



# 量子态可分离性的特性函数准则

陈小余\*, 蒋丽珍

浙江工商大学信息与电子工程学院, 杭州 310018

\*联系人, E-mail: [xychen@zjgsu.edu.cn](mailto:xychen@zjgsu.edu.cn)

收稿日期: 2017-08-05; 接受日期: 2017-10-17; 网络出版日期: 2018-01-09

国家自然科学基金(批准号: 11375152)资助项目

**摘要** 量子纠缠是量子信息科学的主要特征之一, 与量子力学的基础密切相关。判定一个给定的量子态是否纠缠通常不容易。基于量子态的特性函数或特性矩阵, 我们提出一种新的两体量子态可分离性准则。我们使用局域滤波变换和局域旋转变换简化量子态的特性矩阵, 而保持量子态的正定性和纠缠与否的性质不变。海森堡-外尔矩阵基的研究使得这些局域变换简单可行。局域变换极大地简化了特性矩阵, 新准则用简化了的特性矩阵的非零元素来构造。针对Peres-Horodecki 准则不起作用的 $3 \times 3$  系统一些主要的量子态, 我们比较了新准则与重排准则及相关矩阵准则的异同。结果表明, 对大部分量子态, 我们的新准则比重排准则有更好的性能。该新准则非常容易计算, 对任意维数的两体可分离性都适用。

**关键词** PPT纠缠态, 可分离性准则, 特性函数, 海森堡-外尔矩阵基

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 02.10.Yn

## 1 引言

纠缠是量子信息的标志性特征, 但判断一个量子态是否纠缠通常不容易, 除非是一些特殊情况。研究表明, 纠缠判定是一个NP 困难问题 [1]。对于低维量子态可以使用半定规划程序计算进行判定 [2]。除程序计算之外, 存在一些简单易行的纠缠判定方法, 称为可分离性准则, 例如Peres-Horodecki 准则即部分转置正定(PPT)准则 [3,4]、可计算交叉模及重排准则(CCNR) [5,6](我们将其简称为重排准则)、不确定关系准则 [7]、协方差矩阵准则 [8,9] 以及相关矩阵准则 [10] 及其改进 [11,12]。违反这些准则标志着存

在纠缠。可分离性准则中最具影响力的是PPT 准则。对于希尔伯特空间维数是 $2 \times 2$ (双量子比特系统)和 $2 \times 3$ 的系统, 该准则也是可分离的充分条件, 对维数更高的系统, 则不再是充分条件。存在部分转置正定的纠缠态(PPTES), 不能被Peres-Horodecki 准则探测到, 这时要用其他的准则。

实验上, 比较方便的纠缠检测方法是利用纠缠见证者 [13-15]。纠缠见证者是一个厄米算符, 其在量子态上的均值对所有可分离态显示非负值, 但至少对一个纠缠态显示负值。任何纠缠准则都可以表示为纠缠见证者的形式。不过对于给定的量子态, 找到合适的纠缠见证者不容易。

**引用格式:** 陈小余, 蒋丽珍. 量子态可分离性的特性函数准则. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 020302  
Chen X Y, Jiang L Z. Quantum separable criterion based on characteristic function (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2018, 48: 020302, doi: [10.1360/SSPMA2017-00203](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00203)

我们对纠缠见证者方法进行优化, 发现两体量子系统存在一种新的可分离性准则. 首先我们将密度算符转换为其特性函数, 这在某种意义上类似于傅里叶变换. 特性函数是量子连续变量系统的概念, 推广到离散系统仍可以称之为特性函数, 只是其自变量离散. 对单量子比特系统, 特性函数就是其布洛赫(Bloch)矢量, 它们是密度算符用泡利算符展开以后的系数. 对双量子比特系统, 特性函数组成矩阵, 这是一个 $4 \times 4$ 的矩阵, 由15个系数来描述(一个矩阵元已知为1, 对应于密度矩阵的归一化), 通过局域变换和经典通信(LOCC)可以简化为6个系数, 导引椭球方法描述双量子比特态时, 这6个系数或其绝对值是椭球的球心坐标和3个半轴长度<sup>[16]</sup>. 最近, 布洛赫矢量表示方法被推广到多维量子系统, 对应于泡利矩阵有海森堡-外尔(Heisenberg-Weyl)矩阵<sup>[17]</sup>. 对于希尔伯特空间维数是 $d_1 \times d_2$ 的两体系统, 得到特性函数矩阵是 $d_1^2 \times d_2^2$ 的, 有 $(d_1 d_2)^2 - 1$ 个系数. 通过局域变换和经典通信(LOCC)可以简化为 $2(d_1^2 - 1)$ 个系数(假定 $d_1 \leq d_2$ ), 这些系数已经包含了量子态是否纠缠的全部信息. 我们提出的可分离性准则用这些系数中的一半来构造. 我们将新准则应用于 $3 \times 3$ 量子系统的PPT纠缠态, 并比较了其与重排准则及相关矩阵准则的纠缠检测性能.

