中 國 科 學
第2卷第2期,165—178頁,1951年5月

關於 K 展開空間的子空間理論*

谷 超 豪
(浙江大學數學系)

在陶格拉斯 (J. Douglas) 首先創設的 K 展開空間中[1],迄今尚無類似於黎曼流或芬斯拉流空間的子空間的理論,本文的研究即由此所引起。採取與普通的逺交的道路空間同一方法,可作 $N+1$ 次元的 K 展開空間在其中一超曲面上的誘導聯絡[2],而据此誘導聯絡,却未必能在超曲面上得到一 K 展開空間,因除去 $K=1$ 的情形外,K 展開空間所應滿足的積分可能條件未必成立。因此只是一具有逺交聯絡的空間,這空間的逺交聯絡係數除爲地點的函數外,並應爲一 K 重元素的函數,故本文首先討論這種以 K 重元素爲支持元素的逺交聯絡空間的性質,此種空間,較 K 展開空間或陶格拉斯[3]所稱的一般道路空間的範疇爲廣,但却爲波爾脫洛底 (E. Bortolotti) 所論的空間[4]的一種特殊情形。我們的若干概念,也參致於波氏的研究,如向量之平行移動、共變微分等。作者依據 K 展開、全測地、平面的平行移動[5]等概念,將空間的'道路'加以擴充,而稱爲空間的'平集合',所謂平集合者,即在適當參數表示下,依據一支持元素域,集合的切平面元素自身爲平行的。特別當集合的次元爲 K,支持元素即爲平集合的切平面元素,則平集合的微分方程式即爲 K 展開的方程式。若此系方程式完全可以積分,則空間爲 K 展開空間。

S_{N+1} 中的一超曲面,是指其中的一 N 次元集合而言,本文依照普通道路空間所用的方法,作得超曲面理論,但須注意者,我們應將 S_{N+1} 視爲點及支持元素的集合,而 V_N 視爲點與支持元素的部份集合。我們作得了誘導聯絡,積分可能條件,其中若干爲高斯及柯達齊方程式的擴充[6]又得到了 K 展開空間超曲面上誘導一 K 展開空間的條件,並以逺交平坦的 K 展開空間作一例證。

*1950年12月1日收到

作者曾於另一場合建立了隱函數表示下 K 展開空間的理論[7]，其誘導聯絡的研究也可平行地發展，但所得的誘導空間，却是以 $N+1-K$ 重共變向量爲支持元素，也即支持元素爲 $K-1$ 重的，並使誘導與相交發生了一定的關聯。此空間只可能爲 $(K-1)$ 展開的空間，故其討論尙設在 $K>1$ 時進行，此種誘導，在過去的研究中，似尙無類似。

所述的誘導方法僅爲表示的方便而設定在超曲面上，對於一般的子空間在其因次適當時自然可作同樣的誘導。

作者在準備本文時承蘇步靑教授之鼓勵與指導，特此誌謝。

1. 在 $N+1$ 次元的空間 S_{N+1} 中，點的座標記爲 $(y^1, y^2, \cdots\cdots, y^{N+1})$，在空間中的每一點，附着一 K 重元素，所謂 K 重元素便是在點 (y^α) 以 K 個獨立的共變向量 p^α_σ $(\alpha=1,2,\cdots,N+1;\ \sigma=1,2,\cdots,K)$ 爲底的向量空間。我們稱如此的 K 重元素爲空間的'支持元素'。依據於 S_{N+1} 中的點及支持元素，我們並有一系函數 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y, p)$，這系函數容許 p^α_σ 的齊一次變換

$$'p^\alpha_\sigma = A^\lambda_\sigma p^\alpha_\lambda, \tag{1}$$

即

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y^\lambda, A^\lambda_\sigma p^\epsilon_\lambda) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y^\alpha, p^\epsilon_\sigma). \tag{2}$$

在陶格拉斯的意義之下，它爲具有推廣的齊零次性的函數[8]。$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 及以下所論及的諸函數均假定其可繼續地微分至所需要的階數。在一座標變換

$$'y^\beta = 'y^\beta(y^\alpha) \tag{3}$$

之下，支持元素的底所受的變換應爲

$$'p^\beta_\sigma = p^\alpha_\sigma \frac{\partial' y^\beta}{\partial y^\alpha}. \tag{4}$$

而函數系統 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y, p)$ 的變換律是

$$'\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}('y, 'p) = \left(\Gamma^\delta_{\epsilon\phi}(y, p)\frac{\partial y^\epsilon}{\partial' y^\beta}\frac{\partial y^\phi}{\partial' y^\gamma} + \frac{\partial^2 y^\delta}{\partial' y^\beta \partial' y^\gamma}\right)\frac{\partial' y^\alpha}{\partial y^\delta} \tag{5}$$

即 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(y, p)$ 爲空間 S_{N+1} 的一系遠交聯絡係數，S_{N+1} 稱作以 K 重元素爲支持元素的遠交聯絡空間。

依據遠交聯絡係數，可由一已知的張量域作其共變微分與其沿一曲線的絕對微分，例如對向量域 $V^\alpha(y, p)$ 則有

$$V^\alpha{}_{|\beta} = V^\alpha{}_{.\beta} - V^\alpha{}_{|}{}^\sigma_\gamma \Gamma^\gamma_{\beta\delta} p^\delta_\sigma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} V^\gamma, \tag{6}$$

$$D V^{\alpha} = V^{\alpha}{}_{|\beta}\, d y^{\beta} \ . \tag{7}$$

$$\left(V^{\alpha}{}_{\cdot\beta} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} ,\quad V^{\alpha}|^{\sigma}_{\gamma} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial p^{\gamma}_{\sigma}} \right)$$

