz)}). \tag{12c}$$

当液体静止时即为水静压力。而应力与偏应力的关系为

$$S_{(x_1x_2)} = -p\delta_{x_1x_2} + \tau_{(x_1x_2)}. \tag{12d}$$

当 $x_1 = x_2$ 时 $\delta_{x_1x_2} = 1$，否则为零，x_1 和 x_2 取 r, θ, z。

对 (12c) 式取迹，并将 (12d) 式代入则有

$$\mathrm{tr}\tau = \tau_{(rr)} + \tau_{(\theta\theta)} + \tau_{(zz)} = 0 \tag{12e}$$

初始条件：

$$\mathrm{v} = 0, \tag{13a}$$

$$V_b|_{t=0} = 2\pi R_h^3/3, \tag{13b}$$

$$p_b|_{t=0} = P_0 + \rho_l g H + \frac{2\sigma}{R_h}. \tag{13c}$$

对 (1)—(4) 式无量纲化，经整理可得(为方便起见仍采用原来变量形式)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(ru^2)}{\partial r} - \frac{\partial(uw)}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial\tau_{(rr)}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{(rz)}}{\partial z} + \frac{\tau_{(rr)} - \tau_{(\theta\theta)}}{r}\right), \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(ruw)}{\partial r} - \frac{\partial w^2}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{F_r^2} + \frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial\tau_{(rz)}}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{(zz)}}{\partial z} + \frac{\tau_{(rz)}}{r}\right). \tag{16}$$

(a) Carreau 流体的本构方程

$$\tau = \eta \overset{(1)}{\mathrm{A}}, \tag{17a}$$

$$\eta = \beta_2 + (1 - \beta_2)(1 + \beta_1 \mathrm{II}^2)^{(n_c - 1)/2}, \tag{17b}$$

$$\mathrm{II} = \left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{u^2}{r^2}\right\}^{1/2}, \tag{17c}$$

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{(rr)} & 0 & \tau_{(rz)} \\ 0 & \tau_{(\theta\theta)} & 0 \\ \tau_{(rz)} & 0 & \tau_{(zz)} \end{bmatrix} \quad [\overset{(1)}{\mathrm{A}}] = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 & \frac{2u}{r} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{17d}$$

(b) Maxwell 流体的本构方程

$$D_e\frac{\partial\tau_{(rr)}}{\partial t}=\left(2\frac{\partial u}{\partial r}-\tau_{(rr)}\right)+D_e\left(2\frac{\partial u}{\partial r}\tau_{(rr)}+2\frac{\partial u}{\partial z}\tau_{(rz)}-\frac{u}{r}\tau_{(rr)}-\frac{\partial(u\tau_{(rr)})}{\partial r}-\frac{\partial(w\tau_{(rr)})}{\partial z}\right),\tag{18}$$

$$D_e\frac{\partial\tau_{(rz)}}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}-\tau_{(rz)}\right)+D_e\left(\frac{\partial w}{\partial r}\tau_{(rr)}+\frac{\partial u}{\partial z}\tau_{(zz)}-\frac{2u}{r}\tau_{(rz)}-\frac{\partial(u\tau_{(rz)})}{\partial r}-\frac{\partial(w\tau_{(rz)})}{\partial z}\right),\tag{19}$$

$$D_e\frac{\partial\tau_{(\theta\theta)}}{\partial t}=\left(\frac{2u}{r}-\tau_{(\theta\theta)}\right)+D_e\left(\frac{u}{r}\tau_{(\theta\theta)}-\frac{\partial(u\tau_{(\theta\theta)})}{\partial r}-\frac{\partial(w\tau_{(\theta\theta)})}{\partial z}\right),\tag{20}$$

$$D_e\frac{\partial\tau_{(zz)}}{\partial t}=\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\tau_{(zz)}\right)+D_e\left(2\frac{\partial w}{\partial r}\tau_{(rz)}+2\frac{\partial w}{\partial z}\tau_{(zz)}-\frac{u}{r}\tau_{(zz)}-\frac{\partial(u\tau_{(zz)})}{\partial r}-\frac{\partial(w\tau_{(zz)})}{\partial z}\right),\tag{21}$$

式中 Froude 数 $F_r=V_0/\sqrt{gL_0}$, Reynolds 数 $Re=\rho_l V_0 L_0/\eta_0$, Deborah 数 $D_e=\lambda_1 V_0/L_0$, $\beta_2=\eta_\infty/\eta_0$, $\beta_1=\lambda_c^2 V_0^2/L_0^2$.

对(5)至(13)式可如法炮制.