## 2 纠缠准则及布洛赫表象

纠缠的反面是可分离性. 两体量子态如果可以通过局域变换和经典通信进行制备则是可分离的, 也就不含有量子纠缠, 这样的态被Werner<sup>[18]</sup>表达为

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (1)$$

其中,  $p_i$ 是概率,  $\rho_A^i$ 和 $\rho_B^i$ 是两个子系统的量子态. Peres<sup>[3]</sup>从该表达式中导出第一个实用的量子态可分离性必要条件. 如果对一个子系统(比如B子系统)进行转置操作, 称为部分转置, 则操作以后的态还是合法的量子态, 即可分离量子态密度矩阵的部分转置是非负的, 出现负本征值则是纠缠态. 该准则称为Peres-Horodecki准则或部分转置正定(PPT)准则.

如果我们将量子态的密度矩阵写成矩阵元的形式,  $\rho = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |ij\rangle\langle kl|$ . 其中矩阵元 $\rho_{ijkl}$ 的下标*i, k*属于A子系统, 下标*j, l*属于B子系统, 则部分转置(对B子系统转置)以后的矩阵元为 $\rho_{ijkl}^{\text{PT}} = \rho_{il,kj}$ . Peres-Horodecki部分转置正定准则就是

$$\rho^{\text{PT}} \geq 0. \quad (2)$$

违反该式意味着纠缠. 部分转置是把密度矩阵的第2个下标*j*与第4个下标*l*进行交换. 如果我们将第2个下标*j*与第3个下标*k*进行交换, 我们得到一个重排矩阵 $\rho^R = \sum_{ijkl} \rho_{ik,jl} |ij\rangle\langle kl|$ . 重排准则便是

$$\text{Tr} \sqrt{\rho^R \rho^{R\dagger}} \leq 1. \quad (3)$$

违反该式意味着纠缠.

量子比特可以直观地用布洛赫表象表示,  $\rho = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ , 其中,  $I_2 = \sigma_0$ 是 $2 \times 2$ 恒等矩阵,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , 其中 $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 是泡利矩阵.  $\mathbf{v}$ 为布洛赫矢量, 泡利矩阵是无迹的并且满足 $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$ , 布洛赫矢量的分量为 $v_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i)$ . 容易将布洛赫表象推广到双量子比特系统或多量子比特系统. 双量子比特态可以写为

$$\rho = \frac{1}{4} \sum_{i,j=0}^3 R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j. \quad (4)$$

其中,  $R_{ij} = \text{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j)$ 是实系数. 显然 $R_{00} = \text{Tr}\rho = 1$ , 记 $R_{ij}$ 组成的矩阵为 $\mathbf{R}$ , 则 $\mathbf{R}$ 可以写为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{a}^\top & \mathbf{T} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中, 矢量 $\mathbf{a}$ 是第一个量子比特的布洛赫矢量,  $\mathbf{b}$ 是第二个量子比特的布洛赫矢量, 而两体关联包含在 $3 \times 3$ 矩阵 $\mathbf{T}$ 中. 仿照连续变量系统, 我们将 $\mathbf{R}$ 称为特性函数, 或特性矩阵, 本文基于 $\mathbf{R}$ 构造的可分离性准则便称为特性函数准则. 特性函数与相关函数的区别在于: 相关函数是一般的两体可观察量算符在态上的平均值, 而特性函数是特定的海森堡-外尔算符在态上的均值. 推广到无穷维, 后者正是连续变量系统的特性函数.

对双量子比特态 $\rho$ 作用一个可逆保迹的局域滤波变换可以将其变为正则形式的量子态 $\tilde{\rho}$ . 变换为 $\rho \rightarrow \tilde{\rho} = \left(I_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2\rho_B}}\right) \rho \left(I_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2\rho_B}}\right)$ <sup>[19]</sup>, 而 $\rho_B = \text{Tr}_B \rho$ 是

第二个量子比特的约化矩阵. 经过变换以后, 第二个量子比特的布洛赫矢量为零, 第一个量子比特的布洛赫矢量变为 $\tilde{\mathbf{a}}$ , 关联矩阵 $\mathbf{T}$ 变为 $\tilde{\mathbf{T}}$ . 局域滤波变换保持正定性:  $\rho \geq 0$  当且仅当 $\tilde{\rho} \geq 0$ ; 也保持态的可分离性:  $\rho$  是纠缠态当且仅当 $\tilde{\rho}$  是纠缠态<sup>[20]</sup>. 因此 $\rho$  的可分离性可以通过研究 $\tilde{\rho}$  来确定.