這兩種運算都是張量的[9]，元素的平行移動，我們定義爲絕對微分之爲 0 。 例如支持元素的底向量自身若沿一曲線互相平行，則滿足

$$\frac{\partial p^{\alpha}_{\sigma}}{\partial y^{\beta}} \frac{d y^{\beta}}{d t} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\, p^{\gamma}_{\sigma} \frac{d y^{\beta}}{d t} = 0. \tag{8}$$

一張量關於支持元素的底向量的支量的共變微分，也是張量的運算，對於現有的兩種張量微分的運算，由於交換順序，可以得到下列的交換公式：

$$V_{\alpha|\beta\gamma} - V_{\alpha|\gamma\beta} = -(V_{\epsilon}\, \delta^{\delta}_{\alpha} + V_{\alpha}|^{\sigma}_{\epsilon}\, p^{\delta}_{\sigma}) R^{\epsilon}{}_{\delta\beta\gamma} \ , \tag{9}$$

$$V_{\alpha\cdot\beta}|^{\sigma}_{\gamma} - V_{\alpha}|^{\sigma}_{\gamma|\beta} = -(V_{\epsilon}\, \delta^{\delta}_{\alpha} + V_{\alpha}|^{\sigma}_{\epsilon}\, p^{\delta}_{\sigma})\, \Gamma^{\epsilon}_{\delta\beta}|^{\sigma}_{\gamma} \ . \tag{10}$$

於此，

$$R^{\epsilon}{}_{\delta\beta\gamma} = [\Gamma^{\epsilon}_{\delta\beta\cdot\gamma} - \Gamma^{\epsilon}_{\delta\beta}|^{\tau}_{\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\phi\gamma}\, p^{\phi}_{\tau} - \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\beta}\, \Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma}] - (\beta|\gamma) \tag{11}$$

是一張量，定義作空間 S_{N+1} 的曲率張量，而 $\Gamma^{\epsilon}_{\iota\beta}|^{\sigma}_{\gamma}$ 也是 S_{N+1} 中的一張量，但 $(\beta|\gamma)$ 表示式中前一部份中交換 β, γ 所得的項。

$R^{\epsilon}{}_{\delta\beta\gamma}$ 有一幾何的解釋，在一空間的微小四邊形 $A:(y^{\iota})$，$B:(y^{\iota} + \frac{\partial y^{\iota}}{\partial u} du)$，$C:(y^{\iota} + \frac{\partial y^{\iota}}{\partial u} du + \frac{\partial y^{\iota}}{\partial v} dv)$，$D:(y^{\iota} + \frac{\partial y^{\iota}}{\partial v} dv)$，若一單爲地點函數的向量 $V^{\alpha}(y)$ 沿 ABC 平行移動至 C，同時使支持元素在同一途徑上也是平行移動，所得到 C 點的向量使爲 $V^{\alpha} + \delta V^{\alpha} + \delta_1 V^{\alpha} + \delta_1 \delta V^{\alpha}$；同時，同一向量沿 ADC 的平行移動的結果爲 $V^{\alpha} + \delta_1 V^{\alpha} + \delta V^{\alpha} + \delta\delta_1 V^{\alpha}$，則有

$$\delta_1 \delta V^{\alpha} - \delta\delta_1 V^{\alpha} = - V^{\epsilon} R^{\alpha}{}_{\epsilon\beta\gamma} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial u} \frac{\partial y^{\gamma}}{\partial v} du dv. \tag{12}$$

事實上這結果和 L. Berwald[10] 的曲率的意義相同。

2. 在我們所討論的空間 S_{N+1} 中，取一曲線 C；其適當的參數表示當爲

$$y^{\iota} = y^{\iota}(s) \ , \tag{13}$$

倘參攷於沿曲線的一支持元素域，其切線向量爲互相平行，就是

$$\frac{d^2 y^{\alpha}}{d s^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(y, p) \frac{d y^{\beta}}{d s} \frac{d y^{\gamma}}{d s} = 0 \tag{14}$$

時常成立，則曲線 C 稱爲空間的道路。 我們尙可根據 K 展開的性質與全測地集合、平面的平行移動的概念，來定義空間的一種具有特殊性質的集合，我們稱之爲

'平集合'。 此種集合，依據一域支持元素並在適當的參數表示之下，

$$y^\alpha=y^\alpha(v^L), \quad L=1,2,\cdots\cdots,m, \tag{15}$$

其切平面元素滿足方程式

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial v^L \partial v^J}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial v^L}\frac{\partial y^\gamma}{\partial v^J}=0, \tag{16}$$

或

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial v^L}\Big|\beta\ \frac{\partial y^\beta}{\partial v^J}=0. \tag{17}$$

將此式沿 M 曲線絕對微分，並作其交換公式，可知其積分可能條件為

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\frac{\partial y^\beta}{\partial v^J}\frac{\partial y^\gamma}{\partial v^L}\frac{\partial y^\delta}{\partial v^M}=0. \tag{18}$$

繼續微分，而得到

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta|\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_q}\frac{\partial y^\beta}{\partial v^J}\frac{\partial y^\gamma}{\partial v^L}\frac{\partial y^\delta}{\partial v^M}\frac{\partial y^{\epsilon_1}}{\partial v^{N_1}}\cdots\cdots\frac{\partial y^{\epsilon_q}}{\partial v^{N_q}}=0. \tag{19}$$

若(18)，(19)構成一有限共存系統，則(16)的解存在即空間中存在 m 次元的平集合。

特別當 $m=K$ 時，而支持元素取為集合的切平面元素，則(16)化作

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial v^\lambda \partial v^\mu}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial v^\lambda}\frac{\partial y^\gamma}{\partial v^\mu}=0, \quad \left(p^\epsilon_\lambda=\frac{\partial y^\epsilon}{\partial v^\lambda}\right) \tag{20}$$