2 数值解法介绍

MAC 方法 (Marker and Cell techique) 是用来求解不定常不可压牛顿流体的一种行之有效的有限差分法，尤其对含有自由面的流动问题颇为有效[3]，但很少被用于求解非牛顿流体流动问题[4].针对本文问题，我们尝试在求解牛顿流体流动的 ABMAC 方法基础上,对速度、压力、偏应力三者同时叠代求解作为数值模拟的手段[1)].

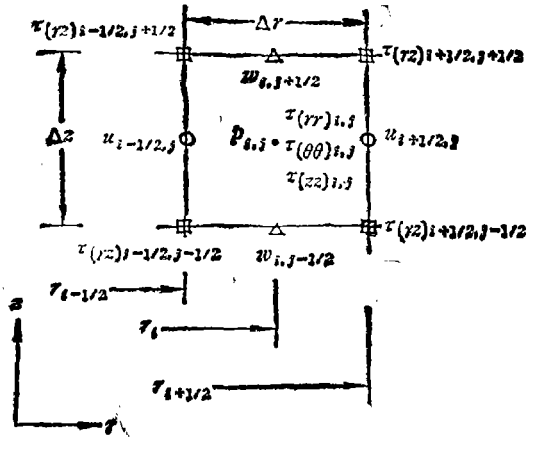

图 2 差分方程的格子结构

差分方程的网格结构如图 2 所示，速度定义于格子边线上的中点,压力、法向应力定义于格子的中心位置，切应力定义于格子线的交点上. 对于差分方程的离散方式这样选取: 向前差分格式代替关于时间的偏导数，二阶迎风格式代替对流项关于空间的偏导数，其余关于空间的偏导数项用中心差分格式来替代.

1) 唐亦农,非牛顿流体中气泡过程的研究,北京大学博士论文, 1990.

从 Maxwell 流体的本构方程(18)—(21)式可以看到，当 D_e 数趋于零时就退化为牛顿流体的本构方程．在 D_e 数很小时本构方程的时间过程具有奇异性，因此引入一个新的时间 $t_1=t/D_e$，则以 t_1 作为时间坐标本构方程中时间偏导数项的系数 D_e 将不出现．当时间向前推进 Δt 时，t_1 的时间需推进 $\Delta t_1=\Delta t/D_e$，如果 Δt_1 太大，就会导致很大的误差，故 Δt_1 的推进需要细分 k 步，向前推进直到 $(k+1)\Delta t_2=\Delta t_1$ 或前后两步各点偏应力的最大相对误差小于某一给定精度时，就认为对于时间 t_1 已经达到定常，此定常态的应力即可认为是时间向前推进 Δt 时刻的解．Δt_2 不能太大，以保证本构方程向前推进的差分格式的稳定．

本文是求解气泡的生长发展过程，为此，我们沿气泡表面布置若干个以当地液体速度移动的无质量标记质点，初始时刻气泡表面上分布 N_0 个标记质点，随着时间增加，气泡表面上的标记质点位置发生变化，同时这若干个标记质点的连接又刻划了气泡表面在这个时刻的位置，根据标记质点的疏密程度，增加或删掉部分标记质点，随着时间的又一次增加，当前标记质点又移动到新位置刻划新的气泡表面位置，如此类推，我们跟踪标记质点的位置就可得到不同时刻的气泡形状．

整个求解过程如下：

(1) 增加时间 Δt，$t^{n+1}=t^n+\Delta t$，由(9)至(11)式相应的无量纲方程求出气室压力继而得到气泡表面的液相压力 p_{bl}；

(2) 对流场迭代求解速度场、压力场，以及偏应力场，在求解压力场时引入松驰因子 λ，(i,j) 网格压力的第 $m+1$ 次迭代等于该网格的 m 次迭代压力减去松驰因子与 $m+1$ 次的速度散度乘积，即

$$p_{i,j}^{m+1}=p_{i,j}^{m}-\lambda D_{i,j}^{m+1} \tag{22}$$

来求压力；

(3) 计算标记质点速度得到相应时刻的气泡表面形状；

(4) 判断气泡是否脱离，是输出物理量且停止计算，否则回到(1)。

松驰因子 λ 的取值范围有一定限制．在牛顿流体的情况，(22) 式右端的速度散度可与 $\nabla^2 p$ 联系起来，为保持稳定性，由 Fourier 分析可得[5,6]：

$$0\leqslant\lambda\leqslant\frac{2r_i\Delta r}{\Delta t\left(1+2r_i\Delta r\left(\frac{1}{\Delta r^2}+\frac{1}{\Delta z^2}\right)\right)}. \tag{23}$$