下一步是通过局域变换作用将矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}$ 对角化, 这可以通过局域旋转变换 $\tilde{\mathbf{a}} \rightarrow O_A \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}} \rightarrow O_B \tilde{\mathbf{b}}$  和 $\tilde{\mathbf{T}} \rightarrow O_A \tilde{\mathbf{T}} O_B^T$  来实现, 其中 $O_A, O_B \in SO(3)$ <sup>[21]</sup>. 而 $O_A, O_B$  容易从矩阵 $\tilde{\mathbf{T}}$ 的带符号的奇异值分解中得到. 经过局域滤波和局域旋转等两类局域变换, 我们得到的第一个量子比特的布洛赫矢量, 记为 $\mathbf{c} = O_A \tilde{\mathbf{a}}$ , 第二个量子比特的布洛赫矢量为 $O_B \tilde{\mathbf{b}} = 0$ , 关联矩阵对角化为 $\mathbf{Q} = O_A \tilde{\mathbf{T}} O_B^T$ . 因此, 特性函数矩阵经过两类局域变换以后共有6个变量, 分别为 $\mathbf{c}$ 的3个分量和对角矩阵 $\mathbf{Q}$ 的3个对角元. 量子态 $\rho$ 是否纠缠由这6个量确定.

既然通过布洛赫表象能够将量子态参数数目压缩而保持其是否纠缠的性质不变, 那么有意义的工作就是将布洛赫表象推广到多能级系统或多维系统. 这有赖于最近关于海森堡-外尔矩阵的工作. 泡利矩阵是 $2 \times 2$  矩阵, 与单位矩阵一起构成矩阵基, 任何 $2 \times 2$  矩阵都可以在矩阵基上展开. 推广到 $3 \times 3$  矩阵, 首先想到的是8个盖尔曼矩阵; 而推广到 $4 \times 4$  矩阵, 有15个狄拉克矩阵. 但是实际按照一定要求构造的 $3 \times 3$  及 $4 \times 4$  海森堡-外尔矩阵基与盖尔曼矩阵基及狄拉克矩阵基是不同的. 这里所谓一定的要求便是: 如我们把 $d \times d$  矩阵基还记为 $\sigma_i (i = 1, \dots, d^2 - 1)$  则有

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = d\delta_{ij}. \quad (6)$$

我们看到盖尔曼矩阵基并不满足这一条件. 文献[17] 构造了任意维数的海森堡-外尔矩阵基, 当然这些矩阵基除满足上式之外还是无迹的厄米矩阵. 任意的希尔伯特空间维数为 $d$ 维量子态就可以表达为

$$\rho = \frac{1}{d}(I_d + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (7)$$

其中,  $I_d$  是 $d \times d$  恒等矩阵. 我们得到 $d^2 - 1$  维矢量 $\mathbf{v}$  (不妨仍称为布洛赫矢量) 来表示量子底特(Qudit). 对

纯量子态总有 $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ , 这导致纯态的布洛赫矢量 $\mathbf{v}$ 长度为

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{d - 1}. \quad (8)$$

混合态的布洛赫矢量长度则小于 $\sqrt{d - 1}$ . 与量子比特系统不同, 量子底特态有对应的布洛赫矢量, 但不是每个不大于 $\sqrt{d - 1}$  的 $(d^2 - 1)$  维矢量都对应于一个量子底特的.

对于双量子底特系统, 我们有

$$\rho = \frac{1}{d^2} \sum_{i,j=0}^{d^2-1} R_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j, \quad (9)$$

其中,  $\sigma_0 = I_d, R_{ij} = \text{Tr}(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j)$  是实系数, 这是因为密度矩阵 $\rho$  和海森堡-外尔矩阵 $\sigma_i$  都是厄米的. 同样我们可以将特性函数矩阵 $\mathbf{R}$  写成式(5)的形式, 其中矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  是 $d^2 - 1$  维的, 矩阵 $\mathbf{T}$  是 $(d^2 - 1) \times (d^2 - 1)$  矩阵. 与双量子比特系统类似, 经过局域滤波变换和局域旋转变换, 保持量子态纠缠与否的性质不变的情况下, 特性函数矩阵 $\mathbf{R}$  可以变换为 $d^2 - 1$  维矢量 $\mathbf{c}$  和 $(d^2 - 1) \times (d^2 - 1)$  对角矩阵 $\mathbf{Q}$ , 即:

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T & \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

量子态是否纠缠由变换以后的 $2(d^2 - 1)$  个参数确定. 若两体系统的两个子系统希尔伯特空间维数不同, 分别为 $d_1$  和 $d_2$ , 不妨设 $d_1 < d_2$ , 经过两类局域变换以后,  $d_1^2 \times d_2^2$  的特性函数矩阵在保持可分离性不变的意义上映射为与式(10)类似的形式, 可以用 $2(d_1^2 - 1)$  个参数表示.

我们使用可逆保迹的局域滤波变换和局域旋转变换, 这可以保持纠缠与否的特性不变. 局域滤波变换是可逆的, 因为 $I_d \otimes \frac{1}{\sqrt{\rho_B d}}$  存在才有我们规定的局域滤波变换, 也就是 $\rho_B$  是满秩的, 而逆变换 $I_d \otimes \sqrt{\rho_B d}$  总是存在的. 旋转变换具有可逆性. 使用这两个变换以后, 假如纠缠态变为可分离态, 那么其逆变换将会把可分离态变为纠缠态, 这是不可能的, 因为纠缠不会通过局域变换产生. 因此可逆局域变换保持纠缠性不变. 在计算中我们需要检验约化矩阵的满秩性.