積分可能條件(18)，(19)化為

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,p^\beta_\lambda\,p^\gamma_\mu\,p^\delta_\nu=0, \tag{21}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta|\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_p}\ p^\beta_\lambda\,p^\gamma_\mu\,p^\delta_\nu\,p^{\epsilon_1}_{\sigma_1}\cdots\cdots p^{\epsilon_p}_{\sigma_p}=0. \tag{22}$$

若(21)成為恆等式，過一點及任意一 K 重方向即可完全決定一集合，S_{N+1} 即為 K 展開空間。 (20)式的幾何意義乃是切線向量在集合上的平行移動與道路無關。

3. 現開始討論子空間的問題。 為形式上簡單計，我們僅討論超曲面的問題。 設 S_{N+1} 上有一超曲面 V_N，其在 S_{N+1} 中的方程式為

$$\phi(y^1,y^2,\cdots\cdots,y^{N+1})=0, \tag{23}$$

共變向量

$$\nu_\alpha=\frac{\partial\phi}{\partial y^\alpha} \tag{24}$$

表示曲面的法線向量，我們可以在 V_N 之上的每點，結合一不與 ν_α 垂直的反變向量

ν^α，而採取一系座標變換

$$x^j=\phi^j(y^1, y^2, \cdots\cdots, y^{N+1}), \quad x^{N+1}=\phi \tag{25}$$

或

$$y^\alpha=y^\alpha(x^\beta), \tag{26}$$

使 V_N 有一參數的表示爲

$$y^\alpha=y^\alpha(x^1, x^2, \cdots\cdots, x^N, 0), \tag{27}$$

並使

$$\nu^\alpha=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^{N+1}} \tag{28}$$

即爲 x^{N+1} 座標曲線的切線方向[11]。 我們不妨稱 ν^α 爲超曲面的擬法線。

一超曲面 V_N 與其擬法線 ν^α 已經取定之後，我們可以作 S_{N+1} 中任何一張量 $a^{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\cdots\beta_s}$ 的誘導張量，

$$\bar{a}^{i_1\cdots\cdots i_r}_{j_1\cdots\cdots j_s}=a^{\alpha_1\cdots\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\cdots\beta_s}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\alpha_1}}\cdots\cdots\frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{\alpha_r}}\frac{\partial y^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\cdots\frac{\partial y^{\beta_s}}{\partial x^{j_s}}. \tag{29}$$

特別是對支持元素

$$\bar{p}^{\,i}_{\sigma}=\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\,p^\alpha_\sigma. \tag{30}$$

我們常稱，以 p^α_σ 爲底的支持元素在 V_N 上，當它滿足

$$p^\alpha_\sigma\,\nu_\alpha=0, \tag{31}$$

即

$$p^\alpha_\sigma=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\,\bar{p}^i_\sigma \tag{32}$$

時。 故在我們的觀點之下，V_N 是祝爲滿足 (23) 的點與在 V_N 上的支持元素的集合。 在此，我們須假定 $K<N$，定義在 S_{N+1} 的遠交聯絡 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 也可以在 V_N 上作其誘導聯絡，

$$\bar{\Gamma}^{\,i}_{jk}=\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}, \tag{33}$$

$\bar{\Gamma}^i_{jk}$ 中的支持元素與 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 中的支持元素滿足關係(30)與(32)。

在座標變換

$$x^i=x^i('x^l) \qquad x^{N+1}='x^{N+1} \tag{34}$$

之下，關係式

$$\bar{\Gamma}^{i}_{jk}(x,p)=\left(\frac{\partial^2\, {}'x^l}{\partial x^j\,\partial x^k}+{}'\Gamma^{l}_{pq}({}'x,{}'p)\frac{\partial\, {}'x^p}{\partial x^j}\frac{\partial\, {}'x^q}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial\, {}'x^l} \tag{35}$$

常成立。故 V_N 也是以 K 重元素爲支持元素的遠交聯絡空間。以後以 $T^{(i)}{}_{(j),k}$ 表示張量 $T^{(i)}{}_{(j)}$ 在 V_N 中的共變微分。

4. 我們已有兩個以 K 重元素爲支持元素的遠交聯絡空間 S_{N+1} 與 V_N，而 V_N 是存在於 S_{N+1} 之中；因之，可以求 V_N 中諸元素應滿足的微分方程式，而求出其積分可能條件。爲此，先定義在 V_N 中的若干張量

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{ij}=\nu_{\alpha\beta}\, y^{\alpha}_{,i}\, y^{\beta}_{,j}, \quad \left(y^{\alpha}_{,i}=\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{i}}\right);\\
&l^{i}_{j}=\nu^{\alpha}{}_{|\beta}\, x^{i}{}_{|\alpha}\, y^{\beta}{}_{,j}, \left(x^{i}{}_{|\alpha}=\frac{\partial x^{i}}{\partial y^{\alpha}}\right);\\
&l_{i}=\nu^{\alpha}{}_{|\beta}\, \nu_{\alpha}\, y^{\beta}_{,i}=-\nu_{\alpha\beta}\, \nu^{\alpha}\, y^{\beta}_{,i}.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

其中 ω_{ij} 爲與 ν^{α} 的取法無關。特別當 y^{α} 取爲 x^{α} 座標系統時，即

$$\nu_{\alpha}=\delta^{N+1}_{\alpha}, \qquad \nu^{\alpha}=\delta^{\alpha}_{N+1}. \tag{37}$$

因(36)中的三張量爲 y^{α} 的不變式，故所取形式應爲

$$\omega_{ij}=-\bar{\Gamma}^{N+1}_{ij},\ l^{i}_{j}=\bar{\Gamma}^{i}_{N+1\, j},\ l_{i}=\bar{\Gamma}^{N+1}_{N+1\, i}. \tag{38}$$