3　结果分析与讨论

我们计算了不同介质(理想、粘性、Carreau, Maxwell) 流体下淹没孔口气泡生长过程．下面就其结果展开分析与讨论．

图 3 是在相同条件下粘性流体情况时的本文结果及 Zughbi[7] 的计算结果分别同文献[2]实验值的比较．对于非牛顿流体的情况，尚未见到他人的实验与计算结果．所有图中标明的气室压力均表示气室压力与相应深度的液体静止压力的差值，其绝对数值甚低，反映了在气泡形变过程中气室内部压力的波动情况．两种结果的差异多半是由于方法不同导致的，Zughbi 通过由运动方程求偏导数后合并而成的压力 Poisson 方程来求出当前压力场后，将当前压力值代入运动方程从而求得当前速度场，在求解 Poisson 方程时引入“不规则星网格”

技巧,其非齐次项只依赖于前一时刻的物理量. 而本文则是如前所述,采取压力、速度同时叠代求解.

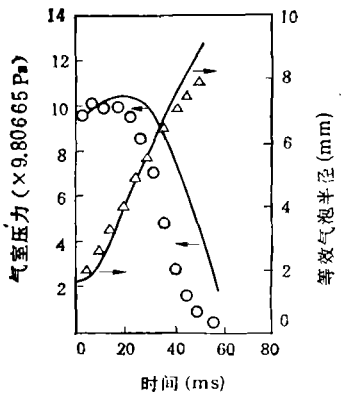

图 3 (a) Zughbi 等的计算值与实验点的比较
$R_h = 0.16(\mathrm{cm})$, $H = 15.4(\mathrm{cm})$

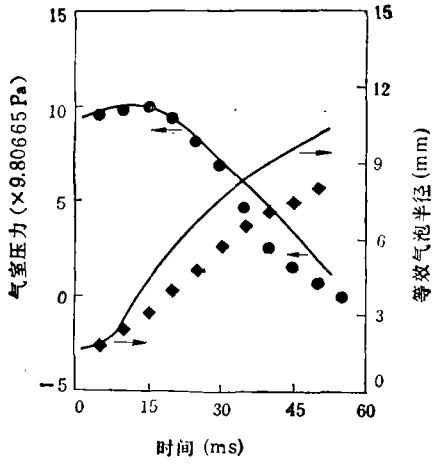

图 3 (b) 本文计算值与实验点的比较
$R_h = 0.16(\mathrm{cm})$, $H = 15.45(\mathrm{cm})$

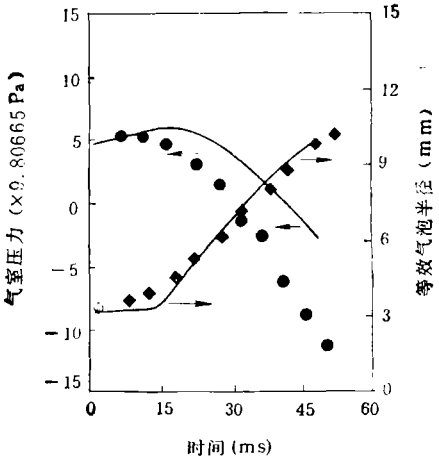

图 3 (c) 本文计算值与实验点的比较
$R_h = 0.32(\mathrm{cm})$, $H = 15.45(\mathrm{cm})$

图 3 其余参数为:
$w = 5.1(\mathrm{cm})$,
$v_c = 2250(\mathrm{cm}^3)$,
$p_0 = 1(\mathrm{atm})$,
$\rho_l = 0.998(\mathrm{g/cm}^3)$,
$\rho_g = 1.2 \times 10^{-3}(\mathrm{g/cm}^3)$,
$\nu_l = 1.007 \times 10^{-2}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$
$G = 16.7(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$.

气泡生长的初期,表面张力占主要优势,气泡基本上以球状增长,随着气泡尺寸的加大,浮力引起气泡拉长并升离喷嘴,伸长的气泡引起周围液体的运动,反过来液体运动又引起气泡颈部收缩直至脱离.