### 3 基于特性函数的可分离性准则

本节我们将从纠缠见证者理论推出基于特性函数的可分离性准则. 设有厄米算符 $W$ , 对所有的可分离量子态 $\rho_s$  有 $\text{Tr}(\rho_s W) \geq 0$ , 且存在至少一个量子态 $\rho$ 使得 $\text{Tr}(\rho W) < 0$ , 则厄米算符 $W$  称为纠缠见证者, 它至少见证了量子态 $\rho$ 的纠缠. 纠缠见证者理论的依据是巴拿赫分离公理, 假如我们有一个凸集, 在这凸集之外, 我们总可以找到一个超平面, 使得凸集在超平面的一侧, 另一侧不出现凸集中的点. 现在可分离量子态的集合已知是凸集, 凸集之外的是纠缠态集合, 纠缠见证者起到超平面的作用, 在它的一侧(可分离态凸集所在的一侧, 比如左侧)有 $\text{Tr}(\rho W) \geq 0$ , 当然我们有 $\text{Tr}(\rho_s W) \geq 0$ ; 在它的另一侧(右侧)有 $\text{Tr}(\rho W) < 0$ . 因此右侧的量子态都是纠缠态, 就被 $W$ 所见证. 我们可以使超平面与凸集相切以探测到更多的纠缠态, 这样的见证者称为最优见证者. 我们还可以让超平面弯曲但保持凸集在它的左侧, 这样的见证者称为非线性见证者. 超平面(或超曲面)的左侧一般除了凸集之外还有非凸集元素. 换言之, 纠缠见证者只探测到一部分纠缠态, 另一部分没被探测到, 需要其他的纠缠见证者去探测. 这就是可分离性准则是可分离性必要条件的原因, 因此存在多种可分离性准则.

对双量子底特系统(两个子系统的希尔伯特空间维数不相等的情况可参照处理), 设有厄米算符 $M$ , 我们记:

$$B(M) = \sup_{\rho_s} \text{Tr}(\rho_s M), \quad (11)$$

其中,  $\rho_s$ 是可分离态. 因此对任意的可分离态 $\rho_s$  我们有 $B(M) - \text{Tr}(\rho_s M) \geq 0$ . 纠缠见证者算符可以设为

$$W = B(M)I - M, \quad (12)$$

其中,  $I$ 是 $d^2 \times d^2$ 恒等算符, 故 $\text{Tr}(\rho_s W) = B(M) - \text{Tr}(\rho_s M) \geq 0$ 对所有的可分离态 $\rho_s$  成立.

将算符 $M$ 按海森堡-外尔矩阵基展开, 我们有 $M = \sum_{i,j=0}^{d^2-1} M_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j$ , 其中系数 $M_{ij} = \frac{1}{d^2} \text{Tr}(M \sigma_i \otimes \sigma_j)$ . 对于待检测的量子态 $\rho$ , 相应的特性函数矩阵为 $\mathbf{R}$ , 我们有可分离性必要条件 $\text{Tr}(\rho W) =$

$B(M) - \text{Tr}(\rho M) = B(M) - \sum_{i,j=0}^{d^2-1} M_{ij} R_{ij} \geq 0$ , 即:

$$\sum_{i,j=0}^{d^2-1} M_{ij} R_{ij} \leq B(M), \quad (13)$$

违反此式意味着纠缠, 推导过程用了式(6). 注意到厄米算符 $M$ 的选取除了维数之外没有限制, 任意选取的厄米算符 $M$ 都能构造出见证者.

在保持纠缠性不变的条件下, 特性函数矩阵经过两类局域变换已经变成如式(10)右边的形式. 变换以后的特性函数矩阵 $\mathbf{R}'$ , 可能的非零元素有 $R'_{00} = 1, R'_{i0} = c_i, R'_{ii} = Q_{ii}$ ( $i = 1, \dots, d^2 - 1$ ), 其余的都是零. 我们选取 $M_{ij}$ 方法是对所有 $R'_{ij} = 0$ 其对应的 $M_{ij} = 0$ , 这可能会错过一些好的见证者, 但我们的目的是找到简单实用的可分离性准则, 同时不失一般性令 $M_{00}$ 为零. 因此我们有未定系数 $M_{i0}, M_{ii}$ ( $i = 1, \dots, d^2 - 1$ ) 共计 $2(d^2 - 1)$ 个.