改書方程式(33)爲

$$\frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^i\,\partial x^j}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\gamma}}{\partial x^j}=\bar{\Gamma}^{\beta}_{ij}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \tag{39}$$

與取 y^{α} 爲座標系統 x^{α} 時所得方程式比較，得到張量方程式

$$y^{\alpha}_{,ij}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, y^{\beta}_{,i}\, y^{\gamma}_{,j}=-\omega_{ij}\,\nu^{\alpha}. \tag{40}$$

如將(39)中 i 改爲 $N+1$，再應用由(39)到(40)的同一方法，得

$$\nu^{\alpha}_{,j}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\nu^{\beta}\, y^{\gamma}_{,j}=l^{i}_{j}\, y^{\alpha}_{,i}+l_{j}\,\nu^{\alpha}. \tag{41}$$

將(40)式關於 k 作共變微分，應用(40)，(41)而得到 $y^{\alpha}_{,ijk}$ 的表示式，再交換 j, k 又得一式，相減並代入(9)得到

$$\begin{aligned}
y^{\alpha}_{,h}\, R^{h}_{ijk}=R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\, y^{\beta}_{,i}\, y^{\gamma}_{,j}\, y^{\delta}_{,k}+\nu^{\alpha}(\omega_{ij,k}-\omega_{ik,j}+\omega_{ij}\, l_{k}-\omega_{ik}\, l_{j})\\
+(\omega_{ij}\, l^{m}_{,k}-\omega_{ik}\, l^{m}_{,j})\, y^{\alpha}_{,m}-P^{\alpha}_{\beta jk}\, y^{\beta}_{,i}.
\end{aligned} \tag{42}$$

式中

$$P^{\alpha}{}_{\beta jk}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}{}^{\sigma}_{\epsilon}\,\bar{p}^{l}_{\sigma}\,\nu^{\epsilon}\,(\omega_{kl}\, y^{\gamma}_{,j}-\omega_{jl}\, y^{\gamma}_{,k}) \tag{43}$$

張量 $P^{\alpha}{}_{\beta jk}$ 爲普通情形所沒有的。

將(42)式分別與$\frac{\partial x^l}{\partial y^\gamma}$及$\nu_\alpha$合併得

$$\bar{R}^h{}_{ijk} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\, x^h{}_{|\alpha}\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k} + \omega_{ij}\, l^h{}_k - \omega_{ik}\, l^h{}_j - P^\alpha{}_{\beta jk}\, y^\beta_{,i}\, x^h{}_{|\alpha}\,. \tag{44}$$

$$\omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,\nu_\alpha\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k} + \omega_{ik}\, l_j - \omega_{ij}\, l_k + \nu_\alpha\, P^\alpha{}_{\beta jk}\, y^\beta_{,i}\,. \tag{45}$$

由(41)關於k共變微分，利用(40)及(41)得到$\nu^\alpha_{,jk}$的表示式，交換$j\,k$又得一式，以之代入

$$\nu^\alpha_{,jk} - \nu^\alpha_{,kj} = 0 \tag{46}$$

而有

$$\begin{aligned}(l^i{}_{j,k} - l^i{}_{k,j} + l_j\, l^i{}_k - l_k\, l^i{}_j)\, y^\alpha_{,i} - \nu^\alpha(l^i{}_j\,\omega_{ik} - l^i{}_k\,\omega_{ij} - l_{j,k} + l_{k,j})\\ - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,\nu^\beta\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k} + P^\alpha{}_{\beta jk}\,\nu^\beta = 0.\end{aligned} \tag{47}$$

分別與ν_α，$\frac{\partial x^l}{\partial y^\alpha}$，合併而得

$$l_{j,k} - l_{k,j} + l^i{}_k\,\omega_{ij} - l^i{}_j\,\omega_{ik} - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,\nu^\beta\,\nu_\alpha\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k} + P^\alpha{}_{\beta jk}\,\nu^\beta\,\nu_\alpha = 0, \tag{48}$$

$$l^i{}_{j,k} - l^i{}_{k,j} + l_j\, l^i{}_k - l_k\, l^i{}_j - R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,\nu^\beta\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k}\, x^i_{|\alpha} + x^i_{|\alpha}\,\nu^\beta\, P^\alpha{}_{\beta jk} = 0. \tag{49}$$

由(40)關於p^k_σ偏微分，得

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|^\sigma_\epsilon\, y^\epsilon_{,k}\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j} = \bar{\Gamma}^l_{ij}\big|^\sigma_k\, y^\alpha_{,l} - \omega_{ij}\big|^\sigma_k\, \nu^\alpha, \tag{50}$$

分解之，得到

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|^\sigma_\epsilon\, y^\epsilon_{,k}\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j}\, x^h{}_{|\alpha} = \bar{\Gamma}^h_{ij}\big|^\sigma_k, \tag{51}$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|^\sigma_\epsilon\, y^\epsilon_{,k}\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j}\, \nu_\alpha = -\omega_{ij}\big|^\sigma_k\,. \tag{52}$$

方程式(44)，(45)，(48)，(49)，(50)，(51)即為由(40)，(41)所導出的積分可能條件，在普通道路空間中的相當方程式，已見於埃森赫脫的書中，(44)為黎曼流空間曲面論的高斯方程式的擴充，(45)及(48)為柯達齊方程式的擴充。

5. 設$V^\alpha(y,p)$為S_{N+1}的一個向量域，當y,p均取V_N上的元素時，則$V^\alpha(y,p)$在V_N的誘導向量與共變微分均有意義，經計算知

$$V^\alpha{}_{|\beta}\, y^\beta_{,j} = \bar{V}^i_{,j}\, y^\alpha_{,i} - \omega_{ij}\,\nu^\alpha\, \bar{V}^i + V^\alpha\big|^\sigma_\gamma\, \bar{p}^l_\sigma\, \omega_{lj}\,\nu^\gamma, \tag{53}$$

