齐次群上带漂移项亚椭圆算子的整体 Sobolev-Morrey 估计

钮鹏程, 冯晓晶*

西北工业大学应用数学系, 教育部空间应用物理与化学重点实验室, 西安 710072

E-mail: pengchengniu@nwpu.edu.cn, fxj467@mail.nwpu.edu.cn

收稿日期: 2011-10-25; 接受日期: 2012-04-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10871157 和 11001221)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 200806990032) 和西北工业大学基础研究基金探索项目 (批准号: JC201124) 资助项目

摘要 设 G 是一个齐次群, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ 为 G 上满足 Hörmander 秩条件的实左不变向量场且 $X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ 是 1 次齐次的, X_0 是 2 次齐次的. 在本文中, 我们研究如下带有漂移项的算子:

$$L = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij} X_i X_j + a_0 X_0,$$

其中 (a_{ij}) 是一个常数矩阵且满足椭圆条件, $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 对算子 L , 通过建立齐型空间上的奇异积分 Morrey 有界性和关于此向量场的插值不等式, 我们在群 G 上获得了整体 Sobolev-Morrey 估计.

关键词 Sobolev-Morrey 估计 齐次群 向量场

MSC (2010) 主题分类 35R03, 49N60

1 引言和主要结果

设 G 是一个齐次群, $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ 为定义在 $\mathbb{R}^N$ ($p_0 < N$) 上的实左不变向量场, 且 $X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ 是 1 次齐次的, X_0 是 2 次齐次的; 假设它们满足 Hörmander 秩条件:

$$\text{rank} \mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_{p_0})(x) = N, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

其中 $\mathcal{L}(X_0, X_1, \dots, X_{p_0})$ 表示由 $X_0, X_1, \dots, X_{p_0}$ 生成的 Lie 代数.

我们的目的是研究如下带有漂移项算子:

$$L = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij} X_i X_j + a_0 X_0 \quad (1.2)$$

的整体 Sobolev-Morrey 估计, 其中常数矩阵 $(a_{ij})_{i,j=1}^{p_0}$ 满足椭圆条件:

$$\mu^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{p_0}, \quad \mu > 0, \quad (1.3)$$

而且 $\mu^{-1} \leq a_0 \leq \mu$.

最近, 许多作者研究了算子 L (例如, 见 [1-3]). Hörmander^[1] 指出 (1.1) 蕴含着 (1.2) 的亚椭圆性. 在文 [2] 中, Folland 证明了幂零群上的齐次亚椭圆算子有齐次的基本解. 当 $X_0 = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t$, $X_i = \partial_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots, p_0$ 时, L 变为:

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij} \partial_{x_i x_j}^2 u + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u,$$

其中 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, (b_{ij}) 是一个适当的上三角常数矩阵, (a_{ij}) 是一个 $p_0 \times p_0$ ($p_0 < n$) 阶满足椭圆条件的矩阵. 易知 L_1 是一类 Kolmogorov-Fokker-Planck 型超抛物算子. 显然, 当 $p_0 = n$, $(b_{ij}) = 0$ 时, L_1 就是热传导算子. 另一方面, 退化算子 L_1 出现在许多研究领域. 例如, Kolmogorov 方程

$$\partial_{x_1}^2 u + x_1 \partial_{x_2} u = \partial_t u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^3,$$

在经济问题^[4,5]、动力学理论^[6,7]、和视觉感知问题^[8]中都有应用, 并已经被广泛地研究 (见 [9-12]).

近来也有一些作者对一些算子的 Morrey 估计进行了研究^[13-17]. 在 Euclid 空间中, 二阶非退化椭圆算子的局部 Morrey 估计已由 Di Fazio 和 Ragusa 在文 [13] 中获得. 在文 [14] 中, Liu 在齐型空间上考虑了一类椭圆算子的广义 Morrey 估计. Lieberman^[15] 得到了二阶非退化椭圆和抛物算子的局部 Morrey 估计. 对非退化的 Hörmander 型抛物算子, Tang 和 Niu^[16] 验证了局部的 Sobolev-Morrey 估计. Polidoro 和 Ragusa^[17] 讨论了一类 ultraparabolic 算子方程的局部 Sobolev-Morrey 估计. 而对解的内部正则性陈淑红和谭忠^[18], 崔学伟和钮鹏程^[19] 分别进行了研究.

在本文, 通过建立齐型空间上奇异积分的 Morrey 有界性和关于向量场 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ 的插值不等式我们证明了算子 L 在齐次群上的整体 Sobolev-Morrey 估计. 在陈述主要结果之前, 先介绍一些记号和函数空间.

定义 1.1 对给定的可测函数 $f \in L_{loc}^1(G)$, 定义 Hardy-Littlewood 极大值算子

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| dy, \quad \text{a.e. } x \in G,$$

其中 $B_r(x)$ 在下面的 (2.2) 中给出.

定义 1.2 我们称一个可测函数 $f \in L_{loc}^p(G)$ 属于 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(G)$, $p \in (1, +\infty)$, $\lambda \in [0, Q)$, 倘若下面的模

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(G)} = \left(\sup_{r>0} \frac{1}{r^\lambda} \int_{B_r(x)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}, \quad \text{a.e. } x \in G$$

是有限的, 其中 Q 在下面的 (2.4) 中给出.

为了方便, 记

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^{p,\lambda}(G)} &= \sum_{j=1}^{p_0} \|X_j u\|_{L^{p,\lambda}(G)}, \\ \|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} &= \sum_{i,j=1}^{p_0} \|X_i X_j u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \|X_0 u\|_{L^{p,\lambda}(G)}, \end{aligned}$$

更一般地,

$$\|D^k u\|_{L^{p,\lambda}(G)} = \sum \|X_{j_1} \cdots X_{j_l} u\|_{L^{p,\lambda}(G)},$$

其中求和是对所有 k 次齐次的微分算子 $X_{j_1} \cdots X_{j_l}$ 来取的 (注意到向量场 X_0 是 2 次齐次, 其余是 1 次齐次).