由于可分离态的集合是凸集,  $B(M)$ 的计算可以简化为对所有纯态可分离态进行, 纯态可分离态是两个子系统纯态的直积 $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle|\psi_B\rangle$ , 因此有

$$B(M) = \sup_{|\psi_A\rangle, |\psi_B\rangle} \langle \psi_A | \langle \psi_B | M | \psi_A \rangle | \psi_B \rangle. \quad (14)$$

将子系统的纯态用其布洛赫矢量表示, 我们有 $|\psi_A\rangle\langle\psi_A| = \frac{1}{d}(I_d + \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ ,  $|\psi_B\rangle\langle\psi_B| = \frac{1}{d}(I_d + \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ . 其中,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是长度为 $\sqrt{d-1}$ 的 $d^2 - 1$ 维布洛赫矢量. 应用式(6)我们得到

$$B(M) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \left( \sum_{i=0}^{d^2-1} M_{i0} x_i + \sum_{i,j=0}^{d^2-1} x_i M_{ij} y_i \right), \quad (15)$$

式(15)右边可以看作是对两个矢量内积求极值, 其中一个矢量是 $\mathbf{x}$ , 当另一个矢量 $\mathbf{z}$ ( $z_i = M_{i0} + M_{ii} y_i$ ) 与其平行时内积最大. 故:

$$B(M) = \sqrt{d-1} \sup_{\mathbf{y}} \sqrt{\sum_i (M_{i0} + M_{ii} y_i)^2}. \quad (16)$$

假定 $\mathbf{Q}$ 矩阵的秩为 $k$ (即 $\tilde{\mathbf{T}}$ 和 $\mathbf{T}$ 矩阵的秩均为 $k$ , 可以认为局域滤波和局域旋转变换是满秩的),  $Q_{ii}$ ( $i = 1, \dots, d^2 - 1$ )中有 $k$ 个不为零, 我们可以变换海森堡-外尔矩阵基的顺序, 使得 $k$ 个非零的排在前面, 等

于零的排在后面, 即  $Q_{ii} \neq 0(i = 1, \dots, k)$ ;  $Q_{ii} = 0(i = k + 1, \dots, d^2 - 1)$ . 则我们选取

$$M_{ii} = \text{sign}(Q_{ii}), i = 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$M_{ii} = 0, i = k + 1, \dots, d^2 - 1, \quad (18)$$

$$M_{i0} = 0, i = 1, \dots, k. \quad (19)$$

因此我们得到

$$B(M) = \sqrt{d-1} \sup_y \sqrt{\sum_{i=0}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^{d^2-1} M_{i0}^2}. \quad (20)$$

很明显

$$B(M) = (d-1) \sqrt{1 + \frac{1}{d-1} \sum_{i=k+1}^{d^2-1} M_{i0}^2}. \quad (21)$$

只要令  $y_i = 0(i = k + 1, \dots, d^2 - 1)$  即可达到.

用  $\mathbf{R}'$  替代式(13)中的  $\mathbf{R}$ , 可分离性准则简化为

$$\sum_{i=1}^k |Q_{ii}| + \sum_{i=k+1}^{d^2-1} M_{i0} c_i \leq B(M). \quad (22)$$

为确定系数  $M_{i0}(i = k + 1, \dots, d^2 - 1)$ , 令

$$p = \frac{B(M)}{q + \sum_{i=k+1}^{d^2-1} M_{i0} c_i}, \quad (23)$$

其中,  $q = \sum_{i=1}^k |Q_{ii}|$ . 当  $M_{i0} = \frac{d-1}{q} c_i$  时,  $p$  达到最小值, 不等式(22)达到最优, 能检测到最多的纠缠态. 我们因此有可分离性准则

$$\left( \sum_{i=1}^k |Q_{ii}| \right)^2 + (d-1) \sum_{i=k+1}^{d^2-1} c_i^2 \leq (d-1)^2. \quad (24)$$

## 4 应用于 $3 \times 3$ 量子系统

双qutrit系统( $3 \times 3$  系统)存在PPT纠缠态, 因而得到了广泛的研究 [22–25]. 已经按照PPT纠缠态  $\rho$  及其部分转置算符  $\rho^{\text{PT}}$ (此时为非负)的秩进行了分类,  $(m, n)$ 类表示PPT纠缠态  $\rho$  的秩为  $m$  而  $\rho^{\text{PT}}$  的秩为  $n$ . 研究表明 [25], 存在  $(4, 4), (5, 5), (6, 5), (6, 6), (7, 5), (7, 6), (8, 5), (8, 6)$  等类别的PPT纠缠态. 其中  $(4, 4)$ 类的代表是金字塔态(Pyramid)和瓦片态(Tiles). 这两个态的

表达式见文献[22], 可以用不可扩展乘积基(UPB)构造出来. 对这两个态的计算表明, 其在局域变换以后得到的  $\mathbf{Q}$  矩阵的秩为  $k = 5$ , 容易检验这两个态都违反式(24), 因此是纠缠态, 但这个结论用重排准则等其他准则也能得到.