所以依S_{N+1}中有平行意義的向量域，在V_N中未必為平行，但當V^α僅為地點的函數時，我們有

$$V^\alpha{}_{|\beta}\,\frac{dy^\beta}{dt} = \bar{V}^i_{,j}\,\frac{dx^j}{dt}\, y^\alpha_{,i} - \omega_{ji}\,\bar{V}^i\,\frac{dx^j}{dt}\,\nu^\alpha \tag{54}$$

而得到

定理: 若一僅爲地點函數相切於 V_N 的向量域 V^α, 在 S_{N+1} 中沿一在 V_N 中的曲線 C 依據在 V_N 中的支持元素是平行的,則其依據同一支持元素,沿 C 在 V_N 中也是平行的,並滿足

$$\omega_{ij}\overline{V}^i\frac{dx^j}{dt}=0, \tag{55}$$

此關係並與擬法線的選取無關。

對於完全在 V_N 上的 S_{N+1} 中的平集合,

$$y^\iota=y^\iota(v^L) \tag{56}$$

如其支持元素也在 V_N 上,則有

$$\frac{\partial^2y^\alpha}{\partial v^L\partial v^M}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial v^L}\frac{\partial y^\gamma}{\partial v^M}=\left(\frac{\partial^2x^i}{\partial v^L\partial v^M}+\overline{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial v^L}\frac{\partial x^k}{\partial v^M}\right)y^\alpha_{,i}-\omega_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial v^L}\frac{\partial x^j}{\partial v^M}\nu^\alpha \tag{57}$$

故又有

定理: 一 S_{N+1} 中依 V_N 上 K 重元素($K<N$)爲支持元素的平集合,若完全在 V_N 中;則不論擬法線如何選擇,亦爲 V_N 中的平集合,並滿足

$$\omega_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial v^L}\frac{\partial x^j}{\partial v^M}=0.$$

對 K 展開空間

系: 在一 K 展開空間 S_{N+1}, 若一 K 展開($K<N$)完全在超曲面 V_N 內,則此一 K 展開爲 V_N 中以其切平面元素爲支持元素而切平面元素爲互相平行的集合。

6. 現討論一 K 展開空間在其中超曲面上也誘導一 K 展開空間的條件。如 S_{N+1} 爲 K 展開空間,則其必能滿足

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,p^\beta_\lambda\,p^\gamma_\mu\,p^\delta_\nu=0. \tag{58}$$

而 V_N 爲 K 展開空間的充要條件是

$$\overline{R}^h{}_{ijk}\,\overline{p}^i_\lambda\,\overline{p}^j_\mu\,\overline{p}^k_\nu=0. \tag{59}$$

由(44)式的兩邊分別乘以 $\overline{p}^i_\lambda$, $\overline{p}^j_\mu$, $\overline{p}^k_\nu$ 而作和,得到恆等式

$$\begin{aligned}\overline{R}^h{}_{ijk}\,\overline{p}^i_\lambda\,\overline{p}^j_\mu\,\overline{p}^k_\nu=R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}\,p^\beta_\lambda\,p^\gamma_\mu\,p^\delta_\nu+(\omega_{ij}\,l^h{}_k-\omega_{ik}\,l^h{}_j)\,\overline{p}^i_\lambda\,\overline{p}^j_\mu\,\overline{p}^k_\nu\\-x^k_{,\alpha}\,P^\alpha{}_{\beta jk}\,y^\beta_{,i}\,\overline{p}^i_\lambda\,\overline{p}^j_\mu\,\overline{p}^k_\nu=0.\end{aligned} \tag{60}$$

所以若 S_{N+1} 爲 K 展開時, V_N 也爲 K 展開的條件是

$$(\omega_{ij}\,l^h{}_k-\omega_{ik}\,l^h{}_j-x^k_{,\iota}\,P^\iota{}_{\beta jk}\,y^\beta_{,i})\,\overline{p}^i_\lambda\,\overline{p}^j_\mu\,\overline{p}^k_\nu=0. \tag{61}$$

根據(36),(43)知此即

$$x^{i}_{\alpha}\, p^{\beta}_{\lambda}\, p^{\gamma}_{\mu}\, p^{\delta}_{\nu}[\nu^{\epsilon}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,|^{\sigma}_{\epsilon}\, p^{\omega}_{\sigma}\,\nu_{\delta|\omega}-\nu_{\beta|\gamma}\,\nu^{\alpha}{}_{|\delta}-(\gamma|\delta)]=0. \tag{62}$$

在超曲面 V_N 上爲成立，將方括弧內表示式記爲 $Q^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}$，則此式即

$$Q^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}\, p^{\beta}_{\lambda}\, p^{\gamma}_{\mu}\, p^{\delta}_{\nu}=A_{\lambda\mu\nu}\,\nu^{\alpha}, \tag{63}$$

或

$$(\nu^{\epsilon}Q^{\alpha}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}-\nu^{\alpha}Q^{\epsilon}{}_{\cdot\beta\gamma\delta})\, p^{\beta}_{\lambda}\, p^{\gamma}_{\mu}\, p^{\delta}_{\nu}=0. \tag{64}$$

故有

定理：設 V_N 爲 $N+1$ 次元的 K 展開空間（$K<N$）中的一超曲面，其本身也是 K 展開空間的充要條件，即對 V_N 中的元素及一適當選取的擬法線，方程式(64)常成立。