图 4 是在相同的几何、外界条件下四种不同流体介质中气泡的形成图.为便于分析,粘性流体的粘度、Carreau 流体的零切粘度、Maxwell 流体的粘度取相同的值.可以看到,气泡表面的形状相似,理想、粘性、Carreau 流体介质中的气泡尺寸和形状非常接近. 但对于 Maxwell 流体,气泡的径向和轴向尺寸都加大,尤以轴向加大更为显著,同时也显示了同前三种

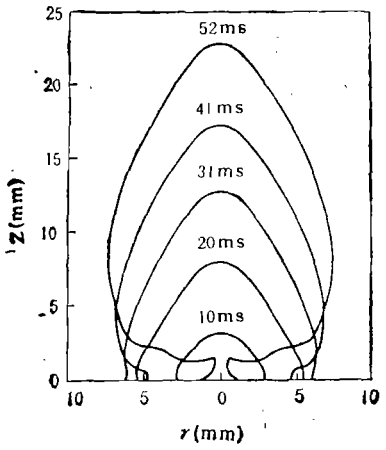

图4(a)　理想流体介质中不同时刻的气泡形状

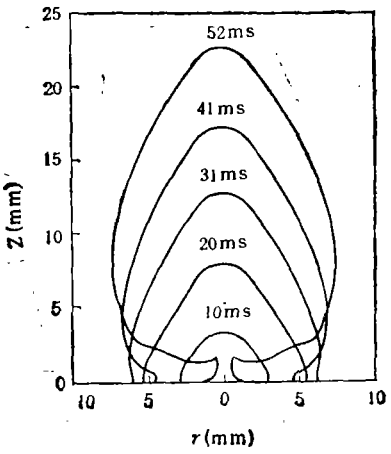

图4(b)　牛顿流体介质中不同时刻的气泡形状

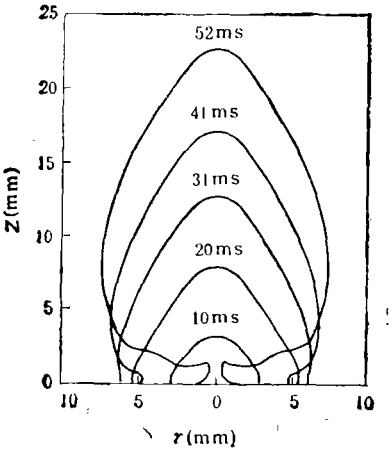

图4(c)　Carreau 流体 ($n_c = -0.2$, $\lambda_c = 10.0$, $\beta_2 = 0.01$) 介质中不同时刻的气泡形状

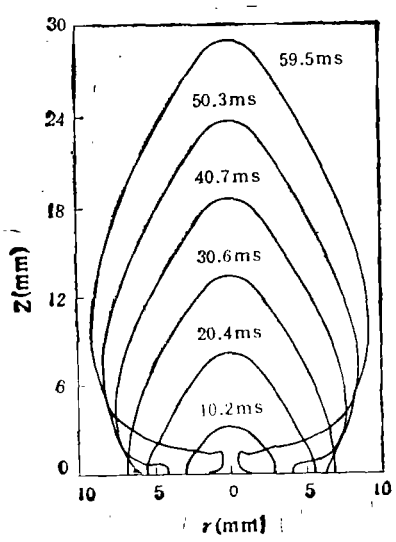

图4(d)　Maxwell 流体 ($D_e = 0.5$) 介质中不同时刻的气泡形状

流体相比，在 Maxwell 流体中气泡的颈部收缩速度的确慢些。

在气泡生长的初期，弹性使等效半径略为减小，相当于起了较小的阻尼作用，这段时间极短。而时间稍长些，弹性就助长气泡生长。当气泡快要分离时，弹性一方面使气泡体积增大，一方面又阻止气泡脱离，从而延长了气泡脱离的时间。

文献[8]指出，只有当周围介质流场异于径向的拉伸场情况时，粘弹性才有压抑气泡过程的作用。本文中，气泡过程基本上以球形增长，周围介质的流场主要是由于气泡膨胀引起的拉伸场，异于径向拉伸的拉伸场成分很低，弹性压抑气泡的因素是次要的，助长气泡的因素占了主导作用。

文中计算结果与文献[2]的实验结果稍有偏离，原因是复杂的，有数值方面的原因，也有实

验测量方面的原因. 由于气泡过程极快,实验测量是很困难的, 测量时带来误差是难免的,我们认为,出现这样的偏差是允许的.

3.1 几何条件对气泡过程的影响

(1) 喷嘴淹没深度的影响　深度减小,弹性影响加强,气泡的体积增大,生成时间延长.

(2) 壁面宽度(圆柱形容器之半径)的影响　宽度的减小使得弹性对气泡过程的作用变微,气泡在体积还很小时就脱离了.这在物理上是显然的,由于宽度下降,在流体的流变性起作用之前,气泡就已经脱离了. 从此可推想,只有在无穷大区域中,弹性在摆脱壁面的桎梏时,方能淋漓尽致地发挥作用.