为比较本文提出的可分离性准则(式(24))与重排准则以及改进的相关矩阵准则(MCM) [12] 在检测纠缠方面的性能, 我们考虑态的白噪声耐受性, 也就是将态与白噪声混合后得到的态恰好可分离所能加的最大白噪声比例  $p_{\text{tol}}$ , 或者我们考虑PPT纠缠态在混合态中的最小比例  $p_e = 1 - p_{\text{tol}}$ . 设PPT纠缠态为  $\rho_e$ , 混入白噪声以后的态为

$$\rho = p\rho_e + \frac{1-p}{9}I_9. \quad (25)$$

其中  $I_9$  是  $9 \times 9$  恒等矩阵,  $\frac{1}{9}I_9$  为白噪声态.  $\rho$  是纠缠态与白噪声(可分离态)的混合, 因此客观上总存在一个混合比例  $p_e$ , 当  $p > p_e$  时,  $\rho$  是纠缠态, 当  $p \leq p_e$  时,  $\rho$  是可分离的. 重排准则存在一个混合比例  $p_{\text{CCNR}}$ , 当  $p > p_{\text{CCNR}}$  时用重排准则能够检测到  $\rho$  是纠缠态,  $p \leq p_{\text{CCNR}}$  则不行. 类似地, 特性函数准则存在一个混合比例  $p_{\text{Char}}$ , 当  $p > p_{\text{Char}}$  时用特性函数准则能够检测到  $\rho$  是纠缠态,  $p \leq p_{\text{CCNR}}$  则不行. 显然  $p_{\text{CCNR}}$  和  $p_{\text{Char}}$  都不小于  $p_e$ . 若  $p_{\text{CCNR}} < p_{\text{Char}}$ , 则我们说重排准则的性能优于特性函数准则, 反之则特性函数准则性能更优. 我们用  $p_{\text{MCM}}$  表示改进的相关矩阵准则相应的混合比例. 在表1中我们对  $(4, 4)$ 类的金字塔态和瓦片态及  $(5, 5)$  和  $(6, 6)$  类列出了3种准则的临界值  $p_{\text{Char}}$ ,  $p_{\text{CCNR}}$  和  $p_{\text{MCM}}$ . 可以看出对3个态特性函数准则比重排准则性能更优, 而特性函数准则与改进相关矩阵准则相比则互见优劣. 我们这里使用的

**表1** 特性函数准则和重排准则等的性能对比

**Table 1** Comparison of entanglement detection properties of characteristic criterion, realignment criterion and improved correlation matrix criterion

PPTES	$k$	$p_{\text{Char}}$	$p_{\text{CCNR}}$	$p_{\text{MCM}}$
Pyramid	5	0.8676	0.8785	0.8722
Tiles	5	0.8825	0.8897	0.8824
(5,5)	6	0.9610	0.9816	0.9669
(6,6)	7	0.9906	0.9828	0.9864

(5,5)类和(6,6)类是最早构造的例子<sup>[26]</sup>, 实际上(5,5)类有许多种<sup>[27]</sup>.

$3 \times 3$  PPT纠缠态中的(7,6)类, (7,5)类, (6,5)类是被一起构造出来的, 其密度矩阵具有如下形式:

$$\rho_e = N \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \\ . & s & . & a & . & . & . & . & . \\ . & . & s^{-1} & . & . & b & . & . & . \\ . & a & . & s^{-1} & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & s & . & c & . \\ . & . & b & . & . & . & s & . & . \\ . & . & . & . & . & c & . & s^{-1} & . \\ 1 & . & . & . & 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

其中, 点表示矩阵元为零, 归一化常数  $N = \frac{1}{3(1+s+s^{-1})}$ , 对(7,6), (7,5), (6,5)类的代表, 分别选  $(a, b, c) = (0, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 0, 1)$ . 计算结果显示, 这3种PPT纠缠态的白噪声耐受性用特性函数准则计算是相同的, 在图1中的点对3种态重合; 同时也等同于用重排准则计算的结果.

直接对混合态  $\rho = p\rho_e + \frac{1-p}{9}I_9$  应用重排准则式(3)可知, 当

$$p > p_{CCNR} = \frac{1}{9N + \sqrt{1 - 9N}} \quad (27)$$

时, 白噪声与式(26)所表示的(7,6), (7,5), (6,5)类态混合以后是纠缠的.

考虑特性函数准则, 当  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  时, 我们有混合态  $\rho = p\rho_e + \frac{1-p}{9}I_9$  的特性函数矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & A & . & . & . & . & . & . & . \\ . & A & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & B & . & . & C & . & . & . \\ . & . & . & A & . & . & . & . & . \\ . & . & . & A & . & . & . & . & . \\ . & . & -C & . & B & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & A & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & A & . & . \end{pmatrix}, \quad (28)$$

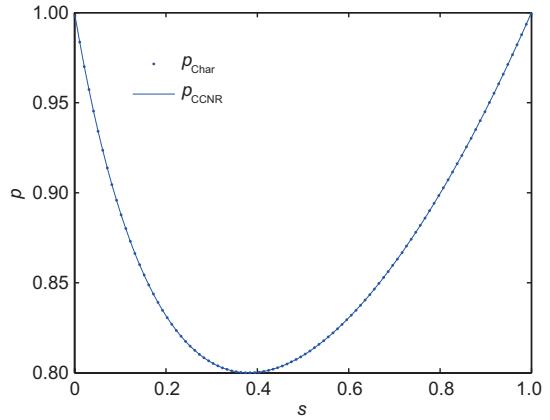


图1 (网络版彩图)  $3 \times 3$  PPT纠缠态中的(7,6)类, (7,5)类, (6,5)类的纠缠性质: 三类态具有同样的加白噪声性能, 而且特性函数准则与重排准则给出同样的结果. 图中纵坐标  $p$  表示PPT纠缠态与白噪声态混合后恰好被特性函数准则或重排准则检测为可分离时, PPT纠缠态的占比. 横坐标是态的参数  $s \in (0, 1)$ . 实线代表重排准则, 点代表特性函数准则