定义 1.3 我们规定 Sobolev-Morrey 空间 $S^{k,p,\lambda}(G)$ 是由所有使得模

$$\|u\|_{S^{k,p,\lambda}(G)} = \sum_{h=0}^k \|D^h u\|_{L^{p,\lambda}(G)}$$

有限的 $L^{p,\lambda}(G)$ 函数构成的.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 对每个 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q]$, 存在一个常数 $c = c(p, p_0, \mu) > 0$, 使得对任意 $u \in C_0^\infty(G)$, 都有

$$\|u\|_{S^{2,p,\lambda}(G)} \leq c \{ \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \}. \quad (1.4)$$

定理 1.2 对每个 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q]$ 和正偶数 k , 存在一个常数 $c = c(k, p, p_0, \mu) > 0$, 使得对任意 $u \in C_0^\infty(G)$, 都有

$$\|u\|_{S^{k+2,p,\lambda}(G)} \leq c \{ \|Lu\|_{S^{k,p,\lambda}(G)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \}. \quad (1.5)$$

本文的安排如下: 在第 2 节, 我们给出了关于齐次群的一些知识. 我们在第 3 节介绍了算子 L 基本解的性质并证明了一类奇异积分算子的 Morrey 有界性. 第 4 节致力于证明一些关于 Sobolev-Morrey 模的插值不等式. 最后, 在第 5 节证明了主要结果.

2 齐次群

给定一对光滑映射:

$$[(x, y) \mapsto x \circ y] : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N; \quad [x \mapsto x^{-1}] : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

$\mathbb{R}^N$ 和这些映射一起形成一个群, 其原点是恒等元. 假设给定 N 个正数 $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_N$, 使得伸缩 $D(\varrho) : (x_1, x_2, \dots, x_N) \mapsto (\varrho^{\omega_1} x_1, \varrho^{\omega_2} x_2, \dots, \varrho^{\omega_N} x_N)$, $\varrho > 0$ 是一个群自同构. 带有这种结构的空间 $\mathbb{R}^N$ 称为一个齐次群, 记为 G .

自然地可在 G 上定义一个齐次模 $\|\cdot\|$: 当 $x = 0$, 令 $\|x\| = 0$; 当 $x \in G \setminus \{0\}$, 令 $\|x\| = \varrho \Leftrightarrow |D(1/\varrho)x| = 1$, 其中 $|\cdot|$ 为 Euclidean 模. 易得

- (i) $\|D(\varrho)x\| = \varrho\|x\|$, $x \in G$, $\varrho > 0$;
- (ii) 集合 $\{x \in G : \|x\| = 1\}$ 包含 Euclidean 单位球面 Σ_N ;
- (iii) 函数 $x \mapsto \|x\|$ 在除原点外是光滑的;
- (iv) 存在常数 $c, c_1, c_2 \geq 1$ 使得对 $x, y \in G$, 有

$$\|x^{-1}\| \leq c_1\|x\|; \quad \|x \circ y\| \leq c_2(\|x\| + \|y\|) \quad (2.1)$$

且

$$\frac{1}{c}|y| \leq \|y\| \leq c|y|^{1/\omega}, \quad \|y\| \leq 1, \quad \omega = \max(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N).$$

根据这些性质, 可定义拟距离 d :

$$d(x, y) = \|y^{-1} \circ x\|.$$

则对 $x, y, z \in G$, 有如下不等式:

$$\begin{cases} d(x, y) \geq 0, & d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ c_1^{-1}d(y, x) \leq d(x, y) \leq c_1d(y, x), \\ d(x, y) \leq c_2(d(x, z) + d(z, y)), \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 是不小于 1 的常数. 我们称 G 上的任意两个拟距离 d, d' 是等价的, 倘若存在两个正常数 c_3, c_4 使得 $c_3d'(x, y) \leq d(x, y) \leq c_4d'(x, y)$, $x, y \in G$. 在这种情形下, 记为 $d \simeq d'$. 我们将关于 d 的球定义为:

$$B_r(x) = \{y \in G : d(x, y) < r\}. \quad (2.2)$$

注意到 $B(0, r) = D(r)B(0, 1)$ 且

$$|B(x, r)| = r^Q |B(0, 1)|, \quad (2.3)$$

其中 $x \in G, r > 0$,

$$Q = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_N. \quad (2.4)$$

我们称 Q 为 G 的齐次维数, 一般地, $Q > 3$. 由 (2.3), 我们有

$$|B(x, 2r)| \leq c |B(x, r)|, \quad x \in G, \quad r > 0,$$

其中 c 是一个正常数. 因此, (G, dx, d) 构成一个齐型空间.

我们称 G 上的微分算子 Y 是 β ($\beta > 0$) 次齐次的, 倘若对任意可测函数 φ , 有

$$Y(\varphi(D(\varrho)x)) = \varrho^\beta (Y\varphi)(D(\varrho)x), \quad \varrho > 0, \quad x \in G;$$

我们称一个函数 f 是 α ($\alpha > 0$) 次齐次的, 倘若

$$f((D(\varrho)x)) = \varrho^\alpha f(x), \quad \varrho > 0, \quad x \in G.$$

显然, 若 Y 是一个 β 次齐次的微分算子, f 是一个 α 次齐次的函数, 则 Yf 是 $\alpha - \beta$ 次齐次的.

3 奇异积分

在本节, 我们将证明一类奇异积分算子的 Morrey 有界性.