對 $K=1$ 時，(59) 或 (64) 無論在何情形下均恆等地成立，故道路空間對任何超曲面的誘導空間仍爲道路空間。 如 $K>1$ 時，我們舉一例來說明此情形。 現取最簡單的情形，設 S_{N+1} 爲遠交平坦的 K 展開空間[12]，在適當的座標系統下，$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 均爲 0，如取 ν^{α} 爲一系常數，張量 $Q^{\epsilon}{}_{\cdot\beta\gamma\delta}$ 在此超曲面上也恆爲 0；且 Γ^{i}_{jk} 僅爲地點函數，故得

定理：$K>1$ 時，遠交平坦的 K 展開空間在任意超曲面上如選取適當的擬法線方向，必可有其誘導的 K 展開空間，而且也是遠交平坦的。

7． 對於隱函數表示的 K 展開空間，我們再作以下的討論。

我們若將空間 $S_{N+1}(y^1,y^2,\cdots;y^{N+1})$中的 K 重元素視爲以 $N+1-K$ 個共變向量 $p_{(r)\alpha}$ $(\gamma=1,2,\cdots;N+1-K,\alpha=1,2,\cdots;N+1)$爲底的向量空間。 空間的遠交聯絡係數 $A^{\alpha}_{\beta\gamma}(y,p)$ 爲 $p_{(r)\alpha}$ 的推廣的齊零次函數系統，而且滿足一般遠交聯絡係數的變換律。 對一張量，可以定義共變微分，例如對於一向量 V^{α}

$$V^{\alpha}{}_{|\beta}=\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial y^{\beta}}+V^{\alpha}\,|^{r\cdot\gamma}\,A^{\delta}_{\gamma\beta}\, p_{(r)\delta}-V_{\gamma}A^{\gamma}_{\alpha\beta}, \qquad \left(V^{\alpha}\,|^{r\cdot\gamma}=\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial p_{r\cdot\gamma}}\right) \tag{65}$$

這是張量。 又一張量關於 $p_{(r)\delta}$ 的偏微分也爲張量的，並成立下列交換順序公式，

$$V_{\alpha|\beta\gamma}-V_{\alpha|\gamma\beta}=(V_{\epsilon}\,\delta^{\phi}_{\alpha}+V_{\alpha}\,|^{r\cdot\phi}\,p_{(r)\epsilon})\,T^{\epsilon}{}_{\phi\beta\gamma}, \tag{66}$$

$$V_{\alpha|\beta}\,|^{r\cdot\delta}-V_{\alpha}\,|^{r\cdot\delta}{}_{|\beta}=(V_{\epsilon}\delta^{\phi}_{\alpha}+V_{\alpha}\,|^{r\cdot\phi}\,p_{(r)\epsilon})A^{\epsilon}_{\phi\beta}\,|^{r\cdot\gamma}, \tag{67}$$

式中，$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma}$ 爲曲率張量：

$$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma}=(A^{\epsilon}_{\alpha\beta\cdot\gamma}+A^{\epsilon}_{\alpha\beta}\,|^{r\cdot\delta}\,A^{\phi}_{\delta\gamma}\,p_{(r)\phi}+A^{\delta}_{\alpha\beta}\,A^{\epsilon}_{\delta\gamma})-(\beta|\gamma). \tag{68}$$

一張量沿一曲線的平行移動是指其共變微分關於曲線的切線方向的合併爲0。對於 S_{N+1} 中的一 m 次元集合($m<N+1$)，普通常用 m 個參數的參數方程式來表

示，稱爲‘參數化’，但我們也同樣地可以用 $N+1-m$ 個獨立的隱函數方程式來表示，稱爲‘隱函數化’。對一 m 次元集合，常有其切平面元素，即在每點以其參數切線方向共變向量爲底的向量空間。對隱函數化的 m 次元集合，我們可有法平面元素，即在每點以其每隱函數方程式所表示的 N 次元集合的共變法線向量爲底的向量空間。即若一 m 次元集合表示爲

$$F_L(y^1, y^2, \cdots, y^{N+1})=0, \quad L=1,2,\cdots,N+1-m. \tag{69}$$

其法平面元素之底即爲共變向量

$$F_{L\alpha}=\frac{\partial F_L}{\partial y^\alpha}. \tag{70}$$

如前，若參考於一系支持元素(69)式之 F 滿足方程式

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}+A^{\gamma}_{\alpha\beta}(y,p)\,F_{L|\gamma}=0, \tag{71}$$

則(69)式所定義的集合稱爲‘平集合’，因其法線平面在集合中爲平行移動。方程式(71)的積分可能條件是

$$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma}\,F_{L|\epsilon}=0. \tag{72}$$

繼續微分，則有

$$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma|\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}\,F_{L\epsilon}=0, \quad (n=1,2,\cdots\cdots). \tag{73}$$

如果(72)式和(73)式構成有限共存系統，則空間 S_{L+1} 中存在平集合。當 $m=N+1-K$ 時，並以 $F_{L|\alpha}$ 爲支持元素時，(71)化爲 K 展開的方程式

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial y^\beta \partial y^\gamma}+A^{\alpha}_{\beta\gamma}(y^\delta, F_{s\epsilon})\,F_{r\alpha}=0. \tag{74}$$

(72),(73)各化爲

$$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma}(y^\delta, p_{(s)\phi})\,p_{(r)\epsilon}=0, \qquad (p_{(s)\phi}=F_{s\phi}) \tag{75}$$

$$T^{\epsilon}{}_{\alpha\beta\gamma|\delta_1\delta_2\cdots\delta_n}(y^\delta, p_{(s)\phi})\,p_{(r)\epsilon}=0. \tag{76}$$