**Figure 1** (Color online) Entanglement properties of classes (7,6), (7,5), (6,5) of  $3 \times 3$  PPT entangled states. All the three classes have the same noise tolerance performance. The criteria of characteristic function and realignment coincide with each other for the separability of these states. In the figure, the ordinate  $p$  represents the fraction of PPT entangled state in the mixture which is detected to be just separable by the two criteria. The abscissa is the state parameter  $s \in (0, 1)$ . Solid line is for realignment criterion, the points are for characteristic criterion.

其中,

$$A = 3Np,$$

$$B = \frac{1}{2}(9N - 1)p,$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - 6N - 27N^2} p.$$

特性函数可分离准则式(24)为

$$2\sqrt{B^2 + C^2} + 6A^2 \leq 2. \quad (29)$$

由此我们得到纠缠条件

$$p > p_{Char} = \frac{1}{9N + \sqrt{1 - 9N}}. \quad (30)$$

对  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$  时的PPT纠缠态式(26), 我们有  $p_{Char} = p_{CCNR}$ , 即该量子态的用重排准则和特性函数准则得到的白噪声耐受性严格相等.

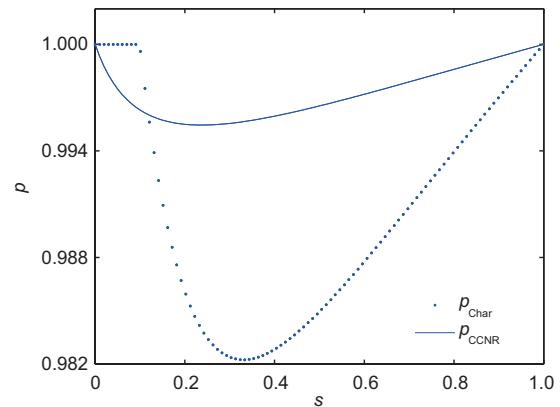
Horodecki  $3 \times 3$  PPT纠缠态的密度矩阵是

$$\rho_e = K \begin{pmatrix} s & \dots & s & \cdot & \cdot & \cdot & s \\ \cdot & s & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & \cdot \\ s & \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot & s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(1+s) & \cdot & \frac{1}{2}\sqrt{1-s^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s & \cdot \\ s & \cdot & \cdot & s & \cdot & \frac{1}{2}\sqrt{1-s^2} & \cdot & \frac{1}{2}(1+s) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中, 参数  $s \in (0, 1)$ , 归一化常数  $K = \frac{1}{8s+1}$ . 计算结果如图 2 所示, 当  $s \in (0, 0.1189)$  时, 重排准则优于特性函数准则, 而在大得多的参数范围  $s \in (0.1189, 1)$ , 特性函数准则优于重排准则.

## 5 结论

我们提出了一种新的两体量子系统可分离性准则, 该准则用量子态的特性函数表述. 利用局域滤波变换和局域旋转变换可以使特性函数大为简化, 从而得到简洁的分离性准则. 对主要的  $3 \times 3$  PPT 纠缠态计算和分析表明: 我们提出的特性函数准则对大部分态的纠缠检测性能优于重排准则, 与改进的相关矩阵准则相比互有长处. 我们提供的是一种新的简洁且容易计算的PPT纠缠态的检测准则, 特性函数准则的计算只涉及一次矩阵变换和一次带符号的奇异值分解, 与半定规划方法计算纠缠见证者相



**图 2** (网络版彩图) Horodecki  $3 \times 3$  PPT纠缠态的纠缠性质: 图中纵坐标  $p$  表示 PPT 纠缠态与白噪声态混合后恰好被特性函数准则或重排准则检测为可分离时, PPT 纠缠态的占比. 横坐标是态的参数  $s \in (0, 1)$ . 实线代表重排准则, 点代表特性函数准则

**Figure 2** (Color online) Entanglement properties of Horodecki  $3 \times 3$  PPT entangled states. In the figure, the ordinate  $p$  represents the fraction of PPT entangled state in the mixture which is detected to be just separable by the two criteria. The abscissa is the state parameter  $s \in (0, 1)$ . Solid line is for realignment criterion, the points are for characteristic criterion.

比, 计算量大为降低. 不过特性函数准则仍然是可分离性的必要条件. 如果特性函数矩阵是满秩的, 则双量子底特系统特性函数准则简化为其奇异值之和(包括  $R_{00} = 1$ )与维数  $d$  的比较, 特性函数准则这时变成相关矩阵准则 [10]. 我们的例子计算表明, 特性函数准则对非满秩特性函数矩阵情况更有效. 另一方面, 特性函数准则在(7,6), (7,5), (6,5)类的例子计算中显示出与重排准则等价. 两个准则是否在更大的范围内等价以及在什么条件下等价有待继续研究.