引理 3.1 ^[20] 算子 L 是 G 上二次齐次左不变的. L 的转置 L^T 也是亚椭圆的. 而且存在唯一基本解 Γ 使得

- (a) $\Gamma(\cdot) \in C^\infty(G \setminus \{0\})$;
- (b) $\Gamma(\cdot)$ 是 $2 - Q$ 次齐次的;
- (c) 对任意 $u \in C_0^\infty(G)$, $x \in G$,

$$u(x) = \int_G \Gamma(y^{-1} \circ x) Lu(y) dy; \quad (3.1)$$

而且, 对每个 $i, j = 1, 2, \dots, p_0$, 存在常数 c_{ij} , 使得

$$X_i X_j u(x) = P.V. \int_G X_i X_j \Gamma(y^{-1} \circ x) Lu(y) dy + c_{ij} Lu(x). \quad (3.2)$$

记 $\Gamma_i = X_i \Gamma$, $\Gamma_{ij} = X_i X_j \Gamma$, $i, j = 1, 2, \dots, p_0$. 显然 Γ_i, Γ_{ij} 分别是 $(1-Q)$ 和 $-Q$ 次齐次的.

引理 3.2 ^[20] 对每个 $i, j = 1, 2, \dots, p_0$, $\Gamma_{ij}(\cdot)$ 有如下性质:

- (d) $\Gamma_{ij}(\cdot) \in C^\infty(G \setminus \{0\})$;
- (e) $\Gamma_{ij}(\cdot)$ 是 $-Q$ 次齐次的;
- (f) 对每个 $R > r > 0$,

$$\int_{r < \|z\| < R} \Gamma_{ij}(z) dz = \int_{\|z\|=1} \Gamma_{ij}(z) d\sigma(z) = 0;$$

- (g) 对每个多重指标 β ,

$$\sup_{\|z\|=1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\beta \Gamma_{ij}(z) \right| \leq C_\beta.$$

为了处理核的卷积, 我们需要下面引理.

引理 3.3 ^[2, 20] 设 $K_1(\cdot), K_2(\cdot)$ 为两个核满足如下条件:

- (h) $K_i(\cdot) \in C^\infty(G \setminus \{0\})$ ($i = 1, 2$);
- (i) $K_i(\cdot)$ 是 α_i 次齐次的且 $-Q < \alpha_i < 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 < -Q$;
- (j) 对每个多重指标 β ,

$$\sup_{\|\zeta\|=1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^\beta K_i(\zeta) \right| \leq C_\beta.$$

则对每个测试函数 f ,

$$(f * K_1(\cdot)) * K_2(\cdot) = f * (K_1(\cdot) * K_2(\cdot)).$$

而且, 若令 $K(\cdot) = K_1(\cdot) * K_2(\cdot)$, 则有

- (k) $K(\cdot) \in C^\infty(G \setminus \{0\})$;
- (l) $K(\cdot)$ 是 $\alpha_1 + \alpha_2 + Q$ 次齐次的;
- (m) 对每个多重指标 β ,

$$\sup_{\|z\|=1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^\beta K(z) \right| \leq C_\beta.$$

引理 3.4 ^[2, 20, 21] 对某个整数 $h \in (0, Q)$, 设 $K_h \in C^\infty(G \setminus \{0\})$ 是一个 $h-Q$ 次齐次核. 定义算子 $T_h f = f * K_h$ 并设 P^h 是一个 h 次齐次的左不变微分算子. 则有

(i) 表示公式:

$$P^h T_h f = P.V.(f * P^h K_h) + \alpha f,$$

其中 α 是一个依赖于 P^h 和 K_h 的常数;

(ii) $P^h K_h$ 是一个 $-Q$ 次齐次的 $C^\infty(G \setminus \{0\})$ 函数且满足消失性:

$$\int_{r < \|z\| < R} P^h K_h(z) dz = \int_{\|z\|=1} P^h K_h(z) d\sigma(z) = 0, \quad 0 < r < R < \infty;$$

(iii) 奇异积分算子

$$f \mapsto P.V.(f * P^h K_h)$$

是 $L^p(G)$ ($1 < p < \infty$) 有界的.

引理 3.5 令 $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $\mathcal{K} \in C(G \setminus \{0\})$ 是一个关于 $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ 的 α 次齐次函数. 则有

$$|\mathcal{K}(z)| \leq c\|z\|^\alpha,$$

其中 $c = \sup_{\Sigma_N} |\mathcal{K}(z)|$, Σ_N 表示 G 的单位球面.

证明 由 $\mathcal{K} \in C(G \setminus \{0\})$ 是一个 α 次齐次函数, 可得

$$\mathcal{K}(z) = \|z\|^\alpha \mathcal{K}(D(\|z\|^{-1})z), \quad z \in G \setminus \{0\}.$$

显然 $\|D(\|z\|^{-1})z\| = 1$, 因而 $|\mathcal{K}(D(\|z\|^{-1})z)| \leq c$, $z \in G \setminus \{0\}$. 则有, $|\mathcal{K}(z)| \leq c\|z\|^\alpha$. 证毕. $\square$

我们将运用 [17] 中的方法证明一类算子的 Morrey 有界性. 对某个正整数 $h \in (0, Q)$, 设 $\mathcal{G} \in C^\infty(G \setminus \{0\})$ 是一个 $h - Q$ 次齐次核, 并设 P^h 是一个 h 次齐次的左不变微分算子. 定义算子

$$P^h Tg = P.V.(g * P^h \mathcal{G}).$$

引理 3.6 对任意 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$, 存在一个正常数 c 使得对每个 $g \in L^{p,\lambda}(G)$, 都有

$$\|P^h Tg\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c\|g\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (3.3)$$

证明 设 g 属于 $L^{p,\lambda}(G)$, 对任意可测集 $E \subset G$, 记 χ_E 为 E 的特征函数. 对任意球 $B = B(y, r)$, $y \in G$, $r > 0$, 记

$$g_0 = g\chi_{B_r(y)}, \quad g_k = g\chi_{B_{2^k r}(y) \setminus B_{2^{k-1} r}(y)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