特別當(75)爲恆等式時，(74)爲完全積分可能的，空間 S_{N+1} 爲 K 展開空間。

8. 在 S_{N+1} 的超曲面，必須是一個 N 次元的點集 V_N，與在 V_N 的點集中的 $N+1-K$ 重共變向量所成的支持元素。S_{N+1} 中的共變向量單單依 V_N 在 S_{N+1} 中的隱函數方程式是不能決定的，必須有擬法線的設計方可。由這點看來，誘導聯絡似較爲‘人爲的’，但也較爲‘自由的’，並且由下面的討論，可知事實上平集合或 K 展開的誘導已有相交的幾何意義，因此就這一方面來看，却仍是相當‘自然的’。

我們運用(23) 到 (28)來表示超曲面與其法線向量等元素，(29)表示張量的誘導關係，特別是支持元素，對'在 V_N 上的支持元素'，有

$$\overline{p}_{(r)i}=p_{(r)\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}, \tag{77}$$

而

$$\overline{p}_{(r)\alpha}\,\nu^\alpha=0, \tag{78}$$

$$p_{(r)\alpha}=p_{(r)i}\,x^i{}_\alpha. \tag{79}$$

在此，我們須假定 $K>1$.

遠交聯絡參數的誘導方程式是

$$\overline{A}^i_{jk}=\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}+A^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}, \tag{80}$$

右端 $A^\alpha_{\beta\gamma}$ 所依據的是 V_N 中的元素。

我們同樣照(36)的定義，在 V_N 上有三張量 $\omega_{ij}, l^i{}_j, l_i$，在特殊的 S_{N+1} 座標系統 (x)之下，有

$$\omega_{ij}=-A^{n+1}_{ij},\quad l^i{}_j=A^i_{n+1\,j},\quad l_i=A^{n+1}_{n+1\,i}. \tag{81}$$

在空間 S_{N+1} 與 V_N 之間，應滿足的方程式是

$$y^\alpha_{,ij}+A^\alpha_{\beta\gamma}\,y^\beta_{,i}\,y^\gamma_{,j}=-\omega_{ij}\,\nu^\alpha, \tag{82}$$

$$\nu^\alpha_{,j}+A^\alpha_{\beta\gamma}\,\nu^\beta\,y^\gamma_{,j}=l^i{}_j\,y^\alpha_{,i}+l_j\,\nu^\alpha. \tag{83}$$

與上節同樣的計算方法，可求出其積分可能條件，作爲高斯與柯達齊方程式的推廣，其結果如下：

$$\overline{T}^h_{ijk}=T^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,x^h{}_{|\alpha}\,y^\beta_{;i}y^\gamma_{;j}y^\delta_{;k}+\omega_{ij}\,l^h{}_k-\omega_{ik}\,l^h{}_j-Q^\alpha_{\beta jk}\,y^\beta_{;i}\,x^h{}_{,\alpha}, \tag{84}$$

$$\omega_{ij.k}-\omega_{ik.j}=-T^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,y^\beta_{;i}y^\gamma_{;j}y^\delta_{;k}\,\nu_\alpha+\omega_{ik}\,l_j-\omega_{ij}\,l_k+\nu_\alpha\,Q^\alpha_{\beta jk}\,y^\beta_{;i}, \tag{85}$$

$$l_{j.k}-l_{k.j}+l^i_k\,\omega_{ij}-l^i_j\,\omega_{ik}-T^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,\nu^\beta\,y^\gamma_{;j}y^\delta_{;k}+Q^\alpha_{\beta jk}\,\nu^\beta\,\nu_\alpha=0, \tag{86}$$

$$l^i_{j.k}-l^i_{k.j}+l_j\,l^i_k-l_k\,l^i_j-T^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,\nu^\beta\,y^\gamma_{;j}y^\delta_{;k}\,x^i{}_{|\alpha}+x^i{}_{|\alpha}\,\nu^\beta\,Q^\alpha_{\beta jk}=0, \tag{87}$$

$$A^\alpha_{\beta\gamma}\big|^{r\cdot\delta}\,y^\beta_{;i}y^\gamma_{;j}\,x^h{}_{|\delta}\,x^k{}_\alpha=\overline{A}^{k}_{ij|}{}^{r\cdot k}, \tag{88}$$

$$A^\alpha_{\beta\gamma}{}^{r\cdot\delta}\,y^\beta_{;i}y^\gamma_{;j}\,x^h{}_{|\delta}\,\nu_\alpha=-\omega_{ik}{}^{r\cdot k}, \tag{89}$$

而式中

$$Q^\alpha_{\beta\cdot k}=A^\alpha_{\beta\gamma}{}^{r\cdot\epsilon}\,\nu_\epsilon\,\overline{p}_{(r)m}\,(l^m{}_k\,y^\gamma_{,j}-l^m{}_j\,y^\gamma_{,k})。 \tag{90}$$

9. 若 S_{N+1} 爲 K 展開空間，則(75)式應恆等地滿足。 而 V_N 的支持元素爲 $N+1-K$ 重的共變向量，即一$(K-1)$重元素，故若 V_N 具有 L 展開空間的性質，

則必 $L=K-1$。 此爲這種誘導特殊之點，故欲求 V_N 是否 $K-1$ 展開空間，須有 $K>1$ 的假定。 同時

$$\overline{T}^h_{ijk}(x,\overline{p})\overline{p}_{(r)h}=0, \tag{91}$$

應恒等地成立，由 S_{N+1} 爲 K 展開空間，依據(84)知此即爲

$$(\omega_{ij}\, l^h{}_h-\omega_{ik}\, l^h{}_j-Q^\alpha{}_{\beta jk}\, y^\beta_{,i}\, x^h_\alpha)\,\overline{p}_{(r)h}=0, \tag{92}$$

或

$$[(\nu_{\beta|\gamma}\, \nu^\alpha{}_{|\delta}-A^\alpha_{\beta\gamma}|^{r\cdot\psi}\, \nu_\psi\, \nu^\phi{}_{|\delta}\, p_{(r)\phi})-(\gamma|\delta)]\, p_{(r)\alpha}\, y^\beta_{,i}\, y^\gamma_{,j}\, y^\delta_{,k}=0. \tag{93}$$