## 参考文献

- 1 Gurvits L. Classical deterministic complexity of Edmonds' Problem and quantum entanglement. In: Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing. San Diego, 2003. 10–19
- 2 Doherty A C, Parrilo P A, Spedalieri F M. Distinguishing separable and entangled states. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 187904
- 3 Peres A. Separability criterion for density matrices. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 1413–1415
- 4 Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions. *Phys Lett A*, 1996, 223: 1–8
- 5 Goto A, Shimizu T, Hashi K, et al. Decoupling-free NMR quantum computer on a quantum spin chain. *Phys Rev A*, 2003, 67: 022312
- 6 Chen K, Wu L A. A matrix realignment method for recognizing entanglement. *Quant Inf Comput*, 2003, 3: 193–202. ArXiv:[quant-ph/0205017](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205017)
- 7 Guhne O. Characterizing entanglement via uncertainty relations. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 117903

- 8 Gühne O, Hyllus P, Gittsovich O, et al. Covariance matrices and the separability problem. *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 130504
- 9 Gittsovich O, Gühne O, Hyllus P, et al. Unifying several separability conditions using the covariance matrix criterion. *Phys Rev A*, 2008, 78: 052319
- 10 de Vicente J I. Separability criteria based on the Bloch representation of density matrices. *Quant Inf Comput*, 2007, 7: 624–638. ArXiv:[quant-ph/0607195](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0607195)
- 11 Li M, Wang J, Fei S M, et al. Quantum separability criteria for arbitrary-dimensional multipartite states. *Phys Rev A*, 2014, 89: 022325
- 12 Shen S Q, Yu J, Li M, et al. Improved separability criteria based on bloch representation of density matrices. *Sci Rep*, 2016, 6: 28850
- 13 Terhal B M. Bell inequalities and the separability criterion. *Phys Lett A*, 2000, 271: 319–326
- 14 Bourennane M, Eibl M, Kurtsiefer C, et al. Experimental detection of multipartite entanglement using witness operators. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 087902
- 15 Sperling J, Vogel W. Multipartite entanglement witnesses. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 110503
- 16 Jevtic S, Pusey M, Jennings D, et al. Quantum steering ellipsoids. *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 020402
- 17 Asadian A, Erker P, Huber M, et al. Heisenberg-Weyl Observables: Bloch vectors in phase space. *Phys Rev A*, 2016, 94: 010301
- 18 Werner R F. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. *Phys Rev A*, 1989, 40: 4277–4281
- 19 Shi M, Yang W, Jiang F, et al. Quantum discord of two-qubit rank-2 states. *J Phys A-Math Theor*, 2011, 44: 415304
- 20 Verstraete F, Dehaene J, DeMoor B. Local filtering operations on two qubits. *Phys Rev A*, 2001, 64: 010101
- 21 Horodecki R, Horodecki M. Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states. *Phys Rev A*, 1996, 54: 1838–1843
- 22 Bennett C H, DiVincenzo D P, Mor T, et al. Unextendible product bases and bound entanglement. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 5385–5388
- 23 Chen L, Doković D Ž. Description of rank four entangled states of two qutrits having positive partial transpose. *J Math Phys*, 2011, 52: 122203
- 24 Ha K C, Kye S H. Construction of  $3 \times 3$  entangled edge states with positive partial transposes. *J Phys A-Math Gen*, 2005, 38: 9039–9050
- 25 Leinaas J M, Myrheim J, Sollid P. Numerical studies of entangled positive-partial-transpose states in composite quantum systems. *Phys Rev A*, 2010, 81: 062329
- 26 Clarisse L. Construction of bound entangled edge states with special ranks. *Phys Lett A*, 2006, 359: 603–607
- 27 Hansen L O, Myrheim J. Nongeneric positive partial transpose states of rank five in  $3 \times 3$  dimensions. ArXiv:[1706.01671](https://arxiv.org/abs/1706.01671)

## Quantum separable criterion based on characteristic function

CHEN XiaoYu\* & JIANG LiZhen

*School of Information & Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China*

Entanglement is the most important feature of quantum information science and it is closely related to the foundation of quantum mechanics. To determine a given bipartite quantum state to be entangled or not is by no means easy. We propose a separable criterion for bipartite quantum states based on their characteristic function or characteristic matrix. We use local filtering transform and local rotation transform to simplify the characteristic matrix, while keeping the positivity and entanglement property of the quantum state invariant. The development of Heisenberg-Weyl matrix basis makes the transforms possible. The local transforms greatly reduce the number of non-zero elements of characteristic matrix. The new criterion of separability then is constructed on the non-zero elements. We compare the entanglement detecting properties of our criterion with realignment criterion and modified correlation matrix criterion on  $3 \times 3$  bound entangled states. It is shown that our criterion is better than realignment criterion for most of the states.

**PPT entangled state, separable criterion, characteristic function, Heisenberg-Weyl matrix basis**

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 02.10.Yn

**doi:** [10.1360/SSPMA2017-00203](https://doi.org/10.1360/SSPMA2017-00203)