其中 $\delta = 1/(2c_2)$, c_2 是 (2.1) 中给出的常数. 由引理 3.4, 可得

$$\|P^h Tg_0\|_{L^p(B_{\delta r}(y))} \leq \|P^h Tg_0\|_{L^p(G)} \leq c\|g\|_{L^p(B_r(y))} \leq cr^{\frac{\lambda}{p}}\|g\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (3.4)$$

现在考虑 $g_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, $z \in B_{\delta r}(y)$. 由引理 3.1 和 3.5 可知存在常数 $c > 0$, 使得

$$|P^h \mathcal{G}(\zeta^{-1} \circ z)| \leq c\|\zeta^{-1} \circ z\|^{-Q}.$$

而且, 若 $\zeta \in B_{2^k r}(y) \setminus B_{2^{k-1} r}(y)$, 则

$$2^{k-1}r \leq \|\zeta^{-1} \circ y\| \leq c_2(\|\zeta^{-1} \circ z\| + \|z^{-1} \circ y\|) \leq c_2(\|\zeta^{-1} \circ z\| + \delta r),$$

由此可得

$$\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \frac{1}{4c_2} 2^k r.$$

因而, 我们有

$$\begin{aligned} |P^h Tg_k(z)| &\leq \int_{2^{k-1}r \leq \|y^{-1} \circ \zeta\| \leq 2^k r} \frac{c}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^Q} |g(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \frac{c(4c_2)^Q}{(2^k r)^Q} \int_{B_{2^k r}(y)} |g(\zeta)| d\zeta \\ &\leq c'\|g\|_{L^{p,\lambda}(G)} (2^k r)^{\frac{\lambda-Q}{p}}, \end{aligned}$$

在 $B_{\delta r}(y)$ 上积分, 可得

$$\|P^h Tg_k\|_{L^p(B_{\delta r}(y))} \leq c'' r^{\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(G)} (2^k)^{\frac{\lambda-Q}{p}}, \quad (3.5)$$

其中 c'' 是一个依赖于 p, Q, c_2 的正常数. 由 (3.4) 和 (3.5), 有

$$\frac{1}{(\delta r)^{\frac{\lambda}{p}}} \|P^h Tg\|_{L^p(B_{\delta r}(y))} \leq \delta^{-\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(G)} \left(c + c'' \sum_{k=1}^{\infty} (2^{\frac{\lambda-Q}{p}})^k \right).$$

由 $\lambda < Q$, 可知上面的级数是收敛的. 因此, (3.3) 成立. 证毕. $\square$

4 一些插值引理

在本节, 我们将证明关于 Sobolev-Morrey 模的几个插值不等式. 令

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{p_0} X_i^2 + X_0,$$

并设 γ 是 $\mathcal{L}$ 的基本解. 算子 $\mathcal{L}$ 的转置为

$$\mathcal{L}^T = \sum_{i=1}^{p_0} X_i^2 - X_0.$$

下面给出在齐型空间上高价导数的表示公式:

引理 4.1 ^[20] 对任意整数 $k \geq 2$, 设左不变微分算子 P^{2k-1} 和 P^{2k-2} 分别是 $2k-1$ 和 $2k-2$ 次齐次的, 则存在 $(1-Q)$, $(2-Q)$ 次齐次核 $K^{(1)}, K^{(2)} \in C^\infty(G \setminus \{0\})$, 使得对任意测试函数 u , 有

$$\begin{aligned} P^{2k-1}u(x) &= \left((\mathcal{L}\mathcal{L} \cdots \mathcal{L}u) * K^{(1)} \right)_{k\text{次}}(x), \\ P^{2k-2}u(x) &= \left((\mathcal{L}\mathcal{L} \cdots \mathcal{L}u) * K^{(2)} \right)_{k\text{次}}(x). \end{aligned}$$

齐型空间上 Hardy-Littlewood 极大值算子的 Morrey 有界性则由下面引理给出.

引理 4.2 ^[22, 23] 设 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$, $f \in L^{p, \lambda}(G)$. 则存在正常数 c , 使得

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p, \lambda}(G)} \leq c\|f\|_{L^{p, \lambda}(G)}.$$

通过上面两个引理, 我们可获得几个插值引理. 给定两个球 B_{r_1}, B_{r_2} 和一个函数 $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $B_{r_1} \prec \varphi \prec B_{r_2}$ 意指 $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $x \in G$, $\varphi(x) = 1$, $x \in B_{r_1}$ 且 $\text{supp} \varphi \subseteq B_{r_2}$.

引理 4.3 ^[20] 对任意 $r > 0$, 正整数 k , 存在 $\varphi \in C_0^\infty(G)$, 使得 $B_{r/2} \prec \varphi \prec B_r$ 且

$$|P^j \varphi| \leq \frac{c}{r^j}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

其中 c 是一个正常数, P^j 为 j 次齐次的左不变微分算子.

引理 4.4 令 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$. 对任意 $\delta > 0$ 存在一个正常数 c , 使得对任意测试函数 u , 有

$$\|Du\|_{L^{p, \lambda}(G)} \leq \delta \|D^2u\|_{L^{p, \lambda}(G)} + \frac{c}{\delta} \|u\|_{L^{p, \lambda}(G)}. \quad (4.1)$$

证明 设 φ_δ 是一个截断函数且满足 $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \prec \varphi_\delta \prec B_\delta(x)$. 注意到 γ 是 $\mathcal{L}$ 的基本解, 则有

$$\begin{aligned} X_i u(x) &= \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} X_i \gamma(y^{-1} \circ x) [1 - \varphi_\delta(y)] \mathcal{L}u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq \delta} X_i \gamma(y^{-1} \circ x) \varphi_\delta(y) \mathcal{L}u(y) dy \\ &\equiv I + II, \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, p_0$. 由 $\mathcal{L}^T$ 是 $\mathcal{L}$ 的转置, 可得

$$I = \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \mathcal{L}^T (X_i \gamma(y^{-1} \circ x) [1 - \varphi_\delta(y)]) u(y) dy.$$