故有

定理： 若 S_{N+1} 爲一以隱函數表示的 K 展開空間，$(K>1)$，其在一超曲面上誘導空間爲 $(K-1)$ 展開空間的充要條件是沿此超曲面(93)式恒等地成立。

設以(69)表示的集合 V_m，$(m>1)$，爲空間的平集合，而其支持元素在 $V_m\cap V_N$ 上爲 V_N 中的元素，則由

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial x^i \partial x^j}=\frac{\partial^2 F_L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}\, y^\alpha_{,i}\, y^\beta_{,j}+F_{L|\gamma}\frac{\partial^2 y^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} \tag{94}$$

及(82)

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial x^i \partial x^j}-\overline{A}^h_{ij}\, F_{L\cdot h}=\left(\frac{\partial^2 F_L}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}-A^\gamma_{\alpha\beta}\, F_{L|\gamma}\right) y^\alpha_{,i}\, y^\beta_{,j}-F_{L|\gamma}\, \omega_{ij}\, \nu^\gamma\,. \tag{95}$$

故在 $V_m\cap V_N$ 上，

$$\frac{\partial^2 F_L}{\partial x^i \partial x^j}-\overline{A}^h_{ij}\, \overline{F}_{L\cdot h}=0. \tag{96}$$

因之得

定理： 設 V_m 爲 S_{N+1} 的一平集合，在 $V_m\cap V_N$ 中，V_m 的支持元素爲 V_N 中的元素，則集合 $V_m\cap V_N$ 爲 V_N 中的平集合。

對 K 展開空間，我們乃有

定理： 設 S_{N+1} 爲一隱函數表示的 K 展開空間，$(K>1)$，若所有的以 V_N 中一點及過這點的 V_N 中的 $N+1-K$ 個法線方向所決定的 S_{N+1} 中的 K 展開在每一點的法線方向均在 V_N 中，則 S_{N+1} 在 V_N 中誘導一 $(K-1)$展開空間，每 $K-1$ 展開即爲 S_{N+1} 中所述的 K 展開與 V_N 的交集。

現舉具體的例證：如對一遠交平坦的 K 展開空間，取座標系統 y^α 爲使 $A^\alpha_{\beta\gamma}$ 爲 0，取 ν^α 爲常數，則(93)常成立，而 A^i_{jk} 也單爲地點函數，故有遠交平坦的 K 展開空間可誘導在一超曲面上得一遠交平坦的 $K-1$ 展開空間。 例如普通歐氏空間的

平面集可視爲三次元遠交平坦的2展開空間，所有與一方向平行的平面與一任意曲面的交線在此曲面上組成一遠交平坦的道路空間。

又例如S_{N+1}爲N展開空間，V_N爲其中的一N展開，S_{N+1}必能在V_N上誘導一$(N-1)$展開空間，事實上這時方程式(93)是滿足的，因這時適當選取V_N的方程式時$\nu_{\alpha|\beta}$恒等於0。對晝法平坦的K展開空間，我們已知其具有某些特徵[13,14]，據此，我們可作以下的考察：若S_{N+1}爲晝法平坦的N展開空間，由於這空間的一個特徵，可依N展開自身相交的方法生成S_{N+1}中的一L展開，設$L>1$，V_N爲一N展開，根據本節最後一定理，則此L展開必在V_N上誘導一$(L-1)$展開。其逆，如S_{N+1}爲晝法平坦的L展開空間，依晝法平坦的特徵[13,14]我們能決定一晝法平坦的N展開空間，以任一N展開爲V_N，則L展開空間S_{N+1}在V_N上誘導一$(L-1)$展開空間，故得

定理：對晝法平坦的L展開空間，必可選取適當的超曲面，使原空間在超曲面上誘導一$(L-1)$展開空間。其中的$(L-1)$展開恰爲空間的L展開與超曲面的交集。

參考文獻

[1] Douglas, J., 1931: Systems of K-dimensional manifolds in an N-dimensional spaces. Math. Ann., **105**, 707-733.

[2] Eisenhart, L. P., 1927: Non-Riemanian Geometry, 137-179.

[3] Douglas, J., 1928: The general geometry of paths. Annals of Math., (2), **29**, 143-168.

[4] Bortolotti, E., 1936: Trasporti non-lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, I, II. Rend. dei Lincei, (IV), **23** 16-21, 104-110.

[5] Walker, A. G., 1949: On parallel fields of partially null vector spaces. Quart. Jour. Math. (Oxford series), **20**, 135-145.

[6] Schouten, J. A., 1924: Der Ricci Kalkül, 140.
Eisenhart, L. P., *ibid.*, 153.

[7] 谷超豪, 1951: 隱函數表示下的K展開空間理論. 中國科學二卷一期, 1-19.
或 Ku, C. H. (谷超豪), 1950: New treatment of geometries in a space of K-spreads. Science Record, **3**, 41-51.

[8] Douglas, J., *loc. cit.*, § 4.

[9] Bortolotti, E., *loc. cit.*, §§ 3, 4.

[10] Berwald, L., 1926: Untersuchung der Krümmung allegemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. Math. Zeits., **25**, 40-73, §1.

[11] Eisenhart, L. P., *ibid.*, 138.

[12] Douglas, J., *loc. cit.*, § 5.

[13] Su, B. (蘇步青), 1950: Axiom of the plane in a space of *K*-spreads. Science Record, **3**, 7-16

[14] Ku, C. H. (谷超豪), 1950: On the descriptive geometry of a space of *K*-spreads. *Ibid.*, **3**, 53-59.