(3) 喷嘴半径(气泡初始形状)的影响　半径越大,气泡的生长过程明显变得缓慢,流体的流变性对气泡过程的影响减弱.

(4) 气室体积的影响　体积的增加,削弱了弹性对气室压力的影响,增强了弹性对气泡体积的影响,气室压力的变化趋于缓慢. 可以预料,当气室体积趋于无穷的极端场合下, 气室压力将保持为恒定值.

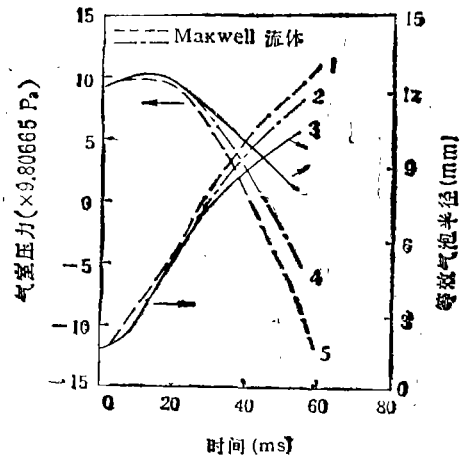

图 5　按不同 D_e 数算得曲线的比较

1——$D_e = 10.0$, 2——$D_e = 0.005$, 3——牛顿流体

3.2 物性参数对气泡过程的影响

(1) D_e 数(弹性参数)的影响　图5给出了相同外界条件下, 不同 D_e 数时的气室压力、气泡等效半径对时间的依赖关系. 可以看到, D_e 数越小,结果越逼近牛顿流体的合理趋势.

本文的数值实验表明,随着 D_e 数增加, 计算速度明显放慢,但对于很大的 D_e 数时, 数值结果仍能得到收敛的解. D_e 数较大以后,继续提高 D_e 数,结果的差别不太明显,再提高 D_e 数,就难以得到收敛的解. 与许多粘弹性流体流动问题的数值模拟一样,在数值解失败以前, 结果对 D_e 数的依赖关系出现一个明显的平台,在本文中,此平台很长,在 D_e 数从 10—100 的范围, 结果几乎不随 D_e 数而变化. D_e 数达到 10^2 的量级,数值解仍能得到收敛的结果.

(2) 液体粘度的影响　粘度的变化对气泡体积、气室压力及气泡生成时间几乎没有什么影响.

(3) 气体密度的影响　气体密度的增大,气泡生成时间缩短,气泡体积缩小. 由于气体动能增加,气室压力的波动加剧,在气体密度大到一定程度以后气泡形成以前, 气室压力出现了两个极值.

(4) 液体密度的影响　液体介质的密度增加,弹性对气泡的助长作用变弱,对气泡生成时间的影响不大,但气泡体积缩小,气室压力增大.

3.3 外部条件对气泡过程的影响

(1) 气体流量的影响　输入气体流量的增大,气泡体积增大,气室压力升高. 这在物理上是显而易见的.

(2) 系统压力的影响　系统压力的变化,对气泡过程的影响不明显,压力增加使气泡体

积下降，气室压力上升。

4 结 束 语

从以上分析中可以看到，在大多数场合，得到的结论是流体的粘弹性有促进气泡生长的作用，只有在壁面离喷嘴很近(圆柱形容器半径很小)时，弹性对气泡过程的助长作用才几乎被埋没。液体介质的粘度对气泡过程的影响很小，理想流体、粘性流体和 Carreau 流体的结果差别很小，忽略粘度效应不会造成很大的误差。

致谢　陈九锡和颜开两位先生曾慷慨地向作者提供文献 [6] 中所用的原始程序，在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Bardin, C, Cholet, H., *7th Int. Symp. Jet Cutting Tech.*, 1984, 33.
[2] Kupferberg, A., Jameson, G. J., *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, 1969, 47: 241.
[3] Harlow, F. H., Welch, J. E., *Phys. Fluids*, 1965, 8: 2182.
[4] 颜开，水动力学研究与进展，1987，2(3): 133.
[5] Viecelli. J. A., *J. Comp. Phys.*, 1971, 8: 119.
[6] 陈九锡、颜开，水动力学研究与进展，1985，1: 17.
[7] Zughbi, H. D., Pinczewski, W. V., Fell, C. J., *15th Australiasian Chem. Eng. Conf.*, 1987, 37: 1.
[8] Bousfield, D. W., Keunings, R., Denn, M. M., *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 1988, 27: 205.