对任意 $g, f \in C^\infty(G)$, 用 $\tilde{D}f\tilde{D}g$ 表示 $X_i f X_i g$ ($i = 1, 2, \dots, p_0$) 的线性组合. 因而, 我们有

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^T(X_i \gamma(y^{-1} \circ x)(1 - \varphi_\delta(y))) \\ &= (1 - \varphi_\delta(y))\mathcal{L}^T X_i \gamma(y^{-1} \circ x) + \tilde{D}(1 - \varphi_\delta(y))\tilde{D}X_i \gamma(y^{-1} \circ x) + \mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta(y))X_i \gamma(y^{-1} \circ x). \end{aligned}$$

则 I 满足

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} (1 - \varphi_\delta(y))\mathcal{L}^T X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \tilde{D}(1 - \varphi_\delta(y))\tilde{D}X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta(y))X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

由引理 4.3,

$$|\tilde{D}(1 - \varphi_\delta)| \leq \frac{c}{\delta}, \quad |\mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta)| \leq \frac{c}{\delta^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} (1 - \varphi_\delta(y))\mathcal{L}^T X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{c}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q+1}} |u(y)|dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\delta} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^Q} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \mathcal{M}u(x), \\ I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \tilde{D}(1 - \varphi_\delta(y))\tilde{D}X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^Q} |u(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^Q} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \mathcal{M}u(x), \\ I_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta(y))X_i \gamma(y^{-1} \circ x)u(y)dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q-1}} |u(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^{Q-1}} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)|dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \mathcal{M}u(x). \end{aligned}$$

由引理 4.2,

$$\|I\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \frac{c}{\delta} \|\mathcal{M}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \frac{c}{\delta} \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.2)$$

现在, 我们估计 II :

$$\begin{aligned} II &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} X_i \gamma(y^{-1} \circ x) \varphi_{\delta}(y) \mathcal{L}u(y) dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q-1}} |\mathcal{L}u(y)| dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{\delta}\right)^{Q-1} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} |\mathcal{L}u(y)| dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{\delta}\right)^{Q-1} \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^Q \left(\frac{2^k}{\delta}\right)^Q \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} |\mathcal{L}u(y)| dy \\ &\leq c\delta \mathcal{M}\mathcal{L}u(x). \end{aligned}$$

因而, 根据引理 4.2,

$$\|II\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c\delta \|\mathcal{M}\mathcal{L}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c\delta \|\mathcal{L}u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.3)$$

由 (4.2) 和 (4.3), 可知 (4.1) 成立. 证毕. $\square$

引理 4.5 设 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$. 对任意 $\delta > 0$ 存在一个正常数 c , 使得对每个测试函数 u , 有

$$\|D^2u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \delta^2 \|D^4u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \frac{c}{\delta^2} \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.4)$$

证明 对任意 $x \in G$, 令 φ_{δ} 是一个截断函数且满足 $B_{\frac{\delta}{2}}(x) \prec \varphi_{\delta} \prec B_{\delta}(x)$. 根据引理 4.1,

$$\begin{aligned} P^2u(x) &= \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) [1 - \varphi_{\delta}(y)] \mathcal{L}\mathcal{L}u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq \delta} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) \varphi_{\delta}(y) \mathcal{L}\mathcal{L}u(y) dy \\ &\equiv I + II. \end{aligned}$$

则有

$$I = \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T (K^{(2)}(y^{-1} \circ x) [1 - \varphi_{\delta}(y)]) u(y) dy.$$

对每个 $g, f \in C^{\infty}(G)$, 用 $\tilde{D}^i f \tilde{D}^j g$ 记 $P^i f P^j g$ ($i+j=4, i, j=1, 2, 3$) 的线性组合. 因而, 我们有

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^T \mathcal{L}^T (K^{(2)}(y^{-1} \circ x) (1 - \varphi_{\delta}(y))) \\ &= (1 - \varphi_{\delta}(y)) \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T K^{(2)}(y^{-1} \circ x) + \tilde{D}(1 - \varphi_{\delta}(y)) \tilde{D}^3 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) \\ &\quad + \tilde{D}^2(1 - \varphi_{\delta}(y)) \tilde{D}^2 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) + \tilde{D}^3(1 - \varphi_{\delta}(y)) \tilde{D} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) \\ &\quad + \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T (1 - \varphi_{\delta}(y)) K^{(2)}(y^{-1} \circ x), \end{aligned}$$

由引理 4.3,

$$|\tilde{D}(1 - \varphi_{\delta})| \leq \frac{c}{\delta}, \quad |\tilde{D}^2(1 - \varphi_{\delta})| \leq \frac{c}{\delta^2},$$

$$|\tilde{D}^3(1 - \varphi_\delta)| \leq \frac{c}{\delta^3}, \quad |\mathcal{L}^T \mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta)| \leq \frac{c}{\delta^4}.$$

因而, 我们有

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} (1 - \varphi_\delta(y)) \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \tilde{D}(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D}^3 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \tilde{D}^2(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D}^2 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \tilde{D}^3(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\quad + \int_{\|y^{-1} \circ x\| > \frac{\delta}{2}} \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T(1 - \varphi_\delta(y)) K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} (1 - \varphi_\delta(y)) \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{c}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q+2}} |u(y)| dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^2} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^Q} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \mathcal{M}u(x), \\ I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \tilde{D}(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D}^3 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q+1}} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\delta} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^Q} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \mathcal{M}u(x), \\ I_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \tilde{D}^2(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D}^2 K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^Q} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^Q} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{\delta^2} \mathcal{M}u(x), \\ I_4 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \tilde{D}^3(1 - \varphi_\delta(y)) \tilde{D} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c}{\delta^3} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q-1}} |u(y)| dy \\
&\leq \frac{c}{\delta^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^{Q-1}} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)| dy \\
&\leq \frac{c}{\delta^2} \mathcal{M}u(x), \\
I_5 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \mathcal{L}^T \mathcal{L}^T (1 - \varphi_\delta(y)) K^{(2)}(y^{-1} \circ x) u(y) dy \\
&\leq \frac{c}{\delta^4} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q-2}} |u(y)| dy \\
&\leq \frac{c}{\delta^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1}\delta)^{Q-2}} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^k \delta} |u(y)| dy \\
&\leq \frac{c}{\delta^2} \mathcal{M}u(x),
\end{aligned}$$

于是由引理 4.2, 可得

$$\|I\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \frac{c}{\delta^2} \|\mathcal{M}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \frac{c}{\delta^2} \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.5)$$

现在估计 II:

$$\begin{aligned}
II &= \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq \delta} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) \varphi_\delta(y) \mathcal{L} \mathcal{L} u(y) dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} K^{(2)}(y^{-1} \circ x) \varphi_\delta(y) \mathcal{L} \mathcal{L} u(y) dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}\delta < \|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} \frac{1}{\|y^{-1} \circ x\|^{Q-2}} |\mathcal{L} \mathcal{L} u(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{\delta}\right)^{Q-2} \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} |\mathcal{L} \mathcal{L} u(y)| dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{k+1}}{\delta}\right)^{Q-2} \left(\frac{\delta}{2^k}\right)^Q \left(\frac{2^k}{\delta}\right)^Q \int_{\|y^{-1} \circ x\| \leq 2^{-k}\delta} |\mathcal{L} \mathcal{L} u(y)| dy \\
&\leq c\delta^2 \mathcal{M}(\mathcal{L} \mathcal{L} u)(x).
\end{aligned}$$

由此可得,

$$\begin{aligned}
\|II\|_{L^{p,\lambda}(G)} &\leq c\delta^2 \|\mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{L} u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c\delta^2 \|\mathcal{L} \mathcal{L} u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \\
&\leq c\delta^2 \|D^4 u\|_{L^{p,\lambda}(G)}.
\end{aligned} \quad (4.6)$$

综合 (4.5) 和 (4.6) 可得 (4.4) 成立. 证毕. $\square$

引理 4.6 对任意整数 $k > 2$ 和任意 $\delta > 0$, 存在一个正常数 c_δ , 使得对任意测试函数 u , 有

$$\|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \delta \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\delta \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}, \quad (4.7)$$

其中 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$.

证明 我们将运用归纳法证明此引理. 当 $k = 2$, 由引理 4.5 可知 (4.7) 成立. 假设 (4.7) 直到 $k - 1$ 都成立, 即对任意 $\tau > 0$, 存在常数 c_τ , 使得

$$\|D^{2k-4}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \tau \|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\tau \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.8)$$

根据引理 4.1,

$$P^{2k-2}u = \left((\mathcal{L}\mathcal{L} \cdots \mathcal{L}u) * K^{(2)} \right);$$

由引理 4.5, 可知对任意 $\delta > 0$, 有

$$\|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \delta \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \frac{c}{\delta} \|D^{2k-4}u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.9)$$

因而, 由 (4.8) 和 (4.9), 我们有

$$\|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \delta \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \frac{c}{\delta} (\tau \|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\tau \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}),$$

选取 $\tau = \frac{\delta}{2c}$, 可得 (4.7). 证毕. $\square$

引理 4.7 对任意整数 $k \geq 2$ 和任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个正常数 c_ε , 使得对任意测试函数 u , 有

$$\|D^{2k-1}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \varepsilon \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\varepsilon \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}, \quad (4.10)$$

其中 $p \in (1, \infty)$, $\lambda \in [0, Q)$.

证明 由引理 4.1,

$$P^{2k-1}u = \left((\mathcal{L}\mathcal{L} \cdots \mathcal{L}u) * K^{(1)} \right);$$

由引理 4.4 可知, 对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|D^{2k-1}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \varepsilon \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \frac{c}{\varepsilon} \|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.11)$$

根据引理 4.6, 可知对任意 $\delta > 0$, 存在常数 c_δ , 使得

$$\|D^{2k-2}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \delta \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\delta \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (4.12)$$

因而, 由 (4.11) 和 (4.12), 有

$$\|D^{2k-1}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq \varepsilon \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + \frac{c}{\varepsilon} (\delta \|D^{2k}u\|_{L^{p,\lambda}(G)} + c_\delta \|u\|_{L^{p,\lambda}(G)}),$$

选取 $\delta = \frac{\varepsilon^2}{c}$, 可得 (4.10). 证毕. $\square$

5 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 由 (3.2), 对任意 $u \in C_0^\infty(G)$ 可得

$$X_i X_j u(z) = P.V.(Lu * \Gamma_{ij})(z) + c_{ij} Lu(z), \quad i, j = 1, 2, \dots, p_0.$$

因此, 根据引理 3.4 和 3.6, 可知存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|X_i X_j u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p_0.$$

由 $a_0 X_0 u = Lu - \sum_{i,j=1}^q a_{ij} X_i X_j u$, 我们有

$$\|X_0 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

因而,

$$\|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

由引理 4.4, 可得 (1.4). 证毕. $\square$

定理 1.2 的证明 我们将证明对任意正偶数 $k \geq 2$, 存在一个常数 $c > 0$ 使得对任意 $u \in C_0^\infty(G)$, 有

$$\|D^k u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|D^{k-2} Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}. \quad (5.1)$$

由定理 1.1, 可得

$$\|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

由 (3.1), 有

$$u(z) = (Lu * \Gamma(\cdot))(z) = ([L(Lu) * \Gamma(\cdot)] * \Gamma(\cdot))(z) = (L(Lu) * K(\cdot))(z). \quad (5.2)$$

由引理 3.3, 可知 $K(z) = (\Gamma(\cdot) * \Gamma(\cdot))(z)$ 是 $4 - Q$ 次齐次的. 注意到 P^k 是 k 次齐次左不变微分算子. 根据引理 3.4, 有

$$P^4 u(z) = P.V. \int_G P^4 K(\zeta^{-1} \circ z) L(Lu)(\zeta) d\zeta + c L(Lu)(z).$$

则由引理 3.4 和 3.6, 可知存在常数 $c > 0$, 使得

$$\|P^4 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|L(Lu)\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|D^2 Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

现在考虑 P^6 的估计. 事实上, P^6 可分为 $P^4 P^2$ 和 $P^5 P$. 若 $P^6 = P^4 P^2$, 由 (5.2),

$$P^2 u(z) = (L(Lu) * P^2 K(\cdot))(z), \quad (5.3)$$

其中 $P^2 K$ 是 $2 - Q$ 次齐次的; 则 (5.3) 可写为

$$P^2 u(z) = (LLLu * [\Gamma(\cdot) * P^2 K(\cdot)])(z) = (LLLu * \tilde{K}(\cdot))(z),$$

其中 $\tilde{K}$ 是 $4 - Q$ 次齐次的. 现在将 P^4 作用上面等式两端, 根据引理 3.4, 我们有

$$P^6 u(z) = P.V. \int_G P^4 \tilde{K}(\zeta^{-1} \circ z) LL(Lu)(\zeta) d\zeta + c LL(Lu)(z),$$

其中 $P^4 \tilde{K}$ 是 $-Q$ 次齐次的. 由引理 3.4 和 3.6, 可得

$$\|P^6 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|L(LLu)\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|D^4 Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

类似地, 可估计第二种情形 $P^6 = P^5 P$. 事实上, 由 (3.1),

$$\begin{aligned} Pu(z) &= (Lu * P\Gamma(\cdot))(z) = ([L(L(Lu * \Gamma(\cdot))) * \Gamma(\cdot)] * P\Gamma(\cdot))(z) \\ &= (LL(Lu) * \hat{K}(\cdot))(z), \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中 $\widehat{K}$ 是 $5 - Q$ 次齐次的. 现在将 P^5 作用于 (5.4) 的两边, 根据引理 3.4, 有

$$P^6 u(z) = P.V. \int_G P^5 \widehat{K}(\zeta^{-1} \circ z) LL(Lu)(\zeta) d\zeta + c LL(Lu)(z).$$

其中 $P^5 \widehat{K}$ 是 $-Q$ 次齐次的. 由引理 3.4 和 3.6, 可得

$$\|P^6 u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|L(L(Lu))\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|D^4 Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)}.$$

下面, 我们证明对每个正偶数 k , (5.1) 成立. 首先, 我们将运用归纳法证明对正偶数 k , 有

$$P^{k-2} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * K^{(k-3)} \right), \quad (5.5)$$

$$P^{k-1} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * K^{(k-2)} \right), \quad (5.6)$$

其中 $K^{(k-2)}, K^{(k-3)}$ 分别是 $2 - Q, 1 - Q$ 次齐次的.

事实上, 由 (3.1)

$$u(z) = Lu * \Gamma = (LLu * \Gamma) * \Gamma = LLu * K,$$

其中 K 是 $4 - Q$ 次齐次的. 由此可得

$$P^2 u = LLu * P^2 K = LLu * K^{(1)}, \quad P^3 u = LLu * P^3 K = LLu * K^{(2)},$$

其中 $K^{(1)}, K^{(2)}$ 分别是 $2 - Q, 1 - Q$ 次齐次的. 假设 (5.5) 和 (5.6) 直到 $k - 1$ 成立,

$$P^{k-4} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}-1\text{次}} * K^{(k-5)} \right),$$

$$P^{k-3} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}-1\text{次}} * K^{(k-4)} \right),$$

其中 $K^{(k-5)}, K^{(k-4)}$ 分别是 $2 - Q, 1 - Q$ 次齐次的. 现在将 P^{k-2} 分为 PP^{k-3} 和 $P^2 P^{k-4}$. 在第一种情形下, 有

$$\begin{aligned} P^{k-2} u &= P \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}-1\text{次}} * K^{(k-4)} \right) = P \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * (\Gamma * K^{(k-4)}) \right) \\ &= \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * P(\Gamma * K^{(k-4)}) \right) = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * \widehat{K}^{(k-3)} \right), \end{aligned}$$

其中 $\widehat{K}^{(k-3)}$ 是 $2 - Q - (Q - 1) + Q - 1 = 2 - Q$ 次齐次的. 在第二种情形下,

$$\begin{aligned} P^{k-2} u &= P^2 \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}-1\text{次}} * K^{(k-5)} \right) = P^2 \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * (\Gamma * K^{(k-5)}) \right) \\ &= \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * P^2(\Gamma * K^{(k-5)}) \right) = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * \widetilde{K}^{(k-3)} \right), \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{K}^{(k-3)}$ 也是 $2 - Q - Q + 2 + Q - 2 = 2 - Q$ 次齐次的. 因此,

$$P^{k-2} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * K^{(k-3)} \right),$$

其中 $K^{(k-3)}$ 是 $2 - Q$ 次齐次的. 类似地, P^{k-1} 能被写为 $P^2 P^{k-3}$ 或 $P^3 P^{k-4}$, 我们可证明

$$P^{k-1} u = \left((LL \cdots Lu)_{\frac{k}{2}\text{次}} * K^{(k-2)} \right),$$

其中 $K^{(k-2)}$ 是 $1-Q$ 次齐次的. 这就证明了 (5.5) 和 (5.6) 对任意正偶数 k 都成立.

下面, 可将 P^k 分为 P^2P^{k-2} 和 PP^{k-1} . 在第一种情形, 有

$$P^k u(z) = P.V. \int_G P^2 K^{(k-3)}(\zeta^{-1} \circ z) \underset{k/2\text{次}}{(LL \cdots Lu)(\zeta)} d\zeta + c \underset{k/2\text{次}}{(LL \cdots Lu)(z)},$$

其中 $P^2 K^{(k-3)}$ 是 $-Q$ 次齐次的. 在第二种情形, 可得

$$P^k u(z) = P.V. \int_G PK^{(k-2)}(\zeta^{-1} \circ z) \underset{k/2\text{次}}{(LL \cdots Lu)(\zeta)} d\zeta + c \underset{k/2\text{次}}{(LL \cdots Lu)(z)},$$

其中 $PK^{(k-2)}$ 是 $-Q$ 次齐次的. 则由引理 3.4 和 3.6, 可得

$$\|P^k u\|_{L^{p,\lambda}(G)} \leq c \|D^{k-2} Lu\|_{L^{p,\lambda}(G)},$$

其中 c 是一个正常数. 因此, (5.1) 成立. 根据引理 4.7, 存在常数 $c > 0$, 使得 (1.5) 成立. 证毕. $\square$

致谢 作者对审稿人和编辑部的许多宝贵建议深表感谢.

参考文献

- 1 Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math, 1967, 119: 147–171
- 2 Folland G B. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Arkiv Math, 1975, 13: 161–207
- 3 Rothschild L P, Stein E M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math, 1976, 137: 247–320
- 4 Barucci E, Polidoro S, Vespri V. Some results on partial differential equations and Asian options. Math Models Methods Appl Sci, 2001, 11: 475–497
- 5 Di Francesco M, Pascucci A. On the complete model with stochastic volatility by Hobson and Rogers. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 2004, 460: 3327–3338
- 6 Desvillettes L, Villani C. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation. Comm Pure Appl Math, 2001, 54: 1–42
- 7 Lions P. On Boltzmann and Landau equations. Philos Trans Roy Soc London Ser A, 1994, 346: 191–204
- 8 Mumford D. Elastica and computer vision in Algebraic geometry and its applications. New York: Springer, 1994
- 9 Lanconelli E, Polidoro S. On a class of hypoelliptic evolution operators. Partial differential equations, II, Rend Sem Mat Univ Po-litec Torino, 1994, 52: 29–63
- 10 Kupcov L P. The fundamental solutions for a class of second-order elliptic- parabolic equations. Differentsial'nye Uravneniya, 1972, 8: 1649–1660; English Transl Differ Equ, 1972, 8: 1269–1278
- 11 Kupcov L P. Mean value theorem and a maximum principle for Kolmogorov's equation. Mat Zametki, 1974, 15: 479–489; English Transl Math Notes, 1974, 15: 280–286
- 12 Wang W, Zhang L. The C^α regularity of a class of non-homogeneous ultraparabolic equations. Sci China Ser A, 2009, 52: 1589–1606
- 13 Di Fazio G, Ragusa M A. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. J Funct Anal, 1993, 112: 241–256
- 14 Liu L Z. Interior estimates in Morrey spaces for solutions of elliptic equations and weighted boundedness for commutators of singular integral operators. Acta Math Sin Engl Ser, 2005, 25: 89–94
- 15 Lieberman G M. A mostly elementary proof of Morrey space estimates for elliptic and parabolic equations with VMO coefficients. J Funct Anal, 2003, 201: 457–479
- 16 Tang S, Niu P. Morrey estimates for parabolic nondivergence operators of Hörmander type. Rend Sem Mat Univ Padova, 2010, 123: 91–129
- 17 Polidoro S, Ragusa M A. Sobolev-Morrey spaces related to an ultraparabolic equation. Manuscripta Math, 1998, 96: 371–392
- 18 陈淑红, 谭忠. p -调和逼近方法和可控增长条件下能量极小 p -调和映射的最优内部正则性. 中国科学 A 辑, 2006, 36: 1302–1312
- 19 崔学伟, 钮鹏程. 带有不同权函数的退化拟线性椭圆方程弱解的 Hölder 正则性. 中国科学: 数学, 2010, 40: 683–692

- 20 Bramanti M, Brandolini L. L^p estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups. *Rend Sem Mat Univ Pol Torino*, 2000, 58: 389–434
- 21 Folland G B, Stein E M. Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group. *Comm Pure Appl Math*, 1974, 27: 429–522
- 22 Mizuhara L. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces. *Harmonic analysis (Sendai, 1990)* 183–189, *ICM-90 Satell Conf Proc*. Tokyo: Springer, 1991
- 23 Palagachev D, Softova L. Singular Integral Operators, Morrey Spaces and Fine Regularity of Solutions to PDE's. *Potential Analysis*, 2004, 20: 237–263

Global Sobolev-Morrey estimates for hypoelliptic operators with drift on homogeneous groups

NIU PengCheng & FENG XiaoJing

Abstract Let G be a homogeneous group and $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ be left invariant real vector fields on G satisfying the Hörmander's rank condition. Assume that $X_1, X_2, \dots, X_{p_0}$ are homogeneous of degree one and X_0 is homogeneous of degree two. In this paper, we study the following hypoelliptic operator with drift:

$$L = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij} X_i X_j + a_0 X_0,$$

where (a_{ij}) is a constant matrix satisfying the uniform ellipticity condition and a_0 is a constant away from zero, and obtain the global Sobolev-Morrey estimates on G by establishing the Morrey boundedness of the singular integrals on homogeneous spaces and interpolation inequalities depending on vector fields.

Keywords Sobolev-Morrey estimates, homogeneous group, vector fields

MSC(2010) 35R03, 49N60

doi: 10.1360/012011-806